

緩傾斜 波浪式에 대한 PCGM 數值模型

A numerical model of PCGM for mild slope equation

徐承男*, 延泳鎭*
Seung Nam Seo, Young Jin Yeon

1. 緒論

港灣의 방파제에 대한 設計波 算定에는 正밀한 數值解가 要求된다. 波浪運動을 지배하는 三次元 Laplace식을 수직적분하여 유도되는 緩傾斜 波浪式은 屈·回折 현상과 反射波浪을 적절히 나타냄으로 正밀한 淺海 波浪計算에 가장 적합한 식으로 평가된다.

橢圓形 偏微分 方程式인 緩傾斜 波浪式은 유한요소법과 같은 數值模型으로 波浪 諸元(波高, 波向)을 구할 수 있다. 한편 대부분의 港灣 開發時 設計에 고려되는 지역은 비교적 넓으며(10Km × 10Km) 回折現象을 적절히 再現하기 위해서는 枘장당 최소 5개의 格子가 필요한 것으로 알려졌다(Panchang 등, 1991). 우리 나라에 많이 出現하는 設計波浪의 週期를 12초라 하면 線形理論에 의해 計算한 深海波長은 225미터이고 水深 20미터 지점에서는 약 150미터로 볼 때 數值模型의 格子間隔은 30미터가 된다. 위에서 言及한 海역의 波浪諸元을 유한요소법으로 구할 때 未知數는 약 11만개로 이로부터 構成되는 行列을 직접법(direct method)으로 구할 경우 필요한 記憶容量이 너무 커서 대부분의 대형 컴퓨터로도 波浪諸元을 計算할 수 없다. 이러한 점을 補完하기 위해 拋物形 近似式과 雙曲形 波浪式을 利用한 數值技法들이 개발되었다.

雙曲形 波浪式은 緩傾斜 波浪式으로부터 海面變位, x 방향 流量 그리고 y 방향 유량으로 分解한 쌍곡形 微分式을 시간에 따라 단계적으로 計算하는 기법으로 많은 기억용량이 필요하지 않으나 數值 安定性을 위해 시간 間隔이 작아야 하며 定常狀態에 도달하기 까지 많은 豫備 計算時間(spin-up time)을 필요로 한다. 또한 이 기법의 開放境界條件 설정에는 많은 어려움이 있는 것으로 알려졌다(Panchang 등, 1991).

拋物形 近似式은 波浪의 반사를 무시할 수 있는 경우에 사용할 수 있는 方法으로 Radder(1979)가 처음 提示한 후 많은 研究가 進行되었다. 波浪 進行方向의 回折效果가 進行 直交方向의 회절效果에 비해 無視될 수 있는 경우 緩傾斜波浪式으로부터 拋物形 近似式이 유도되며 段階的 計算法(marching method)을 사용하는 拋物形 近似式은 비교적 넓은 지역에 대한 波浪推定에 적합하다. Radder의 拋物形 近似式은 波浪이 주진행방향에 대해 비교적 작은 각으로 進行하는 경우에는 상당히 높은 精密度를 보이나 進行角이 증가할수록 誤差도 증가하므로 적용에 制限을 받는다. 이와 같은 제한을 줄이기 위한 方法의 하나로 高次 拋物形 近似式이 Kirby(1986)에 의해 제안되었다. Berkhoff 등(1982)의 橢圓形淺堆에 대한 수리실험 結果는 拋物形 近似式을 사용하는 數值模型의 검증에 널리 사용되고 있다. Kirby와 Dairymple(1984)은 橢圓形 淺堆에 대한 數值模型 比較研究를 통해 波浪의 非線形性이 포함되어야함을 지적하였다. 한편 國內의 研究로는 Kirby(1986)의 高次 拋物形 近似式의 結果와 대등한 正밀도를 가지는 數值模型이 徐(1990)에 의해 開發되어 球形淺堆 및 橢圓形淺堆에 대한 수리실험과 비교하여 模型의 精密度를 立證하였다. 國內 用役會社에서 많이 사용하고 있는 RCPWAVE模型은 미육군 공병단의 Ebersole(1985)에 의해 開發된 모형으로 일반에게 공개되었다. 이 모형은 외형상 緩傾斜 波浪式을 사용하나 반사파를 무시함으로써 拋物形 近似式으로 分類되며 모형의 支配方程式 자체에 평활화하는 效果를 가지고 있어 수치결과에 이러한 점이 나타나며 특히 橢圓形淺堆에 대한 數值結果中 회절效果가 뚜렷을 종합하면 波浪이 構造物에 의해 反射되는 경우에는 사용할 수 없고 地形에 의한 散亂波

* 韓國海洋研究所 海洋工學研究部(Ocean Engineering Laboratory, KORDI, Ansan P.O. Box 29, Seoul 425-600, Korea)

한 지점에서는 水理實驗 結果와 큰 差異를 보인다. 拋物形 近似式에 의한 數值模型의 특징 가 적어 主波向과 거의 일치하는 경우 計算 시간이 적게 소요됨으로 비교적 넓은 해역의 波浪諸元을 計算하는 데 적합한 模型이다.

최근 컴퓨터의 計算 性能이 빨라지고 기억용량이 커짐에 따라 전에는 현실성이 없는 計算도 可能하게 되어 緩傾斜 波浪式을 이용한 數值模型 開發의 必要性이 再檢討되기 시작하였다. 緩傾斜 波浪式을 有限差分法으로 差分하면 간단한 行列이 구성되며 이를 반복기법으로 計算하는 경우 많은 記憶容量이 필요치 않게 된다. 이 모형은 構造物에 의한 反射波를 考慮할 수 있으며 開放 境界條件과 非線形性을 모형에 接木하는 데 큰 어려움이 없다 (Panchang 등, 1991). Panchang 등은 모형결과를 橢圓形 淺堆 수리실험 결과와 비교하여 高次 拋物形 近似式의 결과보다 우수한 정밀도를 얻었다. 이 모형은 反復計算法 (Preconditioned Conjugate Gradient Method)을 사용하기 때문에 收斂速度가 增加된다.

본 論文에서는 有限差分法을 사용하고 차분법으로부터 만들어진 聯立方程式의 해를 반복기법으로 구하는 PCGM을 사용하였다. 緩傾斜 波浪式에 대해 PCGM을 사용한 數值模型은 Panchang 등(1991)에 의해 처음 試圖되었고 이 數值模型은 緩傾斜 波浪式을 유한차분하여 Bayliss 등(1983)의 演算方式을 그대로 사용한 것이다. 聯立方程式의 解를 반복기법으로 PCGM에는 여러 가지 방법이 존재할 수 있으며 徐(1994)는 연산기법들의 수치 결과를 일정 수심 위를 지나는 波浪의 解析解와 비교하여 最適技法을 제시하였으며 본 論文에서는 이 기법을 사용하였다.

2. 支配方程式과 演算方式

2.1. 支配方程式

수심이 완만히 변할 때 즉 水深 傾斜率이 작은 경우에 적분한 식에 나타난 수심 경사율의 제곱항과 2차 傾斜率을 무시하면 緩傾斜 波浪式이 유도된다(Berkhoff, 1972; Mei, 1989).

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi = 0, \quad (1)$$

여기서 波速 $C = \frac{\sigma}{k}$ 이고, 群速度 $C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$ 이다. 식(1)를 직접 차분하는 것

보다 $\phi(x, y) = \bar{\phi} \sqrt{CC_g}$ 를 使用하여 Helmholtz식(2)으로 變換하는 것이 罅셈의 수가 적어져 計算速度가 빨라지게 된다.

$$\nabla^2 \phi + \kappa^2 \phi = 0, \quad (2)$$

여기서 $\kappa^2 = k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}}$ 이다.

식(2)에 附與될 境界條件은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2 i k_x \phi^{\text{in}} + \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial x} - i k_x \right) \phi, \quad x=0 \text{에서}, \quad (3)$$

여기서 入射포텐셜 $\phi^{\text{in}} = -\frac{iga\sqrt{CC_g}}{\sigma} e^{ik_y y}$, k_x 와 k_y 는 波數의 x, y 成分이다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial x} + i k_x \right) \phi, \quad x=M \text{에서}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial y} + i k_y \right) \phi, \quad y=0 \text{에서}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial y} + i k_y \right) \phi, \quad y=N. \quad (6)$$

2.2. 演算方式

식(2)-(6)로 構成되는 式을 유한차분화한 聯立方程式은 식(7)의 형태로 表示할 수 있다.

$$Ax = b$$

(7)

行列 A 는 성분이 대부분 0인 sparse matrix가 되고 미지수 (x)는 (ϕ) 로 갯수는 格子點의 갯수와 같은 $(M+1) \times (N+1)$ 이 된다. 식(7)을 PCGM을 사용한 演算技法을 사용하여 계산하였다.

數值模型은 선형모형과 비선형모형으로 나누어진다. 線形模型은 線形 波浪分散式을 사용하여 구한 波數를 사용하고 反復計算이 끝날 때까지 波數가 바뀌지 않는다. 즉 行列 A 는 計算中에 一定함으로 PCGM을 사용하여 계산된 오차가 허용오차보다 작을 때까지 반복하여 數值解를 구하였다. 그러나 非線形模型은 계산된 속도포텐셜을 사용하여 波浪의 振幅을 구하고 이로부터 非線形 波浪分散式(Kirby와 Dalrymple, 1986)에서 波數를 구해 PCGM을 사용하여 30번씩 反復하여 解를 구한 후 새로운 波數를 다시 계산하였다. 이러한 과정을 반복하여 계산된 誤差가 許容誤差보다 작을 때까지 反復하여 數值解를 구하였다.

3. 結論

淺海域의 波浪變形을 가장 적절히 지배하는 緩傾斜 波浪式을 有限差分法으로 차별화하여 PCGM의 演算技法을 이용한 數值模型을 開發하여 球形 淺堆(그림 1)과 橢圓形 淺堆(그림 2)의 水理實驗과 比較하였다. 數值模型의 結果는 水理實驗 結果와 아주 잘 一致함을 보여 數值模型의 優秀한 精密度를 立證하였다.

비슷한 數值模型인 Panchang 등(1991)의 模型과의 차이점인 境界條件과 Preconditioner를 構成하는 行列 Q 에도 差異를 記述하고 두 模型의 結果를 分析하였다. 특히 非線形模型 실험에 나타난 새로운 波數를 구하는 反復횟수를 면밀히 檢討하였고 波高 計算과 波向 計算에 대한 問題點을 整理하였다.

非線形性이 비교적 뚜렷한 橢圓形 淺堆實驗의 結果를 分析하여 波高의 空間的 變化로 인한 回折現象의 重要性을 浮刻시켜 水深이 複雜하게 變하는 淺海域의 波浪 推定에는 非線形模型이 適合함을 立證하였다.

參考文獻

- 徐承男, 1990. 拋物形 近似式에 의한 淺海波 算定모델, 韓國 海岸·海洋工學會誌, 2(3): 134-1421.
- 徐承男, 1994. 緩傾斜 波浪式에 대한 PCGM 演算方式 比較, 韓國 海岸·海洋工學會誌, 6(2).
- Bayliss, A., C.I. Goldstein and E. Turkel, 1983. An iteration Method for the Helmholtz Equation, J. Comput. Phys. 49: 443-457.
- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, Proc. of the 13th Coastal Eng. Conf., ASCE, 471-490.
- Berkhoff, J.C.W., N. Booy and A.C. Radder, 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, Coastal Eng., 6: 219-232.
- Ebersole, B.A., 1985. Refraction-Diffraction Model for Linear Water Waves, J. Waterways, Harbours, Coastal Eng., ASCE, 111(6): 939-953.
- Ito, T. and K. Tanimoto, 1972. A method of numerical analysis of wave propagation-application to wave diffraction and refraction, Proc. of the 13th Coastal Eng. Conf., ASCE, 503-522.
- Kirby, J.T., 1986. Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves, J. Geo. Phys. Res. 91(C1): 933-952.
- Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple, 1984. Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves, Coastal Eng., 8: 219-232.
- Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple, 1986. An approximate model for nonlinear dispersion in

- monochromatic wave propagation models, *Coastal Eng.*, 9: 545-561.
- Mei, C. C., 1989. *The applied dynamics of ocean surface waves*, World Scientific Publishing Co., Singapore.
- Panchang, V.J., B.R. Pearce, G. Wei and B. Cushman-Roisin, 1991. Solution of the mild-slope wave equation by iteration, *Applied Ocean Res.*, 13:187-199.
- Radder, A.C., 1979. On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, 95: 159-176.

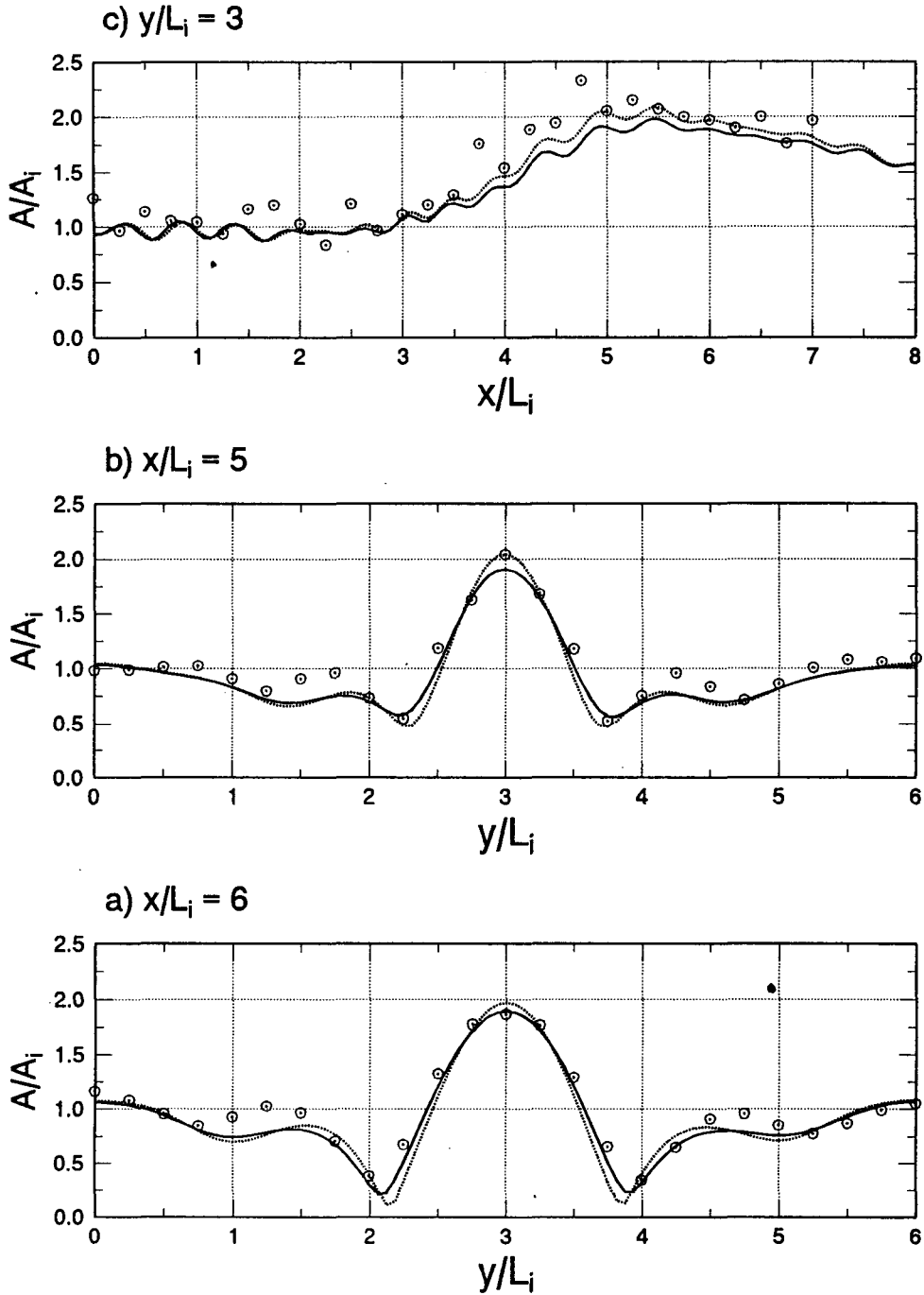


Fig. 1. Comparison of laboratory data and numerical results for circular shoal: \odot Data; \cdots Linear; $—$ Nonlinear

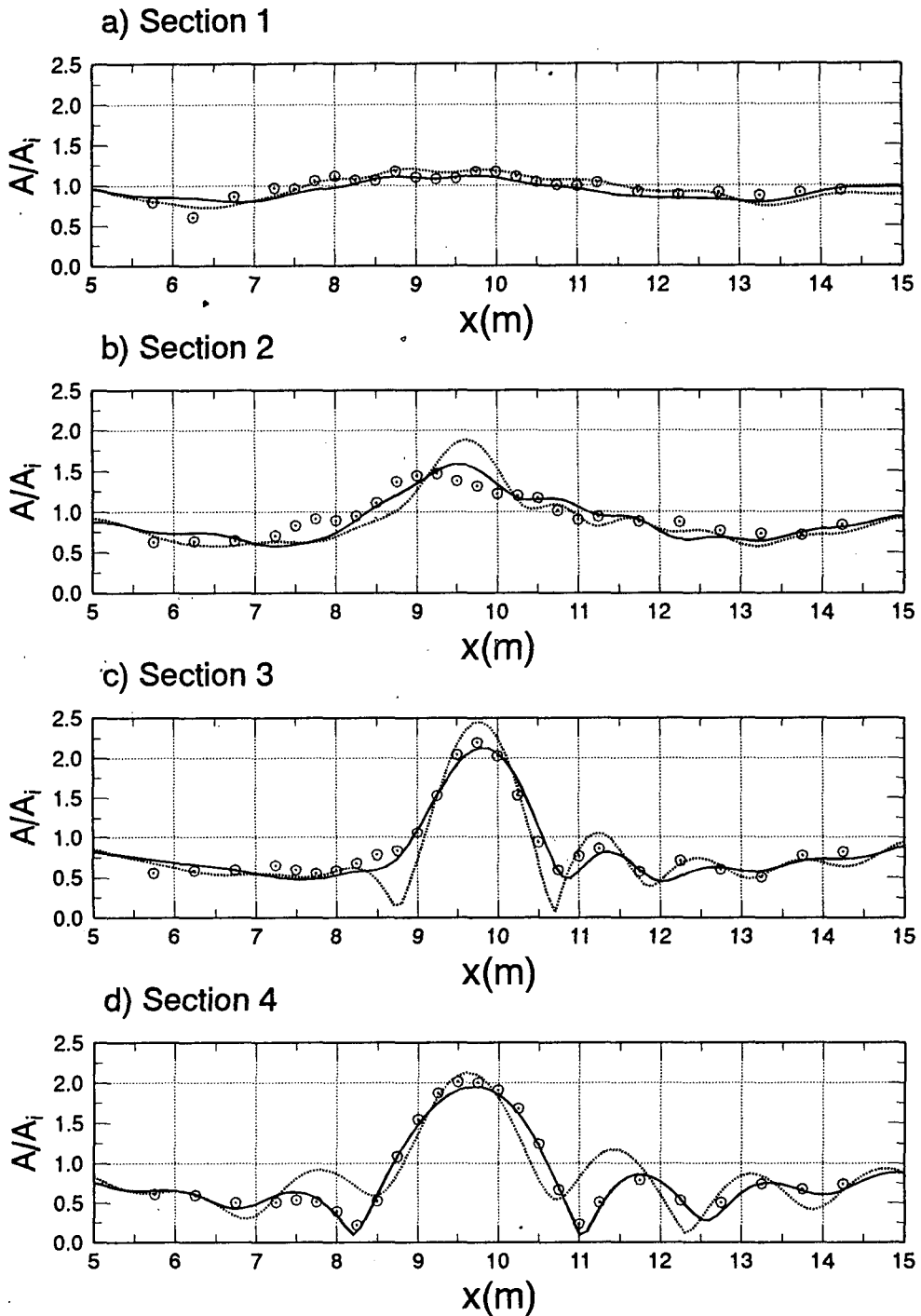


Fig. 2. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \odot Data; \cdots Linear; $—$ Nonlinear

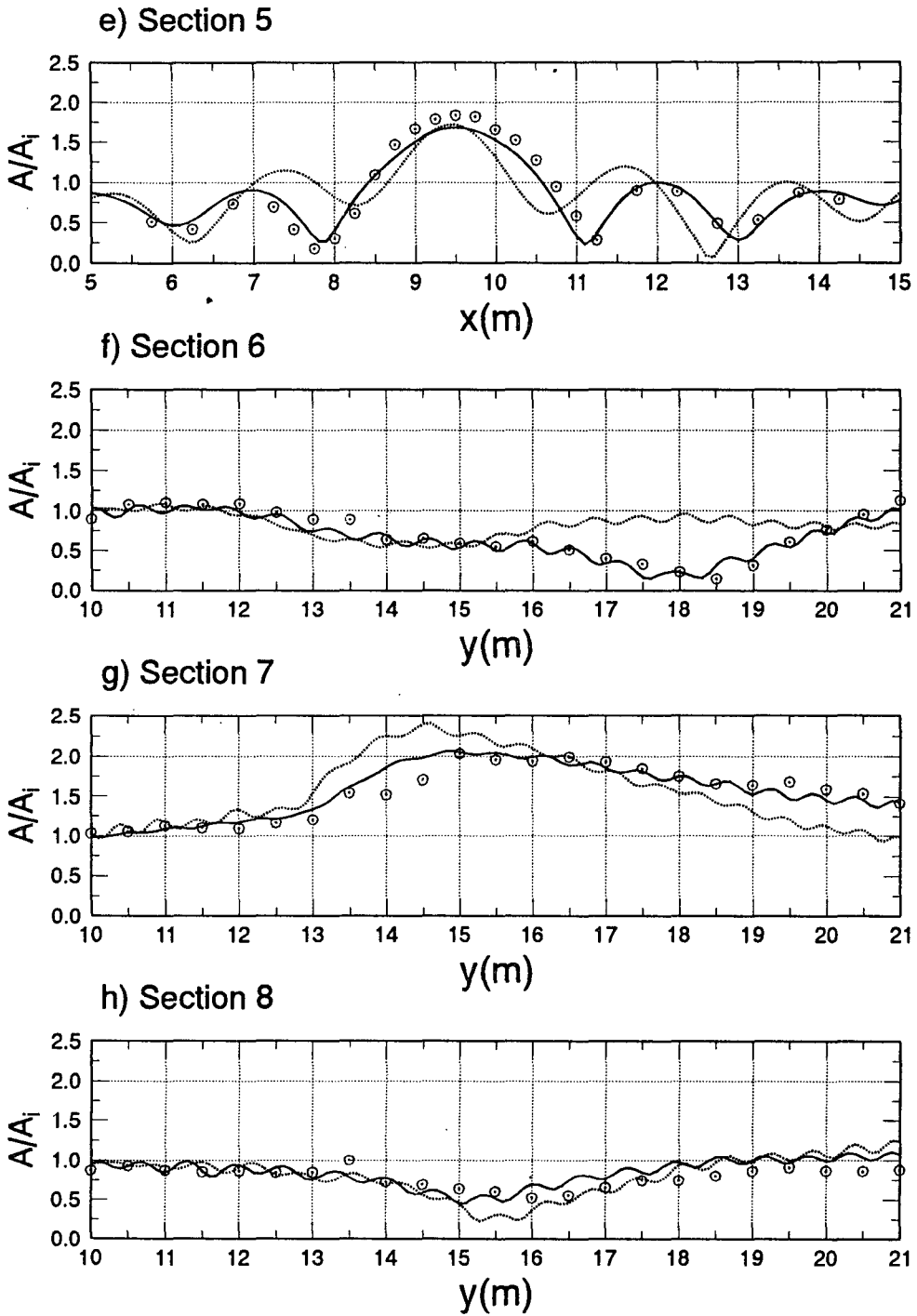


Fig. 2. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \circ Data ; Linear; — Nonlinear