

## 지반-구조물 상호작용의 시간영역 해석을 위한 무한경계요소 Infinite Boundary Elements for Soil-Structure Interaction Analysis in Time Domain

윤정방\*  
C.-B. Yun

최준성\*\*  
J.-S. Choi

### ABSTRACT

In this study, a new procedure for solving 2-D dynamic problems of semi-infinite medium in time domain by boundary element method (BEM) is presented. Efficient modelling of the far field region, infinite boundary elements are introduced. The shape function of the infinite boundary element is a combination of decay functions and Laguerre functions. Though the present shape functions have been developed for the time domain analysis, they may be also applicable to the frequency domain analysis. Through the response analysis in a 2-D half space under a uniformly distributed dynamic load, it has been found that an excellent accuracy can be achieved compared with the analytical solution

### 1. 서 론

최근들어 지반과 구조물의 상호작용과 지반에서의 파전달문제에 관한 연구가 서로 다른 수치해석법에 근거하여 많이 이루어지고 있다. 이러한 문제에서 중요한점은 효율적인 무한영역이나 반무한영역의 처리에 있다. 무한영역의 문제에 관해서는 경계요소법이 가장 적합한데 이는 경계요소법의 기본해가 자동적으로 무한영역에서의 경계조건을 만족하기 때문이다. 예를 들어 지하구조물과 암반사이의 상호작용을 다루는 문제에서 지하구조물이 지표면으로부터 충분히 멀리 떨어져 있다면 우리는 지하구조물을 동적하중의 영향을 받는 무한영역내의 동굴로 가정할 수 있게 된다. 한편, 반무한영역의 문제(댐의 기초, 원자력 발전소)를 다루는데 있어서 그 처리는 다소 다를 수 있다. 반무한영역의 경우 파동원에서 전파된 파로인해 지표면위의 변위는 여전히 미지수로 남게 되기 때문이다. 따라서, 경계요소법을 이용할때 반무한영역의 일반적인 처리법은 파동원에서 파가 전파될때 그 파가 완전히 소멸되었다고 생각되는 어떤 거리까지 요소를 분할해주는 방법으로 문제를 해결하게 된다. 결국 파동원에서 외부영역의 어떤지점(변위와 응력의 변화가 없는점)까지의 요소분할은 단순히 외부영역으로 파의 전달을 고려할 수 있도록 하여 내부영역(해를 구하고자 하는 부분)의 정확도를 높이는데 기여할뿐이다.

이런 배경에서 본 논문에서는 외부영역의 모형화와 이를 해석하는데 소유되는 해석시간을 줄일 수 있는 방안에 관해 연구했다. 이와같은 연구는 처음으로 Medina와 Taylor에 의해 이루어졌으며 이들은 서로 다른 파의 성분을 고려한 주파수 의존적인 삼절점 무한경계요소법을 개발하였다[1]. 그러나, 이것은 대상 해석체가 반무한체 위의 원형강판 해석에 국한되어 있다. 좀더 일반적인 경우는 Zhang이 제시하였는데 삼차원 반무한영역의 문제를 주파수영역에서 무한경계요소법을 이용하여 해석하였다[2]. 이때 이용된 무한경계요소법은 삼차원 문제를 해결하기 위한 것이다. 이것은 기본해의 거동에 근거하여 외부영역의 효과를 묘사하기위한 감쇠 형태의 형상함수를 사용하였다. 주파수영역에서의 기본해가 서로 다른 파의 성분을 포함하기 때문에 무한경계요소는 전단파와 압축파에 의한 거동을 동시에 표현할 수 있게 된다.

\* 한국 과학기술원 토목공학과, 교수

\*\* 한국 과학기술원 토목공학과, 박사과정

이후에 Zhang이 이를 더 개발시켜 좀 더 모형화가 어려운 비균질 구조체(적층지반)등을 유한요소법-경계 요소법-무한경계 요소법의 연계법으로 해석 하였다[3].

시간영역에서는 서로 다른 지반의 특성을 지닌 다층 반무한체를 무한요소를 이용하여 Cheung이 해석한바 있다[4].

## 2. 경계요소법의 정식화

균질하고 등방한 재료의 미소변위를 구하는 문제의 기본평형방정식은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$(c_1^2 - c_2^2)u_{i,jj} + c_2^2 u_{j,ii} + b_j = \ddot{u}_j, \quad c_1^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1)$$

식 (1)은 다음과 같은 경계조건과 초기조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, 0) &= \bar{u}_i, \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = \bar{v}_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ u_i(\mathbf{x}, t) &= u_i, \quad s_i(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij} n_j = s_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $s_j$ 는 법선력벡터이고  $n_j(\mathbf{x})$ 는 외부쪽의 법선벡터이다. 그리고  $u_i$ 와  $s_i$ 는 경계에서의 변위와 응력이다.

한편, 식 (1)은 다음과 같은 해를 만족하는데 이를 변위에 관한 기본특이해라 한다.

$$G_{ij}(x, t, \xi, \tau = 0) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ a_{ij}(r) \delta(t - \frac{r}{c_1}) + b_{ij}(r) \delta(t - \frac{r}{c_2}) + c_{ij}(r) \int_{\frac{r}{c_1}}^{\frac{r}{c_2}} \delta(t - \lambda r) \lambda d\lambda \right\} \quad (3)$$

여기서,

$$a_{ij}(r) = \frac{1}{c_1^2} \frac{r_i r_j}{r^3}, \quad b_{ij}(r) = \frac{1}{c_2^2} \left( \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{r_i r_j}{r^3} \right), \quad c_{ij}(r) = \frac{3r_i r_j}{r^3} - \frac{\delta_{ij}}{r}$$

이며  $r_i = x_i - \xi_i$ ,  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ 이고  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta이다. 응력에 대한 기본 특이해는 다음과 같이 정의된다.

$$F_{ij} = (\lambda G_{mk,m} \delta_{ij} + \mu (G_{ik,j} + G_{jk,i})) n_j \quad (4)$$

경계적분방정식은 기본특이해와 동적 상반정리를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_{ij}(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma} F_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) * u_j(\boldsymbol{\xi}, t) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) * s_j(\boldsymbol{\xi}, t) d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) \quad (5)$$

위의식을 경계적분식이라고 부르며, 위에서  $\mathbf{x}$ 와  $\boldsymbol{\xi}$ 는 각각 응답을 구하는 점과 작용점을 가리키고  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 는 각각 초기변위와 속도를 나타낸다[5]. 위치의 함수인 텐서  $c_{ij}$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$c_{ij} = \delta_{ij} - \gamma_{ij} \quad (6)$$

여기서  $\gamma_{ij}$ 는 불연속함수로서 점  $\mathbf{x}$ 가 영역의 내부에 있을때 영(0)이고 영역의 외부에 있을때  $\delta_{ij}$ 와 같으며, 매끈한 경계위에 있을때  $0.5\delta_{ij}$ 이다[6]. 이제 경계  $\Gamma$ 를 위에서 제시된 방법들을 써서 적당한 요소들로 분할하고 경계변수(변위와 트렉션)를 그들의 절점값으로 표시하면 식 (5)는 다음과 같은 이산화된 식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) + \sum_{e=1}^m \int_{\Gamma_e} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \xi, t) * \mathbf{u}(\xi, t) d\Gamma(\xi) = \sum_{e=1}^m \int_{\Gamma_e} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \xi, t) * \mathbf{s}(\xi, t) d\Gamma(\xi) \quad (7)$$

여기서  $\mathbf{F}$ 와  $\mathbf{G}$ 는 기본해에 의해 만들어진 행렬들이며  $\mathbf{u}_s$ 는 하중점의 변위이다. 그리고  $\mathbf{u}$ 와  $\mathbf{s}$ 는 경계점의 변위와 트렉션이다. 변위와 트렉션 벡터  $\mathbf{u}$ 와  $\mathbf{s}$ 는 다음과 같은 절점값과 보간함수의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^e(t) \quad (8)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{s}^e(t) \quad (9)$$

또한,

$$\int_{\Gamma_e} \mathbf{F} * \mathbf{u} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} (\mathbf{F} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta) * \mathbf{u}^e = \mathbf{H}'^e \mathbf{u}^e \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma_e} \mathbf{G} * \mathbf{s} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} (\mathbf{G} \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta) * \mathbf{s}^e = \mathbf{G}^e \mathbf{s}^e \quad (11)$$

와 같이 달리 표현되기도 한다. 여기서  $|\mathbf{J}|$ 는 좌표변환에 관한 자코비안 행렬식이다. 개개의 하중점에 관한 기본해를 가중함수로서 이용하는 것으로 선형방정식이 성립될 수 있다.

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{s} \quad (12)$$

여기서  $\mathbf{H} = \mathbf{C} + \mathbf{H}'$ 이며  $\mathbf{C}$ 는 점프항의 대각행렬이고  $\mathbf{u}$ 와  $\mathbf{s}$ 는 모든 절점의 변위벡터와 트렉션벡터이다. 경계  $\Gamma$ 위에 모든 미지수는 식 (12)의 해를 구하는 것으로 얻어질 수 있다.

### 3. 무한경계요소

먼저 그림 1에서 보여진 이차원 반무한 문제를 고려해보자. 반무한 문제를 다루는데 있어서 위에서 보인 기본해가 외부영역경계인  $\Gamma_f$ 가 응력이 영(0)이 되는 조건을 만족하지 못하므로 적분방정식은 내부영역  $\Gamma_n$ 와 외부영역  $\Gamma_f$ 를 적분에 함께 포함 시켜야 한다. 즉, 적분방정식은 다음식과 같이 쓸 수 있다.

$$c_{ij} u_j + \int_{\Gamma_n + \Gamma_f} F_{ij} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma_n + \Gamma_f} G_{ij} s_j d\Gamma \quad (13)$$

본 연구가 균일 반무한체만 다루므로  $\Gamma_f$  위에서  $s_j = 0$ 이 되지만 적층된 반무한체의 문제를 다룬다면 이것은 달리 표현되어야 할 것이다.

$$\int_{\Gamma_f} G_{ij} s_j d\Gamma = 0 \quad (14)$$

그림 1 이차원 반무한 영역

이제 남겨진 문제는 외부영역에서 변위분포  $u_j$ 를 적절히 묘사할 수 있는 형상함수를 찾는 일이다.

다음은 본 연구에서 제안한 형상함수로서 식의 개요는 다음식으로 표현되어 진다.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} L_n e^{-r} a_n \quad (15)$$

여기서  $L_n$ 은 Laguerre 다항식이고  $a_n$ 은 미지계수이다.

이 식의 주요특징은 이론상  $n \rightarrow \infty$ 일때 정확한 값에 수렴하며 외부영역에서 형상함수가 반드시 만족해야하는 다음의 조건 세가지를 모두 충족하는것에 있다.

첫째로 외부영역에서 형상함수는 연속이며 무한대에서 응력과 변위가 영(0)이 되는 조건을 만족하고 둘째는  $r \rightarrow \infty$  일때 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u \rightarrow 0 \quad (16)$$

즉, 형상함수는 무한대에서 유한한 어떤 값을 가져야 한다는 것이며 여기서는 감쇠함수가 조합되었으므로 당연히 유한한 어떤값 영(0)으로 수렴할 것이다. 마지막 세번째 조건은 Sommerfeld 방사조건으로서 다음의 식으로 표현된다.

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \rightarrow 0 \quad (17)$$

이 조건도 식 (16)의 대입으로 쉽게 충족됨을 알 수 있다[7].

또한 제안된 식은 주파수나 시간의 함수에 의존적이지 않으므로 시간영역에서나 주파수영역 어느 하나에 국한되지 않는 장점도 지니고 있다. 그러나 이론상  $n \rightarrow \infty$  일때 정확한 값을 가진다는 사실은 실제의 적용상 어려움이 있다. 하지만, 이는 해의 수렴성을 크게 하는 방법을 사용하여 미소값의 영향을 고려하지 않는다면 해결될 수 있는 문제가 된다. 다음은  $n$ 의 갯수에 따라 주파수 성분을 잘 묘사할 수 있는 가장 핵심적인 Laguerre 다항식에 대해 기술하겠다[8]. Laguerre 다항식의 일반적인 식은 다음과 같이 표현된다.

$$L_n(r) = 1 - \binom{n}{1} \frac{r}{1!} + \binom{n}{2} \frac{r^2}{2!} - \dots + \frac{(-r)^n}{n!}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{[(n-k)!k!]} \quad (18)$$

$r \rightarrow \infty$ 일때 위식은 발산하지만 조합되는 지수감쇠함수의 영향으로 유한한 값으로 수렴된다. 그림 2와 3은 지수감쇠함수와 조합된 Laguerre 다항식의 형태를 보여준다.

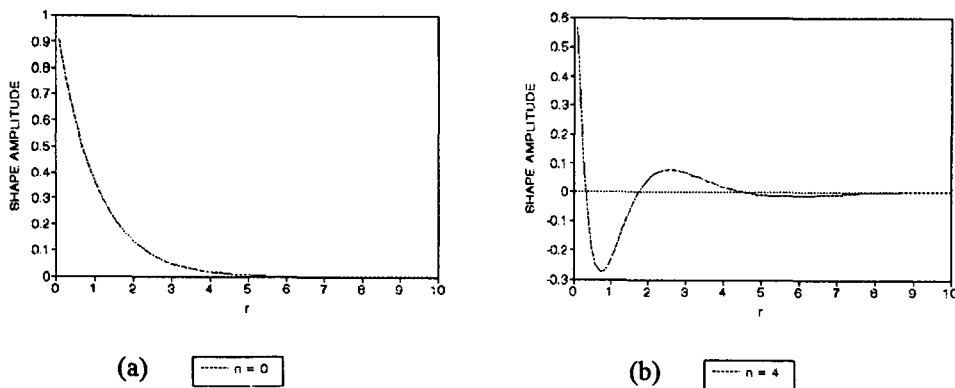


그림 2 감쇠지수함수  $e^{-r}$  과 Laguerre 다항식의 조합 형상

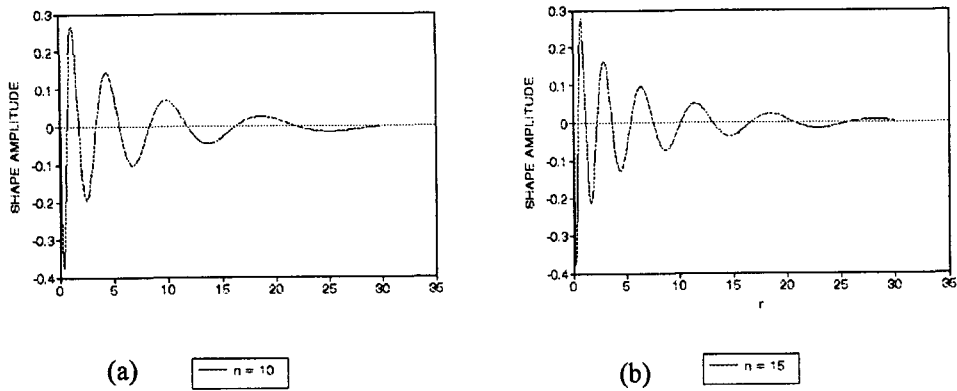


그림 3 감쇠지수함수  $e^{-0.6r}$  과 Laguerre 다항식의 조합 형상

아래식 (19,20,21)은 삼절점 무한경계요소의 형상함수에 관해 유도한 식이며 그림 4 는 삼절점과 사절점 무한경계요소의 형상을 보여주고 있다. 이들 형상함수의 특징은 유한요소법에서 만족해야 하는 기본적인 형상함수의 조건을 잘 만족 하면서 감쇠 형상함수의 모습을 분명히 보여주고 있다.

$$N_1 = \frac{e^{-r+r_1}(r-r_2)(-r+r_3)}{(r_1-r_2)(-r_1+r_3)} \quad (19)$$

$$N_2 = \frac{e^{-r+r_2}(-r+r_1)(-r+r_3)}{(r_1-r_2)(-r_2+r_3)} \quad (20)$$

$$N_3 = \frac{e^{-r+r_3}(-r+r_1)(-r+r_2)}{(r_1-r_3)(r_2-r_3)} \quad (21)$$

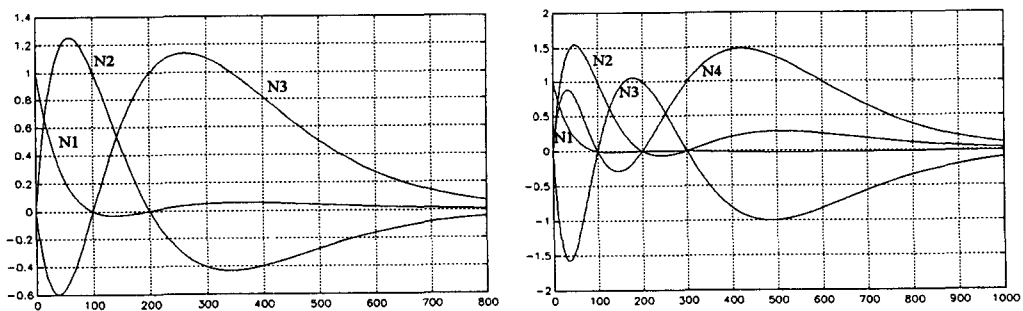


그림 4 절점수가 3과 4인경우의 형상함수의 형상

#### 4. 예제해석

개발된 시간영역에서의 무한경계요소의 타당성을 검증하기 위해 이론해의 비교를 비롯한 몇가지 예제해석을 수행하였다.

##### 4.1 이론해와 비교

본 예제에서는 그림 5와 같이 순간적으로 작용된 분포하중에 의한 중앙값의 변위를 이론해와 Manolis가 개발한 BEMTD(1988) 그리고 본 연구에서 제안한 무한경계요소법을 이용하여 각각 해석하고 비교하였다. 비교 결과에 이용된 이론해는 Craggs(1960)의 해[9]를 사용했으며 비교 결과는 BEMTD를 이용한 해석값이 이론해와 비교하여 약간 크게 나왔고 무한경계요소법을 사용했을때가 이론해와 비교하여 약간 작게 나왔지만 대체적으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다(그림 6). 예제에 쓰인 물성치는  $\lambda(\text{Pa})=\mu(\text{Pa})=6.90\text{E}09$ ,  $\rho(\text{Ns}^2/\text{m}^4) = 3.00 \text{E}04$ ,  $P_0(\text{Pa}) = 6.90 \text{E}07$  이다.

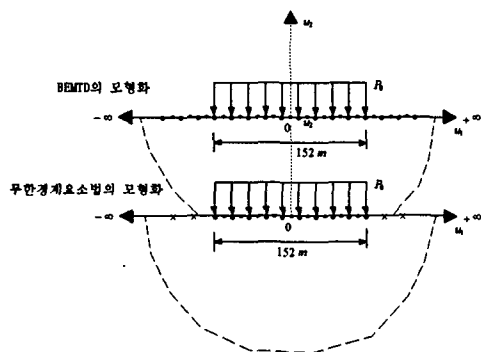


그림 5 예제 4.1의 해석모형

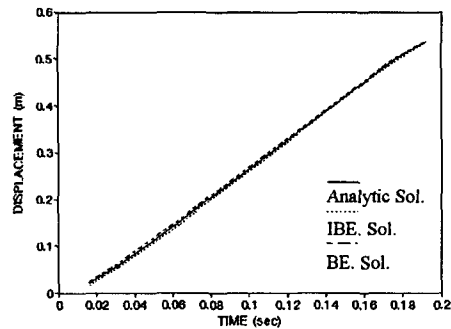


그림 6 예제 4.1의 해석결과 비교

##### 4.2 BEMTD의 해석결과와의 비교

이 예제에서는 BEMTD의 요소수에 따른 정해 수립과정을 그림으로 보이고 15개의 요소를 사용한 값과 무한경계요소를 이용한 해석값과를 각각 비교 하였다. 하중형태는 연속적인 반사인파인 경우로 한정했으며 해석결과는 0 점에서의 수직변위의 시간이력에 관해 BEMTD의 해석값과 비교했는데 전체적으로는 큰 차이없이 잘 일치하고 있다. 더 정확한 해의 근사는 고질점 무한경계 요소를 이용한다면 해결되리라 기대된다. 예제에서 이용된 물성치는  $E(\text{Pa})=2.66\text{E}08$ ,  $\nu=0.33$ ,  $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)=2000$ ,  $P_0(\text{Pa})=100\text{E}05$  이다.

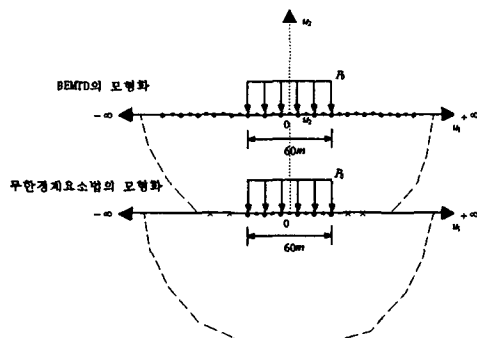


그림 7 예제 4.2의 해석모형

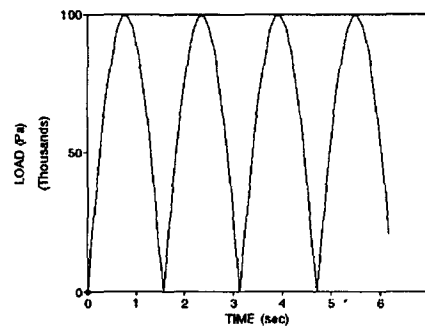


그림 8 예제 4.2의 하중형태

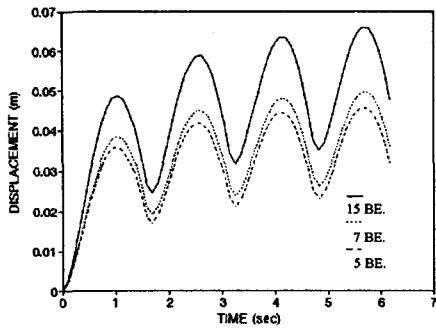


그림 9 요소수에 따른 해석결과

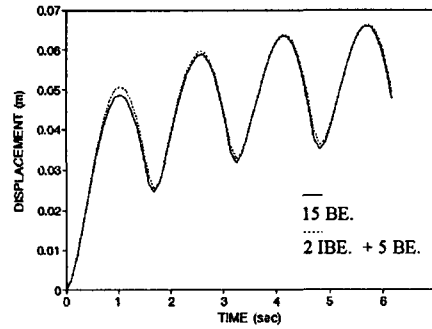


그림 10 예제 4.2의 해석결과 비교

### 4.3 터널문제의 적용예

마지막 예제로서 터널위의 반무한체인 지반을 경계요소와 무한경계요소로서 모형화 하고 다시 터널과 터널을 싸고있는 지반은 각각 유한요소와 경계요소로서 모형화하여 무한경계요소의 타당성을 조사했다. 해석모형은 비교의 용이성을 위해 양신추와 Estorff가 해석한 바 있는 터널내 열차통과 하중을 사각충격하중(Rectangular Impulsive Loading)으로 단순모형화 하는 예제를 선택했다[10,11]. 해석모형의 물성치는 지반의 경우  $E(\text{Pa})=2.66\text{E}08$ ,  $\nu=0.33$ ,  $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)=2000$ 이고 터널의 경우에는  $E(\text{Pa})=6.00\text{E}09$ ,  $\nu=0.25$ ,  $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)=2000$ 이며 열차에 의한 충격하중은 그림 11에서 보여주는바와 같이 터널바닥면 위에 폭 2m에 걸쳐 크기  $P(t)$  50KN의 수직하중이 0.02초 동안 재하된 후 제거되는 것으로 단순화 했다. 해석결과와 비교는 그림 11의 A점에서 수직변위의 시간이력에 관해 비교 하였는데 만족스런 결과는 아니었다. 그 이유를 검토한 결과 무한경계요소 자체에 원인이 있는것이 아니고 경계요소와 유한요소의 연계가 제대로 이루어지지 않아 발생한 문제로 여겨지며 이문제가 해결되면 더 나은 결과가 기대된다.

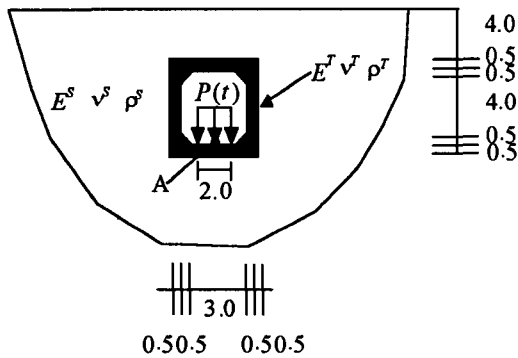


그림 11 예제 4.3의 해석모형

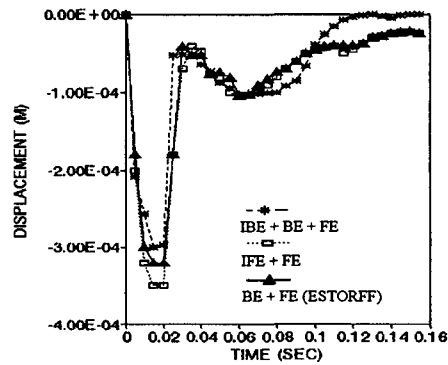


그림 12 예제 4.3의 해석결과 비교

## 5. 결론 및 추후연구과제

본 연구에서는 Laguerre 다항식의 특성함수와 감쇠함수를 조합하여 시간영역에서 적합한 무한경계요소의 변위 형상함수를 제안하였다. 또한, 이를 경계요소법에 응용하여 반무한영역의 해석에서 적은 수의 요소를 사용하고도 상당히 정확한 결과를 낼 수 있는 시간영역에서의 무한경계요소를 개발하였다.

무한경계요소법의 효과를 검증하기 위한 예제해석에서 이론해와의 비교결과 큰 차이없이 일치했고 요소수를 많이 나눈 BEMTD의 해석결과와도 잘 일치하여 무한경계요소의 타당성을 보였다. 아울러, 무한경계요소와 경계요소 그리고 유한요소의 연계에 의한 터널진동해석의 가능성을 확인했다.

끝으로 무한경계요소의 절점간 거리가 파의 전파특성표사에 미치는 상관관계와 유한요소와 경계요소의 연계의 완전성을 보완하고 무한경계요소가 다층의 반무한 영역의 문제나 삼차원영역의 문제를 해결하는데 이용된다면 그 효율이 극대화되리라 여겨진다.

## 6. 참고 문헌

1. F. Medina and R.L. Taylor, " Finite element techniques for problems of unbounded domains, " *Int. j. numer. methods eng.*, **19**, pp.1209-1226, 1983.
2. Z. Chuhan and S. Chongmin and O. A. Pekau, " Infinite boundary elements for dynamic problems of 3-D half space, " *Int. j. numer. methods eng.*, **31**, pp.447-462, 1991.
3. Z. Chuhan and O. A. Pekau and J. Feng, " Application of FE-BE-IBE coupling to dynamic interaction between alluvial soil and rock canyons, " *Earthquake eng. struct. dyn.*, **21**, pp.367-385, 1992.
4. Y.K. Cheung and L.G. Tham and Z.X. Lei, " Wave propagation in layered media by time domain BEM, " *Earthquake eng. struct. dyn.*, **22**, pp.225-244, 1993.
5. A.E.H. Love, " The propagation of wave motion in an isotropic elastic solid medium ", *Proc. London Math. Soc.*, *2nd series* **1**, pp.291-344, 1904.
6. A.T. De Hoop, " Representation theorems for the displacements in an elastic solid and their application to elastodynamic diffraction theory, " *Ph.D. thesis, Technical University of Delft*, 1958.
7. O.Coulaud and D.Funaro and O.Kavian, " Laguerre spectral approximation of elliptic problems in exterior domains, " *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 80, pp.451-458,1990.
8. C. Mavriplis, " Laguerre polynomials for infinite-domain spectral elements, " *J. comput. physics*.
9. J.W. Craggs. " On two dimensional waves in an elastic half-space, " *Proc. Cambridge Philos.* **56**, pp.269-285, 1960.
10. O. Von Estorff, and H. Antes, " Dynamic Response of Tunnel Structures, " *Proc. Structural Dyn.*, Proc. of the European Conf. on Structural Dyn., June 1990, Bochum, FR Germany, pp.803-810.
11. 이 희현, 양신추, " 터널내 고속철도 주행에 의한 지반진동의 예측, " *고속철도 SYMPOSIUM 논문집*, pp.165-185, 1993.