

안내질량을 갖는 탄성지지된 외팔보의 진동 특성

(Vibration Characteristics of a Cantilevered Beam with a Guided Mass and an Elastic Spring Supports)

류봉조;
(대전산업대학교)

이규섭,
(국방과학연구소)

이종원
(대전산업대학교 대학원)

ABSTRACT

The paper describes the vibration characteristics of the mechanical system consisting of a uniform cantilevered Timoshenko beam with a guided mass and an elastic spring supports. The free end of the beam does not rotate and the spring attached to the guided mass is elastically restrained against translation. The effect of magnitudes, rotary inertia and the size of the guided mass on the vibration characteristics is fully investigated by the numerical simulation using FEM and experiment. In order to verify the eigenvalue sensitivity for considered system, comparison exact solutions with FEM are conducted, and a good agreement between two solutions is also highlighted.

1. 서론

안내질량(guided mass)을 갖는 탄성지지된 보의 진동에 관한 연구는 wind tunnel 시험이나 파이프계(pipe systems)를 설계하는 설계 기술자들에게 많은 관심의 대상이 되어져 왔다. 이는 실제 wind tunnel 시험이나 파이프계의 설계를 위해, 계의 고유진동수와 고유모우드들에 대한 정확한 예측과 유용한 결과들이 이들에게 필요하기 때문이다.^[1,2] 또한, 이러한 계의 진동문제에 관심을 갖는 것은 실제로, 안내되는 질량을 갖고 탄성지지된 보 모델의 고유진동수와 일치하는 외부의 가진력이 있을 때, 공진현상이 유발되고 큰 진폭이 일어남으로 인하여 계가 커다란 손상을 입을 수 있기 때문이다. 따라서 계가 갖고 있는 고유 특성들(고유진동수, 고유모우드 등)에 대한 정확한 정보가 필요하다.

1978년 Rutenberg^[3]는 어떤 한 점에 고정되어 있는 회전 스프링을 갖는 외팔보의 진동 특성에 관한 연구를 하였고, Chun^[4]은 한단이 스프링-현지되고 타단이 자유인 가는 보의 자유진동 문제를 다루었다. Lau^[5]는 스프링 지지된 균일 Euler-Bernoulli 외팔보에 대한 고유진동수와 고유모우드를 구하였는데, 그는 처음 5개 모우드(first-five-modes)에 대한 고유진동수를 스프링 상수의 크기와 위치변화에 따라 구하였다. Bruch와 Mitchell^[6]은 집중질량을 갖는 Timoshenko 외팔보 모델의 진동에 관한 예를 보였고, C.N. Bapat과 C. Bapat^[7]은 복수의 병진스프링과 회전스프링을 갖는 보 모델에 대해, 처음 1차부터 5차까지의 고유진동수를 전달행렬방법(transfer matrix method)을 이용하여 구하였다. 그후 Lee와 Kc^[8]는 양단

이 회전 및 병진 스프링지지된 테이퍼진 보(tapered beam)의 자유진동문제를 새롭게 개발한 recurrence formula를 이용하여 해석하였다. 최근 Rossi 와 Laura^[9]는 세가지 경계조건(양단한지, 한단고정 타단한지, 양단고정)을 갖는 탄성지지된 Timoshenko보 모델에 대해, 1차부터 4차까지의 고유진동수를 업밀해법(exact solution method)으로 구하였고, Maurizi와 Belles^[10]는 한단이 고정되고 타단이 미끄럼(sliding) 경계조건을 갖는 보의 진동문제를 다루었다. 그러나, 그들은 안내질량의 위치를 미끄럼단에 고정시켰고, 질량의 크기만을 고려한 연구를 하였다.

위의 연구들의 대부분은 보의 전단변형과 회전관성을 고려하지 않은 비교적 간단한 보 모델에 대한 연구들이었으며, 특히 집중질량의 크기 만을 고려한 경우였다.

본 연구에서는 wind tunnel 시험조건이나 뱕브가 부착된 파이프계를, 안내질량 갖는 탄성지지된 한단고정-타단미끄럼 보 구조로 모델화하여, 안내질량의 크기 및 회전관성, 스프링의 위치 및 강성변화에 따른 진동특성을 유한요소법을 통하여 해석하고, 수치해의 타당성 검토를 위해 Ref.[10]의 업밀해와 실제 실험과의 비교를 하였다.

2. 문제의 기술

안내질량 M에 의해 안내되고, 병진 스프링에 의해 탄성지지된 한단고정 타단 미끄럼의 경계조건을 갖는 보의 수학적 모델은 Fig.1에 나타난 바와 같다.

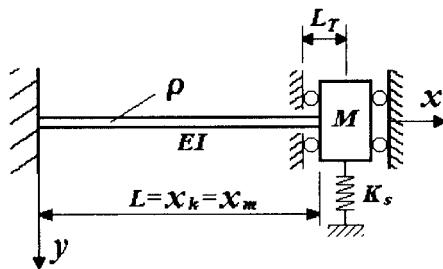


Fig.1 Mathematical model of a beam with guided mass and an elastic supports.

Fig.1에서 질량 M 은 단순한 질점이 아닌 유한한 크기를 갖는 강체로 간주되어, 질량 M 의 크기, 회전관성 J , 무게 중심까지의 거리 L_T 가 고려되며, 보의 고정단으로부터 임의의 위치 x_m 에 놓일 수도 있다. 또한 K_s 는 스프링상수의 크기, L 은 보의 길이를 나타내며, x 와 y 는 각각 보의 축 방향좌표와 횡방향 변위를 나타낸다.

Fig.1 모델에 대한 지배방정식을 얻기 위해 에너지 표현식을 사용하여 계의 운동에너지와 탄성 포텐셜에너지를 나타내면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A \dot{y}^2 + \rho I \dot{\phi}^2) dx + \frac{1}{2} M(\ddot{y} + L_T \ddot{\phi})^2 \Big|_{x=x_m} \\ + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2(x, t) \Big|_{x=x_m} \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L (EI \phi'^2 + kAG(y - \phi)^2) dx + \frac{1}{2} K_s y^2(x_k, t) \quad (2)$$

식(1)-(2)에서, EI 는 보의 굽힘강성계수, k 는 전단계수, A 는 단면적, G 는 전단 탄성계수, ϕ 는 굽힘 기울기를 나타내며, x_k 와 x_m 은 각각 스프링의 위치 및 안내질량 M 의 위치를 나타낸다. 또한 ‘·’과 ‘·’는 각각 x 와 시간 t 에 대한 미분을 나타낸다.

3. 유한요소법의 적용

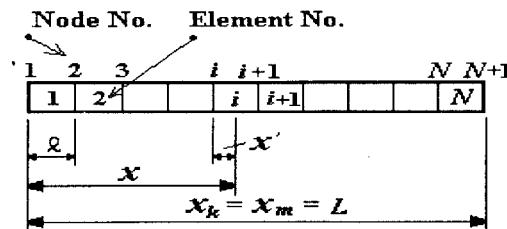


Fig.2 Finite element model.

식(1)-(2)의 에너지 표현식으로부터 계의 진동 특성을 나타내는 고유치를 구하기 위해, Fig.2와 같이 보를 유한길이 l 인 N 개의 요소로 분할한다.

계산상의 편리를 위해 다음과 같은 국부좌표와 무차원화된 변수들을 도입한다.

$$x' = x - (i-1)l, \quad x_m = x_m - (a-1)l, \quad x_k = x_k - (b-1)l$$

$$\eta = \frac{x'}{l}, \quad \xi = \frac{x'}{l}, \quad \xi_m = \frac{x_m}{l}, \quad \xi_k = \frac{x_k}{l} \quad (3)$$

$$\Omega^2 = \frac{\rho A l^4 \omega^2}{EI}, \quad R = \frac{I}{Al^2}, \quad S = \frac{kAGl^2}{EI}, \quad \frac{L_T}{L} = L_T^*$$

$$M^* = \frac{M}{\rho Al}, \quad J^* = \frac{J}{\rho Al^3}, \quad K_s^* = \frac{K_s l^3}{EI}, \quad \mu_m = \frac{x_m}{l} \quad (4)$$

식(4)에서 Ω 는 무차원화된 진동수 파라미터, R 과 S 는 각각 보의 회전관성 및 전단변형 파라미터, M^* 과 J^* 는 각각 안내질량과 보의 질량비 및 안내질량 회전관성 파라미터를 나타낸다. 또한, K_s^* 와 L_T^* 는 각각 무차원화된 스프링 상수와 안내질량의 무게중심 거리를 나타낸다.

식(3)-(4)의 관계를 이용하여 N 개의 요소에 대해 조합하면 다음과 같은 고유치 방정식이 되며, 고유진동수와 모우드 형상은 이 고유치 방정식을 푸는 것에 의해 얻어진다.

$$([K] - \Omega^2 [M]) \{U\} = \{0\} \quad (5)$$

4. 수치해석 결과 및 검토

Table 1. F.E.M. and exact solutions for the first three natural frequency parameters Ω , ($K^* = 10^3$).

M^*	Exact (Ref.[10])	F.E.M. (Present)	Error(%)
0.0	21.3878	21.3878	0.0
	53.1235	53.1240	0.0009
	91.5135	91.5165	0.0033
0.5	21.1025	21.1025	0.0
	39.0641	39.0642	0.0003
	66.4822	66.4830	0.0012
1.0	20.6497	20.6496	0.0005
	31.1785	31.1785	0.0
	63.9130	63.9137	0.0011
2.0	18.9516	18.9516	0.0
	25.2610	25.2610	0.0
	62.7365	62.7373	0.0013
4.0	14.9696	14.9696	0.0
	23.1874	23.1874	0.0
	62.1893	62.1910	0.0013
6.0	12.5226	12.5226	0.0
	22.7675	22.8212	0.2
	62.0137	62.0144	0.0011
8.0	10.9577	10.9577	0.0
	22.6805	22.6804	0.0004
	61.9271	61.9279	0.08
10.0	9.8573	9.8574	0.0010
	22.6066	22.6066	0.0
	61.8757	61.8761	0.07

안내질량을 갖고 탄성지지된 보의 진동특성에 대한 수치해를 얻기위해 보 요소를 20개로 나누었으며, 해의 정밀도를 검증하기위해 $K_s^* = 10^3$ 인 경우 안내질량 크기만을 고려한 Ref.[10]의 염밀해 결과와 비교하여 Table 1에 나타내었다. Table 1에서 알 수 있듯이, 본 연구의 유한요소해석 결과와 Ref.[10]의 염밀해 결과는 안내질량의 크기에 관계없이 0.2% 이내의 좋은 일치를 보여준다.

Fig.3(a), (b), (c)와 Fig.4(a), (b), (c)는 각각 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 경우에 있어서, 안내질량의 크기변화와 스프링 상수의 변화에 따른 처음 3개(1차 ~3차)의 고유진동수 변화를 나타낸다. 일반적으로 잘 알려진 사실이듯이, 이를 그림들로부터 알 수 있는 것은 스프링 상수의 증가에 따라 또한 안내질량의 크기가 감소함에 따라 고유진동수들이 증가된다는 것이다. 한편, $R = 10^{-2}$ 의 Timoshenko보의 경우가 $R = 0.0$ 의 Euler-Bernoulli보의 경우에 비해 동일 스프링 상수, 동일 안내질량의 크기에 있어서 고유진동수는 작음을 알 수 있다.

Fig.5에서 Fig.8은 K_s^* 가 0.0, 10^2 , 10^3 , 10^7 인 경우에 대해, 안내질량의 크기변화와 위치변화에 따른 1차 고유진동수의 변화를 나타낸다. Fig.5의 스프링 상수가 $K_s^* = 0.0$ 인 경우, 안내질량의 위치 μ_m 이 보의 고정단으로부터 미끄럼단으로 이동될수록 안내질량의 크기에 관계없이 1차 고유진동수는 감소됨을 알 수 있다.

Fig.6은 스프링 상수 $K_s^* = 10^2$ 인 경우로서, 안내질량이 없는 경우나 안내질량의 크기가 $M^* \leq 1.0$ 일때, 안내질량이 보의 고정단에서 0.8부근까지 이동될수록 고유진동수는 증가된다. 그러나, $\mu_m = 0.8$ 부근부터 $\mu_m = 1.0$ 까지는 감소된다. 또한, 안내질량의 크기 M^* 가 $2.0 \leq M^* \leq 4.0$ 일때는 μ_m 의 크기가 증가될수록 고유진동수는 증가되나, $6.0 \leq M^* \leq 10.0$ 에서는 μ_m 의 크기가 증가될수록 고유진동수는 감소된다.

Fig.7과 Fig.8의 $K_s^* = 10^3$ 과 $K_s^* = 10^7$ 의 경우, 안내질량의 위치 μ_m 이 $\mu_m \leq 0.8$ 에서는 μ_m 이 증가 할 수록 안내질량의 크기에 관계없이 고유진동수는 증가하나 $\mu_m > 0.8$ 에서는 감소된다. Fig.8에서 더 특징적인 하나는 동일 안내질량의 위치에 대해 안내질량 크기증가에도 불구하고 고유진동수는 변화가 없는 것으로, 이는 $K_s^* = 10^7$ 이상에서는 스프링 강성이 너무 커서 미끄럼 경계조건이 고정단의 경계조건과 같게되기 때문인 것이다.

Fig.9와 Fig.10은 안내질량의 크기 M^* 만을 고려한 경우와 크기 및 회전관성, 크기, 회전관성 및 무게중심간의 거리를 모두 고려한 세가지 경우에 있어서, 안내질량의 위치변화에 따른 1차 고유진동수 변화를 나타낸 그림이다.

Fig.9는 안내질량의 크기 $M^* = 1.0$, Fig.10은 $M^* = 10.0$

으로서, 동일 안내질량 위치와 동일 스프링 상수값에 대해서 M^* 만을 고려한 경우가 고유진동수가 가장 크고 $M^* > M^*, f^* > M^*, f^*, L_T^*$ 순으로 작아진다. 따라서 안내질량이 단순한 질점이 아닌 유한한 크기의 강체로 간주되는 경우는 M^*, f^*, L_T^* 파라미터의 고려가 중요하다.

5. 실험

한단이 고정되고 타단이 안내질량에 의해 유도되는 탄성지지된 보의 진동 특성에 관한 실험적 검증을 위해 다음과 같은 실험장치를 구성하였고, 실험상의 편의를 위해 안내질량만을 갖는 장치로 제작하였으며 이에 대한 장치 개략도는 Fig.11에 나타난 바와 같다. 고정단의 경계조건은 보울트로 견고하게 고정시켜 만들었으며, 특히 미끄럼의 경계조건을 주기위해 선형 베어링(linear bearing)을 사용하여 베어링 내에서 안내질량이 미끄러질 수 있도록 제작하였다. 또한, 안내질량은 원통형으로 만들었으며, 이 안내질량과 보의 끝단은 용접하여 연결시켰다.

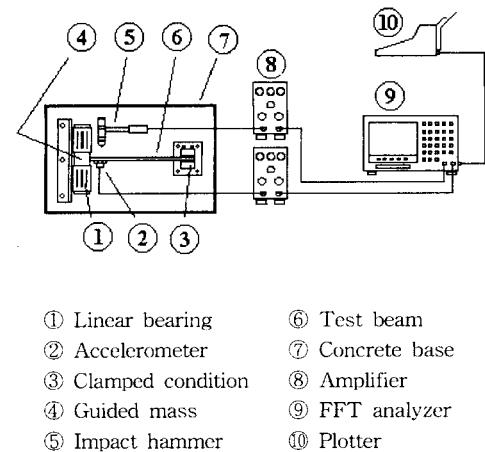


Fig.11 Experimental set-up.

시험보와 안내질량에 대한 제원은 각각 Table 2와 Table 3에나타난 바와 같다.

Table 2. Details of the test beam.

Materials	Steel
Density ρ (kg/m^3)	7.86×10^3
Length L (mm)	300 & 400
Width b (mm)	19
Thickness h (mm)	6
Bending stiffness EI ($\text{N} \cdot \text{m}^2$)	64.98

Table 3. Details of the guided mass.

Materials	Steel
Density ρ (kg/m ³)	7.86×10^3
Length L (mm)	200
Diameter d (mm)	40
Mass moment of inertia J (kg · m ²)	6.78×10^{-3}

실험방법으로는 충격햄머(impact hammer)를 사용하여 햄머로부터의 입력과 가속도계(accelerometer)에서의 출력을 이용한 주파수 응답함수(frequency response function)로 부터 고유진동수를 얻었고, 주파수 응답함수를 통하여, 처음 1차부터 4차까지의 각 모우드별 고유진동수를 구하였다.

보의 길이 L=0.3m와 L=0.4m인 경우에 대해 실험으로부터 얻은 고유진동수와 F.E.M. 수치결과와의 비교를 Table 4에 나타내었다.

Table 4. Comparison F.E.M. with experiment for the first four natural frequencies.

Modes	Beam Length	L=0.3(m)	L=0.4(m)
1st	F.E.M	18.76 (Hz)	12.10 (hz)
	Exp.	18.50 (Hz)	12.25 (Hz)
	Error	1.39 (%)	1.24 (%)
2nd	F.E.M	339.83 (Hz)	192.07 (Hz)
	Exp.	332.50 (Hz)	183.75 (Hz)
	Error	2.16 (%)	4.33 (%)
3rd	F.E.M	926.92 (Hz)	523.56 (Hz)
	Exp.	912.50 (Hz)	507.50 (Hz)
	Error	1.56 (%)	3.07 (%)
4th	F.E.M	1804.70 (Hz)	1020.78 (Hz)
	Exp.	1770.00 (Hz)	995.00 (Hz)
	Error	1.92 (%)	2.53 (%)

6. 결론

- 수치해와 실험을 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.
- 동일 스프링 상수, 동일 안내질량의 크기에서 고유진동수는 Euler-Bernoulli 보의 경우가 Timoshenko 보의 경우에 비해 크다.
- 스프링 상수 K_s^* 가 $K_s^* < 10^2$ 에서는 안내질량의 위치가 보의 고정단으로부터 미끄럼단으로 이동될수록 각각의 안내질량의 크기에 관계없이 1차 고유진동수는 감소한다.
- 스프링 상수 K_s^* 가 $10^3 \leq K_s^* < 10^7$ 에서, 안내질량의 위치 $\mu_m \leq 0.8$ 일때는 μ_m 이 증가할수록 각각의 안내질량의 크기에 관계없이 1차 고유진동수는 증가하나 $\mu_m > 0.8$ 에서는 감소된다. 그러나, $K_s^* \geq 10^7$ 에서는 동일 안내질량 위치에 대해 안내질량의 크기에 관계없이 1차 고유진동수는 변화가 없다.

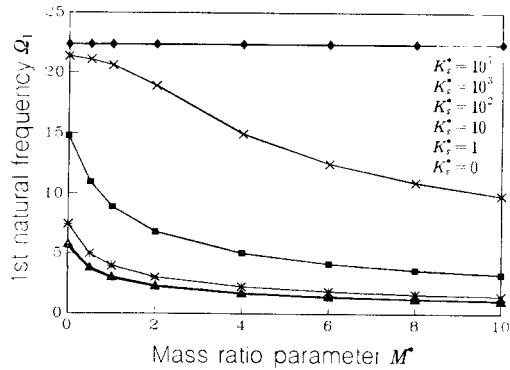
- 본 연구의 유한요소 수치해는 Ref.[10]의 업밀해와 아주 근사한 일치를 보이며, 실험치와의 비교에서도 근사함을 나타내었다.

후기

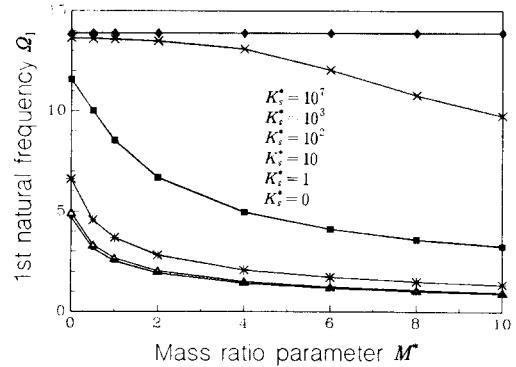
본연구는 대전산업대학교 학술연구비에 의해 수행된 연구의 부분결과이며, 이에 감사드린다.

References

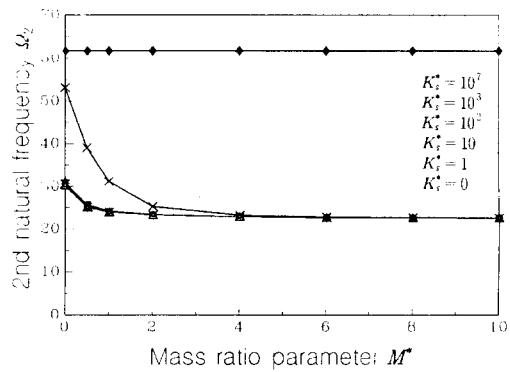
- [1] T.C. Huang, "The Effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.28, No.4, 1961, pp.579-584.
- [2] S.H. Milton, "Vibration Frequencies for a Uniform Beam with Central Mass and Elastic Supports", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.31, No.3, 1964, pp.556-558.
- [3] A. Rutenberg, "Vibration Frequencies for a Uniform Cantilever With a Rotational Constraint at a Point", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.45, 1978, pp.422-423.
- [4] K.R. Chun, "Free Vibration of a Beam with One End Spring-Hinged and the Other Free", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.39, No.4, 1972, pp.1154-1155.
- [5] J.H. Lau, "Vibration Frequencies and Mode Shapes for a Constrained Cantilever", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.51, 1984, pp.182-187.
- [6] J.C. Bruch and T.P. Mitchell, "Vibrations of a Mass-Loaded Clamped-Free Timoshenko Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol.114, 1987, pp.341-345.
- [7] C.N. Bapat and C.Bapat, "Natural Frequencies of a Beam Non-Classical Boundary Conditions and Concentrated Masses", Journal of Sound and Vibration, Vol.112, No.1, 1987, pp.177-182.
- [8] S.Y. Lee and K.Y. Ke, "Free Vibrations of a Non-Uniform Beam with General Elastically Restrained Boundary Conditions", Journal of Sound and Vibration, Vol.136, No.3, 1990, pp.425-437.
- [9] R.E. Rossi, P.A.A. Laura, D.R. Avalos and H. Larrendo, "Free Vibrationns of Timoshenko Beams Carrying Elastically Mounted Concentrated Masses", Journal of Sound and Vibration, Vol.165, No.2, 1993, pp.209-223.
- [10] M.J. Maurizi and P. Belles, "Vibrations of a Beam Clamped at One End and Carrying a Guided Mass with an Elastic Supports at the Other", Journal of Sound and Vibration, Vol.129, No.2, 1989, pp.345-349.



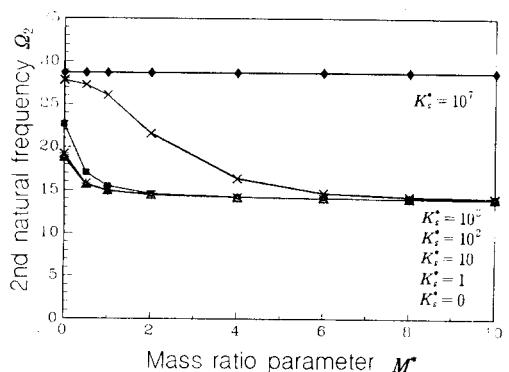
(a)



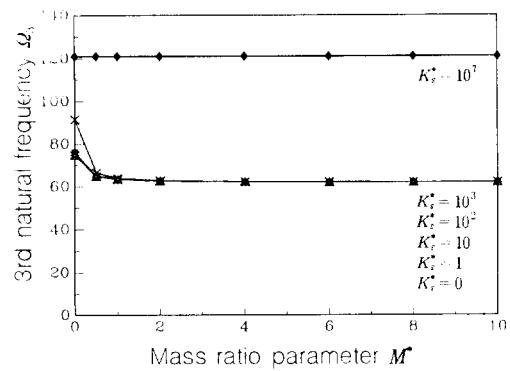
(a)



(b)

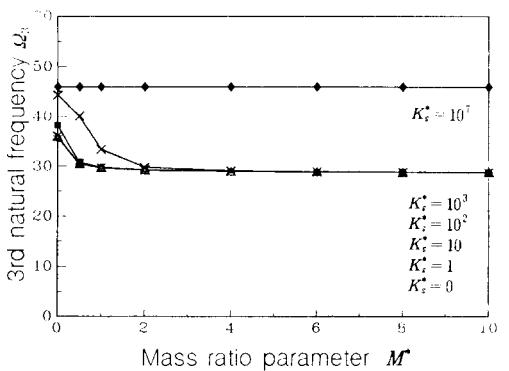


(b)



(c)

Fig.3 First three natural frequencies depending on the guided mass and spring constant ($R=0.0$).



(c)

Fig.4 First three natural frequencies depending on the guided mass and spring constant ($R=10^{-2}$).

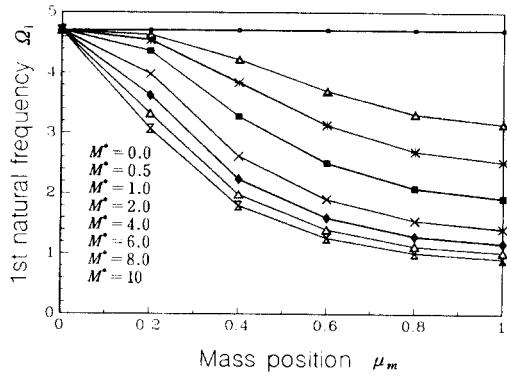


Fig.5 First natural frequencies depending on the guided mass position and magnitude ($K_s^* = 0.0$).

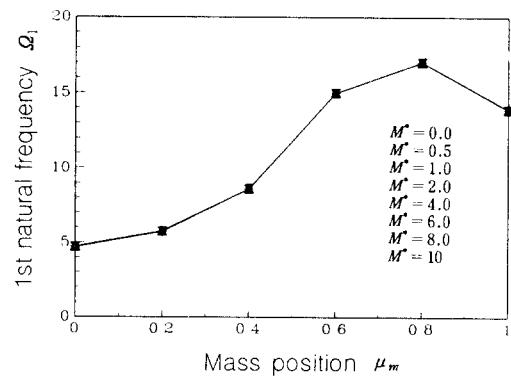


Fig.8 First natural frequencies depending on the guided mass position and magnitude ($K_s^* = 10^7$).

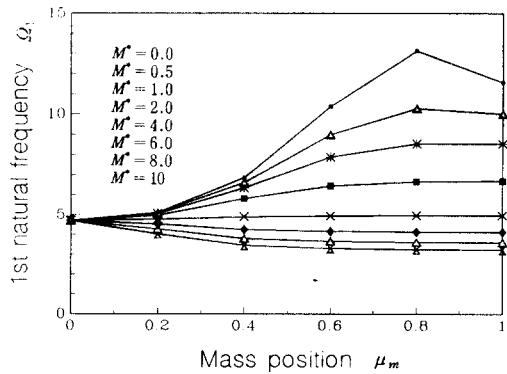


Fig.6 First natural frequencies depending on the guided mass position and magnitude ($K_s^* = 10^2$).

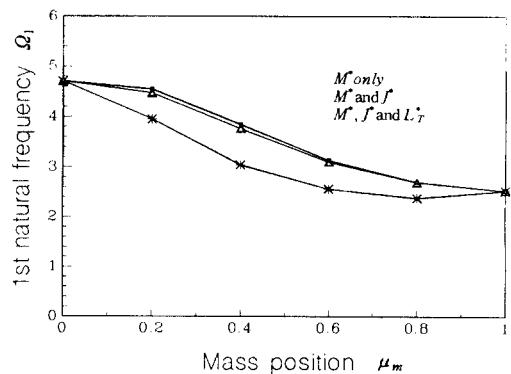


Fig.9 First natural frequencies depending on the magnitude M^* , rotary inertia J^* and the length L_T^* ($M^* = 1.0$).

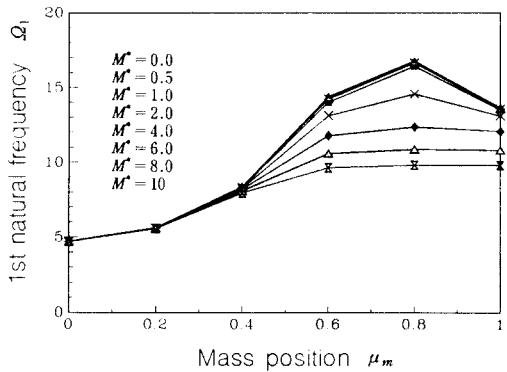


Fig.7 First natural frequencies depending on the guided mass position and magnitude ($K_s^* = 10^3$).

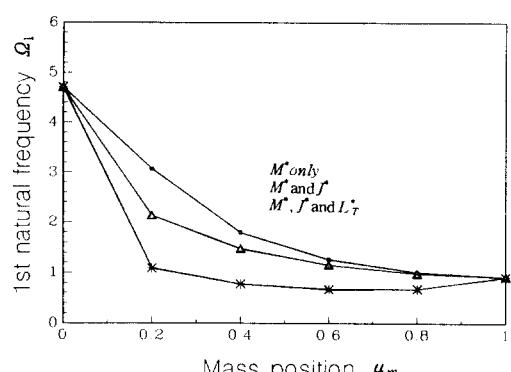


Fig.10 First natural frequencies depending on the magnitude M^* , rotary inertia J^* and the length L_T^* ($M^* = 10.0$).