

Laplace변환을 이용한 판 진동문제의  
경계적분방정식 정식화  
A Boundary Integral Formulation for Vibration  
Problems of Plate using Laplace Transform

이 성 민\*                      서 일 교\*\*                      권 택 진\*\*\*  
Lee, Sung-Min                      Suh, Ill-Gyo                      Kwun, Taek-Jin

---

ABSTRACT

In this paper, a boundary integral equation for transient plate bending problem is proposed. Approach, using laplace transform is considered. The boundary integral equations with respect to deflection, normal slope, bending moment effective shear are presented and the effect of corner point is considered.

---

1. 서 론

컴퓨터를 이용하여 탄성문제, 복잡한 기하학적 형태 및 경계조건들과 관련된 여러가지 문제들이 근사수치 해석법으로 수행되어져 왔다. 지난 1970년대 이전까지 이러한 형태의 문제를 풀기 위하여 사용되어진 대표적인 수치해석법들은 유한차분법(F.D.M.:Finite Difference Method)과 유한요소법(F.E.M.:Finite Element Method)이다. 그러나, 이러한 문제에 대해서는 요소분할과 계산과정에서 아주 많은 시간과 노력을 필요로 하게 된다. 그 결과 1970년대 말에 유한요소법을 대체할수 있는 정확하고 효율적인 근사수치 해석방법인 경계요소법이 개발되기 시작했다. 이러한 경계요소법은 많은 연구가 이루어지고 있는데 탄성문제 뿐만 아니라 동적문제를 비롯하여 무한 및 반무한 영역문제, 응력집중문제, 연성문제 등에서 타 해석법과 비교하여 우수하다고 알려져 있다.<sup>1)</sup> 또한, 경계요소법은 본질적으로 대상문제의 경계방정식이 이산화 되기때문에 해석대상 영역의 차원을 한차원 낮춤으로써 적은 컴퓨터의 용량을 가지고 정확한 결과를 얻을 수 있다.

경계요소법에 의한 평판의 휨문제에 대한 해석은 정적문제에 대해서는 선형 및 비선형 해석을 포함하여 많은 연구가 보고되었다.<sup>2)-7)</sup> 그러나, 판의 동적문제에 대한 경계요소법의 적용은 극히 적다. 판의 진동에 대한 기존의 연구실태를 보면, 자유진동에 관해서는 Vivoli,Fillipi가

---

\* 성균관대학교 건축공학과 석사과정  
\*\* 제주대학교 건축공학과 전임강사 공학박사  
\*\*\* 성균관대학교 건축공학과 교수 공학박사

최초로 일정요소를 사용한 간접경계요소법을 적용하여 보고하였고, Niwa, Kobayashi, Kitahara 와 Kitahara가 상세한 수치적인 결과를 포함하여 직접경계요소법과 간접경계요소법 두가지의 해석법을 적용하였고, 그외에 Hutchinson, Wong 와 Providakis, Beskos에 의한 연구가 있다. 판의 강제진동에 대해서는 Bezine, Gamby가 시간 영역에 의지하는 동적 기본해를 적용하였고, 그외에 Providakis, Beskos의 보고가 있었다.<sup>8)</sup> 국내에서는 박판의 동적해석에 대한 경계적분방정식 정식화에 대하여 서일교, 권택진의 보고가 있었다.<sup>9)</sup> 본 논문에서는 평판의 진동문제에 대한 경계요소법의 적용으로서 Laplace변환을 이용한 해석법을 다루고 있다. 그리고 기본미분방정식에 대하여 가중잔차법을 적용하여 경계적분방정식을 유도하였고, 모서리점의 영향을 고려함으로써 보다 정확한 계산이 될수있도록 하였고, 또한 고차요소를 적용할 수 있도록 하였다.

## 2. 기본 관계식

본 연구의 해석대상으로 경계  $\Gamma$ , 영역  $\Omega$ , 경계상에서 외향단위 법선벡터가  $n$ 이고 하중  $p(t)$ 를 받는 등방, 등질의 선형탄성판으로 한다. 또한 시간영역은  $T=[0, t]$ 로 한다. 등방성 탄성재료의 미소변형을 가정하면 평판의 중앙면의 처짐  $w$  에 의한 평판의 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.<sup>10)</sup>

$$D\Delta\Delta w(x,t) + \rho h \ddot{w}(x,t) = p(x,t) \quad \in \Omega \quad \text{-----}(2-1)$$

여기서

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2}, \quad \Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$\rho$ : 단위체적당질량  $h$ : 판의두께  $E$ : 탄성계수  $\nu$ : poisson비

## 3. Laplace 변환공간에서의 기본관계식

시간  $t$  에 관한 Laplace변환은 다음과 같이 정의된다.

$$L\{f(x,t)\} \equiv \bar{f}(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} f(x,t) dt \quad \text{-----}(3-1)$$

미분방정식(2-1)에 대하여 식(3-1)으로써 정의되는 시간  $t$ 에 관한 Laplace변환을 적용하면 다음과 같은 상공간에서의 미분방정식을 얻을수 있다.

$$D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho\alpha\beta}(x,s) + \rho h s^2 \bar{w}(x,s) = \bar{P}(x,s) \quad \text{-----}(3-2)$$

$$D_{\alpha\beta\lambda\rho} = D \left\{ \nu \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\rho} + \frac{(1-\nu)}{2} (\delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\rho}) \right\}, \quad \bar{P}(x,s) = \bar{p}(x,s) + \rho h \{ s w(x,0) + \dot{w}(x,0) \}$$

$\delta_{\alpha\beta}$ : Kronecker delta

4. 경계적분방정식과 기본해<sup>11)</sup>

상공간에서의 미분방정식(3.3)에 대하여 가중함수  $\phi^*$ 에 관한 다음과 같은 가중잔차식을 생각한다.

$$\int_{\Omega} (D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho\alpha\beta} + \rho h s^2 \bar{w} - \bar{P}) \phi^* d\Omega = 0 \quad \text{-----}(4-1)$$

식(4.1)에서 제 1적분항에 Green의 정리를 이용하면

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho\alpha\beta} \phi^* d\Omega &= \int_{\Omega} \{ D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho\alpha} n_{\beta} \phi^* - D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho} n_{\alpha} \phi^*_{,\beta} \\ &+ D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda} n_{\rho} \phi^*_{,\beta\alpha} - D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w} \phi^*_{,\beta\alpha\rho} n_{\lambda} \} d\Gamma + \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\lambda\rho} \phi^*_{,\lambda\rho\alpha\beta} \bar{w} d\Omega \quad \text{-----}(4.2) \end{aligned}$$

여기서  $n_{\alpha}$  ( $\alpha=1,2$ )는 법선벡터  $n$ 의 성분을 나타낸다. 식(4.2)를 식(4.1)에 대입하면 다음과 같은 경계와 영역에 대한 적분방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D_{\alpha\beta\lambda\rho} \phi^*_{,\alpha\beta\lambda\rho} + \rho h s^2 \phi^*) \bar{w} d\Omega + \int_{\Gamma} \{ D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho\alpha} n_{\beta} \phi^* - D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho} n_{\alpha} \phi^*_{,\beta} \\ + D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda} n_{\rho} \phi^*_{,\beta\alpha} - D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w} n_{\lambda} \phi^*_{,\beta\alpha\rho} \} d\Gamma = \int_{\Omega} \bar{P} \phi^* d\Omega \quad \text{-----}(4.3) \end{aligned}$$

여기에서 상공간에서의 모멘트  $\bar{M}_{\alpha\beta}$ 와 전단력  $\bar{Q}_{\alpha}$ 는 처짐  $\bar{w}$ 로서 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = -D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho} \quad , \quad \bar{Q}_{\alpha} = -D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho\beta} \quad \text{-----}(4-4)$$

또한 함수  $\phi^*$ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$M_{\lambda\rho}^* = -D_{\alpha\beta\lambda\rho} \phi^*_{,\beta\alpha} \quad , \quad Q_{\lambda}^* = -D_{\alpha\beta\lambda\rho} \phi^*_{,\beta\alpha\rho} \quad \text{-----}(4-5)$$

식 (4-3)에서 경계적분항은 식(4-4), (4-5)를 이용하면 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \{ D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho\alpha} n_{\beta} \phi^* - D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda\rho} n_{\alpha} \phi^*_{,\beta} + D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w}_{,\lambda} n_{\rho} \phi^*_{,\beta\alpha} - D_{\alpha\beta\lambda\rho} \bar{w} n_{\lambda} \phi^*_{,\beta\alpha\rho} \} d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} \{ \bar{M}_n \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \bar{V}_n \phi^* \} d\Gamma - \int_{\Gamma} \{ M_n^* \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - V_n^* \bar{w} \} d\Gamma - \sum_{k=1}^K \{ [\bar{M}_k \phi^*] - [M_k^* \bar{w}] \} : k \quad \text{--}(4-6) \end{aligned}$$

또한 식(4-6)에서  $\bar{M}_n$ ,  $\bar{M}_k$ ,  $\bar{V}_n$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{M}_n = \bar{M}_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} = -D [ \nu (\Delta \bar{w}) + (1-\nu) \{ \bar{w}_{,11} n_1^2 + 2\bar{w}_{,12} n_1 n_2 + \bar{w}_{,22} n_2^2 \} ] \quad \text{-----}(4-7)$$

$$\bar{M}_k = \bar{M}_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} = -D (1-\nu) \{ \bar{w}_{,12} (n_2^2 - n_1^2) + (\bar{w}_{,11} - \bar{w}_{,22}) n_1 n_2 \} \quad \text{-----}(4-8)$$

$$\bar{V}_n = -D \frac{\partial}{\partial n} (\Delta \bar{w}) - \frac{\partial \bar{M}_t}{\partial t} \quad \text{-----(4-9)}$$

여기서  $\frac{\partial(\quad)}{\partial t}$  접선방향의 미분을 나타낸다. 또한  $M_n^*$ ,  $M_t^*$ ,  $V_n^*$ 를 식(4-7)--식(4-9)에  $\bar{w}$ 을  $\phi^*$ 로 대치하면 얻을수 있다. 식(4-6)을 식(4-3)에 대입하면 다음과 같은 적분식을 얻을수 있다.

$$\int_{\Omega} (D_{\alpha\beta\lambda\rho} \phi_{,\lambda\rho\alpha\beta} \bar{w} + \rho h s^2 \bar{w} \phi^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \{ M_n^* \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - V_n^* \bar{w} - \bar{M}_n \frac{\partial \phi^*}{\partial n} + \bar{V}_n \phi^* \} d\Gamma + \sum_{k=1}^K [ [\bar{M}_k \phi^*] - [M_k^* \bar{w}] ]_{k+} + \int_{\Omega} \bar{P} \phi^* d\Omega \quad \text{-----(4-10)}$$

여기서  $[ ]_k$  는 경계  $\Gamma$  상에서의 모두  $k$ 개의 모서리를 갖는 판에서  $K$ 번째 모서리에서의 불연속량을 나타낸다. 즉

$$[ ]_k = [ ]_{k-} - [ ]_{k+} \quad \text{-----(4-11)}$$

적분 방정식(4-10)에서 함수  $\phi^*$ 를 다음의 미분방정식을 만족하는 함수로 선택한다.

$$D_{\alpha\beta\lambda\rho} \phi_{,\lambda\rho\alpha\beta} + \rho h s^2 \phi^* = \delta(x-y) \quad \text{-----(4-12)}$$

여기서

$$\delta(x-y) : \text{Dirac delta함수}$$

식(4-12)로부터  $\phi^*$ 는 기본해(Fundamental solution)가 됨을 알 수 있다. 식(4-12)을 만족하는 기본해  $\phi^*$ 는 다음과 같이 구할수있다.

$$\phi^* = \frac{1}{a} \left\{ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) - \frac{1}{2\pi} K_0(kr) \right\} = \frac{1}{a} \left[ \frac{i}{4} \{ J_0(kr) + iN_0(kr) \} - \frac{1}{2\pi} K_0(kr) \right] \quad (4-13)$$

여기에서  $a=2si\sqrt{\rho h D}$   $i=\sqrt{-1}$ ,  $H_0^{(1)}$ 은 0차 제1종 Hankel 함수,  $J_0$ 은 0차 제1종 Bessel함수,  $N_0$ 는 0차 제 2종 Bessel,  $K_0$ 는 0차 제 2종 변형 Bessel함수를 나타낸다. 또한  $r=|x-y|$  이고,

$$k = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left( \frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{s} \quad \text{-----(4-14)}$$

식 (4-12)을 적분 방정식(4-10)의 좌변에 대입하면

$$\int_{\Omega} (D_{\alpha\beta\lambda\rho} \phi_{,\lambda\rho\alpha\beta} + \rho h s^2 \phi^*) \bar{w} d\Omega = \int_{\Omega} \delta(x-y) \bar{w}(x;s) d\Omega = \bar{w}(y;s) \quad \bar{y} \in \Omega \quad \text{-----(4-15)}$$

식 (4-15)을 고려하면 결국 다음과 같은 적분 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \bar{w}(\bar{y};s) &= \int_{\Gamma} \{ M_n^*(x,\bar{y};s) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(x;s) - V_n^*(x,\bar{y};s) \bar{w}(x;s) \} d\Gamma(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma} \{ \bar{M}_n(x;s) \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(x,y;s) - \bar{V}_n(x;s) \phi^*(x,\bar{y};s) \} d\Gamma(x) \\ &+ \sum_{k=1}^K [ [\bar{M}_i(x;s) \phi^*(x,\bar{y};s)] - [M_i^*(x,\bar{y};s) \bar{w}(x;s)] ]_{A_k} + \int_{\Omega} \bar{P}(\bar{x};s) \phi^*(\bar{x},\bar{y};s) d\Omega(\bar{x}) \quad \text{-----(4-16)} \end{aligned}$$

영역 내부의 점  $\bar{y}$ 에 관한 적분방정식(4-16)에 대하여, 영역 내부  $\Omega$ 의 점  $\bar{y}$ 를 경계  $\Gamma$ 상의 점  $y$ 로의 극한을 고려하면, 다음과 같은 방법으로 경계적분방정식을 얻을 수 있다.<sup>7),11)</sup>

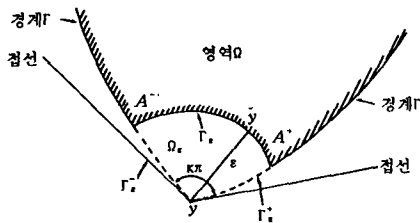


그림 1. 모서리점의 취급

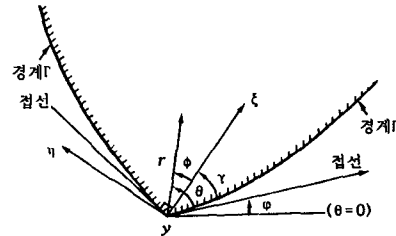


그림 2. 모서리점에서의 극소좌표계의 도입

그림 1에서 보는 것과 같이 내각  $\kappa\pi$ 의 경우를 생각해 보자.

그림에서와 같이 점  $y$ 가 모서리점에 일치하고 이점을 중심으로 미소반경  $\epsilon$ 인 원호를 그리고, 이원호경계를  $\Gamma_\epsilon$ 로하자.  $\Gamma_+$ 와  $\Gamma_-$  대신에 새로운  $\Gamma_\epsilon$ 이 생기고 모서리점  $k_+$ ,  $k_-$ 이 새로이 형성된다. 이러한 경우 적분방정식(4-16)은 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{w}(y;s) &+ \int_{\Gamma} \bar{J}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \bar{J}^* d\Gamma + \sum_{k=1}^K * [ [M_i^*(x,\bar{y};s) \bar{w}(x;s)] - [\bar{M}_i(x;s) \phi^*(x,\bar{y};s)] ]_{A_k} \\ &+ [ [M_i^*(x,\bar{y};s) \bar{w}(x;s)] - [\bar{M}_i(x;s) \phi^*(x,\bar{y};s)] ]_y \\ &= \int_{\Omega} \bar{P}(\bar{x};s) \phi^*(\bar{x},y;s) d\Omega \quad \text{-----(4-17)} \end{aligned}$$

여기에서,

$$\begin{aligned} \bar{J}^* &= V_n^*(x,y;s) \bar{w}(x;s) - M_n^*(x,y;s) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(x;s) \\ &+ \bar{M}_n(x;s) \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(x,y;s) - \bar{V}_n(x;s) \phi^*(x,y;s) \\ [\cdot]_y &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [ [\cdot]_{A_-} + [\cdot]_{A_+} ] \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^K \cdot$ 은 구석점  $y$ 을 제외한 나머지를 합한것이다. 약간의 연산을 행하고,  $\varepsilon \rightarrow 0$ 로의 극한에서는 다음과 같은 경계적분방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \kappa w(y) + \int_{\Gamma} [V_n^*(x, y; s) \bar{w}(x; s) - M_n^*(x, y; s) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(x; s) \\ & + \bar{M}_n(x; s) \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(x, y; s) - \bar{V}_n(x; s) \phi^*(x, y; s)] d\Gamma \\ & + \sum_{k=1}^K [ [\bar{M}_k^*(x, y; s) \bar{w}(x; s)] - [\bar{M}_k(x; s) \phi^*(x, y; s)] ] A_k \\ & = \int_{\Omega} \bar{P}(\bar{x}; s) \phi^*(\bar{x}, y; s) d\Omega \end{aligned} \quad \text{------(4-18)}$$

또한 식(4-18)은 경계  $\Gamma$ 상의 한 점  $y$ 에서의  $\bar{w}(y)$ 와 경계상의 모든 점  $x$ 에서의  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{M}_n$ ,  $\bar{V}_n$  와의 관계식을 나타내고 모든 변수가 경계상의 값으로 표현되었기 때문에 경계상의 미지변수를 구할 수 있게 된다. 그러나 경계상의 4가지 미지수  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{M}_n$ ,  $\bar{V}_n$  중에서 일반적으로 2가지는 경계조건으로 주어지고 나머지 2가지는 미지수가 된다. 따라서 2가지의 미지수에 대해서 식(4-18) 만으로는 전부 결정할 수가 없고 식(4-18)와 독립된 별도의 식을 필요로 하게 된다. 그러한 식을 구하기 위하여 적분방정식에 미분을 취하면 영역내의 임의의 점  $\bar{y}$ 에서의 처짐각  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$ 에 관한 다음과 같은 추가의 적분방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n_{\bar{y}}}(\bar{y}; s) &= \int_{\Gamma} [ \bar{M}_n^*(x, \bar{y}; s) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(x; s) - \bar{V}_n^*(x, \bar{y}; s) \bar{w}(x; s) ] d\Gamma(x) \\ & - \int_{\Gamma} [ \bar{M}_n(x; s) \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(x, \bar{y}; s) - \bar{V}_n(x; s) \phi^*(x, \bar{y}; s) ] d\Gamma(x) \\ & + \sum_{k=1}^K [ [\bar{M}_k(x; s) \phi^*(x, \bar{y}; s)] - [\bar{M}_k^*(x, \bar{y}; s) \bar{w}(x; s)] ] A_k \\ & + \int_{\Omega} \bar{P}(\bar{x}; s) \phi^*(\bar{x}, \bar{y}; s) d\Omega(\bar{x}) \quad (x \in \Gamma, \bar{x}, \bar{y} \in \Omega) \end{aligned} \quad \text{------(4-19)}$$

여기서

$$(\cdot) = \frac{\partial (\cdot)}{\partial n}$$

또한 적분방정식(4-19)에서 영역내부점  $\bar{y}$ 를 경계상의 점  $y$ 에 접근시키는 극한조작을 하는데 있어서  $\bar{V}_n^*$ 는  $O(\frac{1}{r^2})$ 의 특이성을 갖고있으나  $\bar{w}(x; s)$ 를  $\hat{w} = \bar{w}(x) - \bar{w}(y)$ 로 대체하므로 해서  $\bar{V}_n^*$

의 특이성을 제거할수있다. 여기에서 경계상의 모서리 점에 대하여 그림2와 같은 새로운 국소좌 표계를 도입한다. 결국 처짐각  $-\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$  에 대한 경계적분방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} & \kappa_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial n_t}(y;s) + \kappa_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial n_n}(y;s) + \int_{\Gamma} [ \bar{V}_n^*(x,y;s) \hat{w}(x;s) \\ & - \bar{M}_n^*(x,y;s) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(x;s) + \bar{M}_n(x;s) \frac{\partial \hat{\phi}^*}{\partial n}(x,y;s) d\Gamma - \bar{V}_n(x;s) \hat{\phi}^*(x,y;s) ] d\Gamma(x) \\ & + \sum_{k=1}^K * [ (\bar{w}(A_k) - \bar{w}(y)) [ \bar{M}_t^*(A_k,y;s) ] - [ \bar{M}_t(A_k;s) \hat{\phi}^*(A_k,y;s) ] ] A_k \\ & = \int_{\Omega} \bar{P}(\hat{x};s) \hat{\phi}^*(\hat{x},y;s) d\Omega(\hat{x}) \quad \text{-----(4-20)} \end{aligned}$$

여기에서

$$\kappa_0 = -\kappa - \frac{\nu}{2\pi} \{ \sin 2\gamma + \sin 2(\kappa\pi - \gamma) \}, \quad \kappa_n = -\frac{\nu}{2\pi} \{ \cos 2\gamma - \cos 2(\kappa\pi - \gamma) \}$$

$$\kappa_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial n_t}(y;s) + \kappa_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial n_n}(y;s) = -\kappa \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(y;s)$$

마지막으로, 이상의 처짐  $\bar{w}$ 와 처짐각  $-\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$  에 관한 경계적분방정식(4-18), (4-20)로부터 경계 상의 모든 미지수를 결정할 수 있게 된다. 또한 결정된 경계상의 값들을 식(4-16)에 대입하므로 해서 영역내의 임의의 점  $\hat{y}$ 에서의  $\bar{w}(\hat{y})$ 를 구할 수 있게된다.

## 5. 고 찰

지금까지 평판의 진동문제에 대한 해를 구하기 위하여 지배미분방정식에 파플라스 변환을 적용한 상공간에서의 기본관계식에 가중잔차법을 적용하였고 기존논문<sup>9)</sup>에서는 기하학적으로 매끈한 경계상들의 점을 고려하여 영역내부의 점  $\hat{y}$ 의 적분방정식에 대하여 경계  $\Gamma$ 상의 점  $y$ 로의 극한을 취한 처짐에 대한 경계적분방정식을 적용하였을시, 식(5-1) 와 (5-2)와 같이 정상계수 및 모서리점에 대한 항들이 각각 1/2 와 불연속량이 전부 0이 되었다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{w}(y;s) + \int_{\Gamma} [ \bar{V}_n^*(x,y;s) \bar{w}(x;s) - \bar{M}_n^*(x,y;s) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(x;s) \\ & + \bar{M}_n(x;s) \frac{\partial \hat{\phi}^*}{\partial n}(x,y;s) - \bar{V}_n(x;s) \hat{\phi}^*(x,y;s) ] d\Gamma(x) \\ & = \int_{\Omega} \bar{P}(\hat{x};s) \hat{\phi}^*(\hat{x},y;s) d\Omega(x) \quad \text{-----(5-1)} \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n_y}(y;s) + \int_{\Gamma} [ \bar{V}_n^*(x,y;s) \hat{w}(x;s) - \bar{M}_n^*(x,y;s) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(x;s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{M}_n(x;s) \frac{\partial \phi^-}{\partial n}(x,y;s) d\Gamma - \overline{V}_n(x;s) \phi^*(x,y;s) d\Gamma(x) \\
& = \int_{\Omega} \overline{P}(\bar{x};s) \phi^*(\bar{x},y;s) d\Omega(\bar{x}) \quad \text{-----(5-2)}
\end{aligned}$$

그러나, 본 논문에서는 경계상에서의 모서리점을 적용하여 불연속량을 포함하고 형상계수를 포함하는 처짐에 관한 경계적분방정식을 적용하였을시, 식(4-18)과 (4-20)에서와 같이 각각 제1항과 제3항이 추가 적용되었고, 이러한 제시된 경계적분방정식을 이용하여 정확하고 다양한 판의 강제 진동문제를 해석할 수 있도록 하였다.

## 6. 결론

본 논문에서는 평판의 진동문제에 대한 해를 구하기 위하여 지배미분방정식에 라플라스 변환을 적용한 상공간에서의 기본관계식에 가중잔차법을 적용하였고, 기하학적으로 경계상들의 점을 고려하여 영역내부의 점  $\bar{y}$ 의 적분방정식에 대하여 경계  $\Gamma$ 상의 점  $y$ 로의 극한을 취한 처짐에 대한 경계적분방정식을 적용할때, 경계상에서의 모서리점을 적용하여 불연속량과 형상계수를 포함하는 처짐에 관한 경계적분방정식을 유도하였다. 앞으로의 연구는 앞에서 제시된 경계적분방정식을 적용하여 다양한 판의 강제진동문제를 해석하고 또한, 기존의 해석에와 비교할것이다.

## 참고 문헌

1. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C., *Boundary element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
2. Stern, M., "A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plates and Shells," *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.15, 1979, pp.769-782.
3. Tottenham, H., "The Boundary Element Method for Plates and Shells," *Developments in Boundary Element Methods-1*, Applied Science Publishers, 1979, pp.173-205.
4. Irschik, H., "A Boundary Integral Equation Method for Bending Orthotropic Plates," *Int. J. of Solids and Structures*, 20, 1984, pp.245-255.
5. Kamiya, N., and Sawaki, I., "Finite Deflection of Plates," *Topics in Boundary Element Research-1*, Springer-Verlag, 1984, pp.204-224.
6. Costa, J.A., and Brebbia, C.A., "Elastic Buckling of Plates Using the Boundary Element Method," *Boundary Element VII*, Springer-Verlag, 1985, pp.4-29.
7. Stern, M., and Lin, T.L., "Thin Elastic Plates in Bending," *Developments in Boundary Element Methods-4*, 1986, pp.91-119.
8. Beskos, D.E., "Dynamic Analysis of Plates," Springer-Verlag, Berlin, 1991, PP.35-92.
9. 서 일교, 권택진, "박판의 동적 힘 문제에 대한 경계적분방정식 정식화," *대한건축학회 논문집*, 제12권, 제1호, 1982, pp.303-308.
10. Soedel, W., *Vibration of Shells and Plates*, Marcel Dekker Inc., 1981.
11. 田中正隆, 田中喜久照, *境界要素法 基礎와應用*, 丸善株式會社, 1982, PP.117-121.