

구조물 전달 함수의 구성 조건 관계식에 관한 연구
Compatibility Relationship of Transfer Function Parameters of Structures

채 장범
아주대학교 기계공학과

Abstract

The measured vibration on a machine or a structure is shaped by the excitation waveform and the path transfer function. Mechanism diagnostics tends to focus on retrieving source features by minimizing the effects of the structural path, while in structural diagnostics we are more interested in minimizing source effects and retrieving path parameters. In structural diagnostics, therefore, there are experimental issues of gathering data that are independent source effects and finding a transfer function signature that reveals structural defects. This paper describes how the transfer function can be obtained more accurately by experiment using the compatibility relationship which is newly discovered.

1. 서론

구조물에서의 결함, 예를 들어 부식, 피로, 파괴 그리고 생산 공정중의 잘못된 조립등은 흔히 발생하며 그 결함은 겉으로 잘 드러나지 않아 발견하기 힘든 경우가 많다. 이에 엑스레이, 초음파 그리고 응력 해석등 많은 방법들이 연구 되어져 왔고 그들은 나름대로 구조물 결함을 찾는데 장단점을 갖고 있다. 최근 수십년간 진동을 이용하여 물체의 성질을 알아보자는 여러가지 시도가 있어 왔다. 이런 방법들중의 하나가 구조물의 고유 진동수를 측정하여 이의 변화를 살피는 것이었다. 한 예로 구조물내에서 금(crack)이 생기면 이의 변화는 구조물 전체 질량에 주는 영향보다는 구조물의 강도(stiffness)에 더 많은 변화를 야기시키게 되고 강도의 변화는 금의 위치에도 관계가 있기 때문이다. 하지만 고유 진동수는 강인하여 그 위치가 잘 변하지 않아 눈에 띄 만한 변화를 염두했을 때는 이미 구조물이 큰 결함을 갖은 후가 된다.⁽¹⁾

구조물의 고유 진동수는 구조물이 결함이 생겨도 잘 변하지 않는 반면에 진동 모드 형상(mode shape)은 많은 영향을 받는다. 그러므로 모드 해석법이 구조물 진단의 한 방법으로 많이 시도되어 왔다.^(2,3) 그러나 모드 형상을 결정하기란 매우 복잡하고 많은 장비와 시간을 요하게 된다. 주로 모드 형상은 실험실에서나 얻어지기 때문에 이를 실제 작업장에서의 응용한다는 것은 그리 용이하지 않다.

구조물에서 두 점간의 전달함수는 구조물의 고유 진동수와 모드 형상 모두에 연관되어 있다. 그러므로 전달함수는 복잡한 모드 형상을 구하는 것보다는 간편하게 구조물을 해석할 수 있다는 가능성을 내포한다. 특히 전달함수의 제로 위치는 모드 형상의 변화에 민감하고 그 변화의 폭도 크므로 구조물 변화를 찾는데 더 좋은 자료가 될 수 있다. 그러므로 전달 함수를 사용하여서 구조물의 결함을 찾고자 하는 노력이 최근에 시작되었다.

그러나, 측정된 전달 함수를 이용하여 구조물의 결함을 알아내는 데는 여러 가지 어려움이 있다. 첫째로 구조물의 전달 함수는 재질의 상태, 구조물의 형상, 치수 그리고 연결부의 상태등에 따라 변하기 때문에 근본적으로 똑 같을 수 없다. 그러므로 구조물의 제작 과정에서 똑같이 잘 만들어진 구조물 사이에도 전달 함수가 서로 다를 수 있다. 둘째로 구조물의 전달 함수의 변화는 측정에서의 오차에서 기인할 수도 있다. 그래서 만일 그 변화가 측정에서 발생했다면 측정 오차를 없애도록 노력하여야 할 것이고, 만일 그 변화가 구조물의 변화에서 기인했다면 우리는 그 변화의 폭은 똑같이 잘 만들어진 구조물이 나타내는 전달 함수의 변화 범위에 분류 시켜야 한다.

전달 함수는 복소 진동수 평면(Complex frequency plane)에 풀(pole)과 제로(zero)로 표시될 수 있다. 전달 함수의 풀은 Rayleigh의 원리(Rayleigh's principle)에 의해 어떤 구

조적 변화에 상당히 안정적이어서 그 위치가 잘 변하지 않는다는 것은 알려진 사실이다. 다시 말해 구조물의 전달 함수에서 폴의 위치는 상당히 정확히 측정이 될 수 있지만 구조의 변화에 폴의 위치가 잘 변하지 않는다. 그러므로 구조변화에 대하여 폴의 위치는 별로 정보를 주지 못한다. 반면에 전달 함수의 제로의 위치는 구조물의 변화에 상당히 민감하여 구조물의 상태에 상당히 많은 정보를 제공한다. 그러나 제로의 위치는 정확하게 측정하기가 상당히 어렵다. 여기서는 구조물의 전달 함수를 더욱 정확하게 측정하기 위하여 전달 함수의 폴과 제로의 관계를 살피고 특히 제로의 정확한 위치 측정에 중점을 두어 논의 한다. 그리고 두 개 이상의 구조물이 연결될 때 발생하는 이른바 "유령 주파수"(ghost frequencies)를 피하기 위한 구조물 전달 함수 매개 변수 일치 관계를 예제와 함께 논의한다.

2. 전달 함수

전달 함수를 표현하는 방법은 여러 가지로 특히 구조물의 모드 형상과 고유 진동수로 표시하면 다음과 같다.⁽⁴⁾

$$TF = C \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\psi_k(x_s)\psi_k(x_o)}{\omega_k^2 - \omega^2 - \omega_k \omega \eta} \quad (1)$$

TF : 전달 함수

C : 상수

ω_k : k-번째 고유 진동수

ψ_k : k-번째 모드 형상 함수

η : 손실 계수

x_s : 외력이 가해지는 곳

x_o : 응답이 측정되는 곳

N : 포함된 모드의 개수

식 (1)은 다항식의 비로 다시 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$TF = C \cdot \frac{(\omega - z_1)(\omega - z_2)(\omega - z_3) \cdots (\omega - z_N)(\omega - z_o)}{(\omega - p_1)(\omega - p_1^*)(\omega - p_2)(\omega - p_2^*) \cdots (\omega - p_N)(\omega - p_N^*)} \quad (2)$$

z_k : k-번째 제로

p_k : k-번째 폴

\cdot : 콜레 복소수

식 (1)과 (2)에서 모드 형상 함수가 전달 함수의 제로를 결정하는데 주 역할을 할 수 있고 모드 형상이 구조물 진단에 중요한 변수이므로 제로 또한 구조물 진단에 중요하다는 것을 쉽게 알 수 있다. 전달 함수의 폴과 제로 위치에 대한 연구가 최근에 잘 이루어졌다.^(5,6)

Fig. 1에 전달 함수의 폴과 제로 거동에 대하여 표시하였다. 총 제로의 수는 총 폴의 수와 같다. 폴은 손실 계수 (loss factor)에 의하여 정해진 거리 만큼 실수 주파수 측과 떨어져 있는 폴 라인(pole line)을 따라 위치한다. 만일

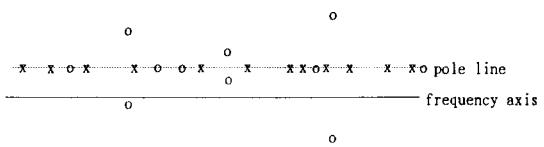


Fig. 1 복소 평면의 폴과 제로의 분포

가진점과 응답 측정 점이 일치하면 폴 라인에서 폴과 제로가 서로 교차하여 존재하게 된다. 그러나, 가진점과 응답점이 다르면 제로는 재빨리 움직여 약 반의 제로는 폴 라인을 이탈하여 폴 라인 상하에 균등하게 분포하고 나머지 반은 폴 라인에 남으나 위치는 재배치된다.

다음 절에서는 전달 함수의 성질이 불연속계(discrete system)와 연속계(continuous system)에서 비교 논의된다.

2.1 불연속계와 연속계

먼저 Fig. 2에 보여진 3 자유도계를 살핀다. 운동 방정식은 다음의 행렬 형태로 표시될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

f_1 을 제외한 다른 모든 힘이 "0"이고 f_1 이 크기 F_1 을 갖는 싸인 함수일 때, 식 (3)은 다음의 특성 방정식을 준다.

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - \omega^2 m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

식 (4)를 다시 조합하면 전달 함수의 표현을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1}{F_1} \\ \frac{x_2}{F_1} \\ \frac{x_3}{F_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - \omega^2 m_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix}$$

γ : cofactor

M : eigen matrix

D : determinant of eigen matrix

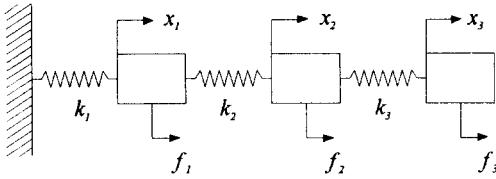


Fig. 2 3-자유도계 시스템

식 (5)로부터, $\frac{X_1}{F_1} = \frac{\gamma_{11}}{D}$, $\frac{X_2}{F_1} = \frac{\gamma_{21}}{D}$ 그리고 $\frac{X_3}{F_1} = \frac{\gamma_{31}}{D}$ 이다.

같은 방법으로 다른 전달 함수는 $\frac{X_i}{F_j} = \frac{\gamma_{ij}}{D}$ 으로 표시 될 수 있다.

수 있는데 여기서, $i,j=1,2,3$ 이다. 그러므로, 전달 함수는 eigen matrix의 cofactor 와 determinant의 비로 표시될 수 있다. 여기서 determinant 다항식(특성 방정식)의 근이 풀(공진 주파수)이고 cofactor 다항식의 근이 제로이다.

불연속계에서는 풀의 수가 유한하고 determinant 다항식의 차수가 cofactor 다항식의 차수보다 1 만큼 많기 때문에 풀의 수가 제로의 수보다 하나가 더 많다. 만일 연속계를 불연속계로 모델링 한다면 물론 연속계의 특성을 잃어버리게 될 것이다. 이렇게 하여 잃어버리게 된 부분은 전달 함수를 표현할 때 나머지(remainder) 항으로 표시될 수 있다. 그러면 특정 주파수 영역에서 전달 함수는 다음과 같이 다시 쓰여질 수 있다.

$$H_{ij} = \frac{\gamma_{ji}}{D} + \text{remainder} \quad (6)$$

여기서 H_{ij} 는 i 점에 단위 힘이 가해졌을 때 j 의 점에서의 응답 관계를 나타내주는 전달 함수이다. 나머지 항이 불연속계의 전달 함수(식 (6)의 첫 번째 항)에 비해서 크다면 전달 함수의 풀과 제로는 동수가 되고 불연속계의 전달 함수의 cofactor 다항식의 근은 더 이상 전달 함수의 제로가 아니다. 그러나, 나머지 항의 크기가 감소함에 따라 비록 풀과 제로의 수는 같더라도 나머지 항이 제로의 위치에 미치는 영향은 적어져서 전달 함수의 제로 중 하나가 최고 고유 진동수보다 높은 주파수 영역에 존재하고 다른 제로들은 불연속계의 제로와 거의 동일한 위치에 놓이게 된다. 그러므로, 만일 연속계가 충분한 자유도를 갖는 불연속계로 모델링 된다면 불연속계의 모델은 연속계와 실제적으로 큰 차이가 없다. 특히 관심이 있는 주파수 영역이 불연속계의 최고 주파수보다 한참 아래에 국한되었을 때는 더욱 그렇다.

2.2 전달 함수의 구성 조건 관계식(Compatibility Relation)

이제 두 개의 구조물 "a" 와 "b" 가 Fig. 3 에서와 같이 한 점에서 단단하게 연결되었을 때의 전달 함수를 고려한다. 조립된 구조물의 전달 함수 H_{14} 는 각각 구조물의 전달 함수인 H_{12} , H_{34} , H_{22} 와 H_{33} 로 유도될 수 있다.⁽⁴⁾ 전과

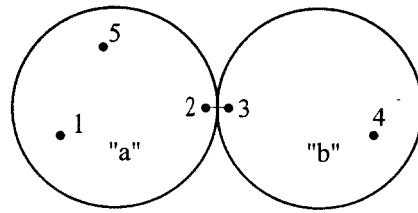


Fig. 3 두 구조물 "a" 와 "b" 한 점에서 연결된 모양

같이 각 전달 함수는 다항식의 비로 표시될 수 있기 때문에 두 개의 구조물간의 조립된 구조물의 전달 함수는 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} H_{14} &= \frac{H_{12} \cdot H_{34}}{H_{22} + H_{33}} \\ &= \frac{\frac{\gamma_{12}}{D_a} \cdot \frac{\gamma_{34}}{D_b}}{\frac{\gamma_{22}}{D_a} + \frac{\gamma_{33}}{D_b}} \\ &= \frac{\gamma_{12} \cdot \gamma_{34}}{\gamma_{22} D_b + \gamma_{33} D_a} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 D_a : 구조물 "a" 의 determinant 다항식

D_b : 구조물 "b" 의 determinant 다항식

γ_{ij} : cofactor 다항식

식 (7) 으로부터, 조립된 구조물의 특성 방정식은 $\gamma_{22}D_b + \gamma_{33}D_a$ 이 된다. 특성 방정식의 근이 바로 조립된 구조물의 고유 진동수가 된다.

이제 구조물 "b" 와 구조물 "a" 가 점 2 와 점 3에서 연결되었을 때 점 1과 점 5 사이의 조립된 구조물의 전달 함수 H_{15}' 를 구해 보자. 먼저 조립된 구조물 "a" 의 점 5에서의 응답 X_5' 는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$X_5' = H_{15}F_1 + H_{25}F_{2c} \quad (8)$$

여기서 H_{15} 와 H_{25} 는 정해진 두 점간의 전달 함수이고 F_1 은 점 1에서의 외력, 그리고 F_{2c} 는 구조물이 연결되어졌을 때의 점 2에 가해지는 접촉 힘이다. 그런데 접촉 힘 F_{2c} 로 인하여 연결 구조물 점 2의 응답은 변하여 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X_2' &= X_2 + X_{2c} \\ &= H_{12}F_1 + H_{22}F_{2c} \end{aligned} \quad (9)$$

접촉 힘의 반작용으로 연결된 구조물 "b" 의 점 3에서의 응답 X_3' 은 다음과 식으로 표시된다.

$$X_3' = H_{33}F_{3c} \quad (10)$$

여기서 구조물 "a" 의 점 2 와 구조물 "b" 의 점 3은 서로 연결되어 있으므로 응답은 서로 같고 걸리는 힘은 서로 방향이 반대가 된다. 즉 $X_2' = X_3'$ 그리고 $F_{2c} = -F_{3c}$ 가 된다. 이의 관계를 식 (9) 와 (10) 에 대입하면 F_{2c} 의 관계를 얻을 수 있다.

$$F_{2c} = -\frac{H_{12}}{H_{22} + H_{33}} F_1 \quad (11)$$

위 식을 다시 식 (8)에 대입하고 F_1 으로 나눠주면 연결된 구조물의 점 1과 5 사이의 전달 함수 H_{15}' 을 다음과 같이 얻게 된다.

$$H_{15}' = H_{15} - \frac{H_{12} \cdot H_{25}}{H_{22} + H_{33}} \quad (12)$$

식 (12)와 식 (7)은 같이 연결된 구조물의 전달 함수를 나타내 주는 것이므로 특성 방정식, 즉 식 (12)의 분모와 식 (7)의 분모가 같을 것으로 기대되며 또한 같아야 한다. 그러나 식 (12)의 다항식을 다시 쓰면,

$$H_{15}' = \frac{\gamma_{15}(\gamma_{22}D_b + \gamma_{33}D_a) - \gamma_{12}\gamma_{25}D_b}{D_a(\gamma_{22}D_b + \gamma_{33}D_a)} \quad (13)$$

식 (13)의 분모에 있는 D_a 항은 없어져야만 전달 함수의 특성 방정식이 서로 같아져 같은 고유 진동수를 갖게 된다. 그러나, D_a 항이 수치적 오차나 그 밖의 이유로 제거되지 않을 때, 이른바 "유령 주파수" 성분이 나타나게 된다. 식 (13)로부터, cofactor 다항식과 determinant 다항식 사이에 또 다른 어떤 관계가 존재함이 분명하다고 추측할 수 있다.

임의의 square 행렬 M에 대해서 다음의 관계가 성립한다. (이 결과는 새로운 것으로 많은 행렬에 관한 책을 살펴보았지만 찾을 수 없었다.)

$$\gamma_y \cdot \gamma_{jn} - \gamma_j \cdot \gamma_{in} = Q_{mj} D_M \quad (14)$$

여기서 $D_M = \det(M)$

$\gamma_y = \text{cof}_y(M)$

$Q_{mj} = \det(M \text{ excluding row } i \text{ and } j, \text{ column } j \text{ and } n)$

$i=1, j=2$ 그리고 $n=5$ 일 때 필요한 결과를 얻는다.

$$\gamma_{12} \cdot \gamma_{25} - \gamma_{22} \cdot \gamma_{15} = Q_{32} D_a \quad (15)$$

행렬의 관계를 나타내는 식 (15)을 식 (13)에 대입하면, 유령 주파수 항을 제거할 수 있다. 마침내 전달 함수는 다음 식으로 표시된다.

$$H_{15}' = \frac{\gamma_{15}\gamma_{33}D_a - Q_{32}D_b}{\gamma_{22}D_b + \gamma_{33}D_a} \quad (16)$$

식 (14)은 유령 주파수 성분을 없애기 위해 만족되어야 할 관계이다. 식 (14)을 전달 함수 형태로 다시 쓰면,

$$H_y \cdot H_{jn} - H_j \cdot H_{in} = \frac{Q_{mj}}{D} \quad (17)$$

식 (17)이 전달 함수 측정에 있어 길잡이가 될 전달 함수 사이에 존재하는 구성 조건 관계식이다.

3 예제

구성 조건 관계식이 성립하는지를 임의로 만들어진 전달 함수에 대하여 검토하였다. 전달 함수는 다음과 같이

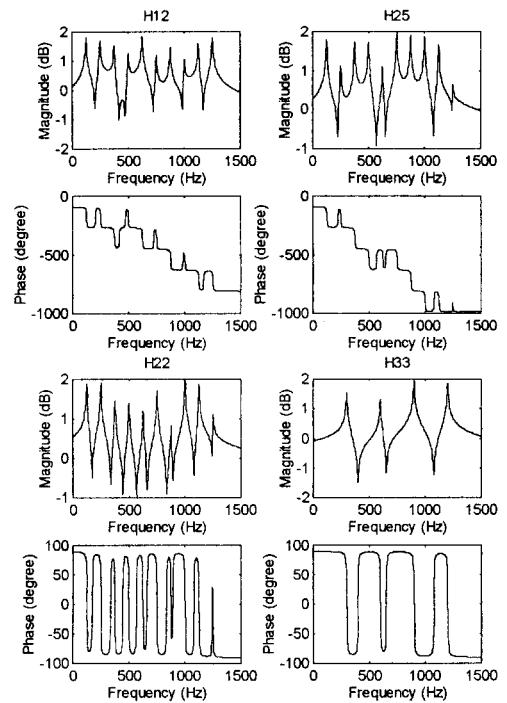


Fig. 4 임의로 구한 구조물 "a" 와 "b" 의 전달 함수들

임의로 만들 수 있다. 먼저 고유 진동수를 임의의 주파수 영역에서 결정한다. 여기서는 1500 Hz 까지의 영역에 관심을 두고 구조물 "a"는 10 개의 고유 진동수가 등간격으로 고르게 분포하게 그리고 구조물 "b"는 4 개의 고유 진동수가 고르게 분포된 구조물을 가정한다. Fig. 4에 임의로 만들어진 전달 함수 H_{12} , H_{25} , H_{22} 그리고 H_{33} 이 표시되었다. 그럼에서 보다시피 구조물 "a"의 전달 함수 H_{12} , H_{25} , 그리고 H_{22} 는 10 개의 고유 진동수를 갖고 있음을 알 수 있다. 그리고 고유 진동수의 위치 또한 같은 구조물 이므로 세 전달 함수에서 같다. 특히 H_{22} 의 경우에는 가진 점과 응답 점이 일치하여 풀과 제로가 서로 풀 라인에 교차하여 존재하고 있음을 보여준다. H_{33} 에서 구조물 "b"는 4 개의 고유 진동수가 있음을 알 수 있다. 만일 Fig. 3에서 구조물 "a"의 전달 함수 H_{12} , H_{25} , H_{22} 그리고 구조물 "b"의 전달 함수 H_{33} 를 정확히 알고 있다면 점 1과 점 5 사이의 전달 함수 H_{15}' , 그리고 두 구조물이 연결된 후의 전달 함수 H_{15}'' 는 구성 조건 관계식 (14)과 식 (16)를 사용하여 구할 수 있다. 이렇게 만들어진 H_{15}' 와 두 구조물이 연결된 후의 전달 함수 H_{15}'' 이 Fig. 6에 나타내졌다. H_{15}' 에서 보면 연결 구조물의 고유 진동수는 14 개로 두 구조물의 고유 진동수의 합이 된다. 그러나 H_{15}' 가 잘못 구해졌을 때 (Fig. 5의 wrong H_{15}'), 연결 전달 함수를 구하는 관계식 (13)으로 H_{15}' 을 구해보면 Fig. 5의 wrong H_{15}' 으로 연결 구조물의 고유 진동수의 갯 수가 총 17 개로 두 구조물의 각각의 고유

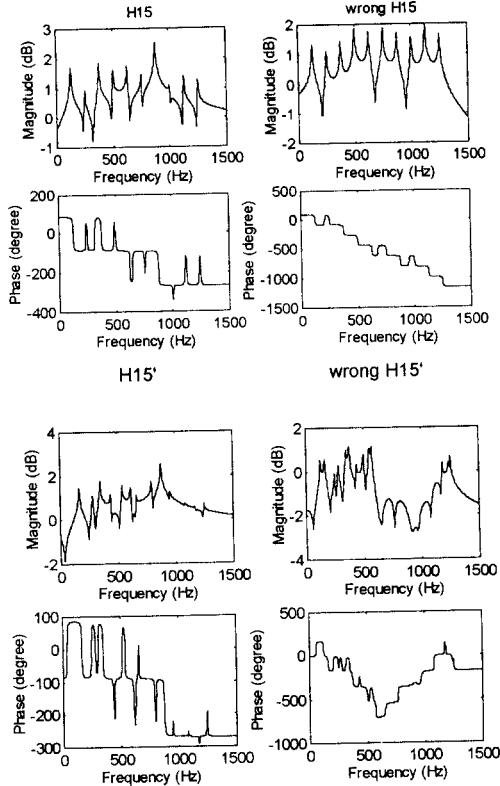


Fig. 5 연결된 구조물의 전달 함수의 합성

진동수의 합 14 개를 넘고 있다. 즉 유령 주파수가 존재함을 알 수 있다.

4 결론

이 논문에서는 전달 함수의 제로의 중요성이 논의 되었고 불연속계를 바탕으로 전달 함수를 좀 더 정확하게 구하기 위한 전달 함수의 구성 조건 관계식이 유도되었다. 구성 조건 관계식은 전달 함수를 측정하는데 좋은 지침이 될 뿐 아니라 특히 제로의 위치가 중요한 경우에는 더욱 그 관계성이 제로의 위치에 대한 정보를 많이 제공한다. 뿐만 아니라 연결 구조물의 구성 조건 관계식은 두 구조물이 서로 연결된 후의 전달 함수를 구함에 있어, 연결 전의 구조물 각각의 전달 함수를 사용할 때 발생하는 유령 주파수를 제거시켜 주는 중요한 역할도 한다. 이러한 구조물 전달 함수 매개변수의 구성 조건 관계는 임의로 만들어진 전달 함수를 통하여 검토되었다. 이 경우에 있어서 구성 조건 관계식은 전달 함수를 예측하였고 또한 유령 주파수도 없애 주었다.

참고 문헌

- Vandiver, J. K., "Structural Evaluation of Fixed Offshore Platforms", PhD thesis, MIT/WHOI Program, January 1975
- Man, X. C., McClure, L., Wang, Z., Finch, R. D., Robin, P., and Jansen, B., "Slot Depth Resolution in Vibration Monitoring of Beams using Frequency Shifts", J. Acoust. Soc. Am., vol 95, (4) April 1994, pp2029-2037
- Richardson, M. H., "Using Modal Parameters for On-Line Structural Failure Detection", Proc. Korea-US Vibration Engineering Seminar, March 22-24, 1993, pp41-57
- Richard H. Lyon, Machinery Noise and Diagnostics, Butterworth, Cambridge, 1987.
- M. Tohyama, R. Lyon, T. Koike, "Reverberant Phase in a Room and Zeros in the Complex Frequency Plane", J. Acoust. Soc. Am., 89, No. 4, pp 1701-1707, April 1991.
- Jangbom Chai, Richard H. Lyon, Jeffrey H. Lang, "Non-Invasive Diagnostics of Motor-Operated Valves", Proc. of American Control Conf., pp2006-2012, Baltimore, 1994.