

상계요소법에 의한 T형 단조 해석

(An Analysis of T-Shaped Forging by Upper-Bound Element Technique)

배 원 병,* 김 영 호,* 박 재 우,** 곽 태 수**

* 부산대학교 정밀정형 및 금형가공 연구소

** 부산대학교 대학원

ABSTRACT

A new velocity formulation technique, which contains the advantage of UBET and the shape function of FEM, is proposed.

In the proposed technique, a shape function is used to improve the unreasonableness of elemental partition and to solve the difficulty of velocity-field determination.

In order to verify the effectiveness of this technique, T-shaped forging processes are simulated. The results are compared with those obtained by experimental measurements in T-shaped forging. In T-shaped forging, good agreements between theory and experiment are also confirmed.

Key word: shape function(형상함수), T-shaped forging(T형단조), Velocity-field(속도장), FEM
(유한요소법), UBET(상계요소법)

I. 서론

소성가공문제에 있어서 소재의 가공에 필요한 하중 또는 변형영역의 용력, 변형률속도 분포 등 재료내부의 국부적 정보와 가공 후 재료의 변형양상을 예측하기 위한 여러 가지 근사해를 구하는 방법들이 연구되어 왔다. 이러한 방법으로는 슬래브법, 에너지법, 상계법, 미끄럼 선장법, 유한요소법, 상계요소법 등을 들 수 있다.

그 중에서도 해의 정확성면에서 뛰어난 유한요소법과 계산 시간이 짧으면서 비교적 정확한 해를 얻을 수 있는 상계요소법이 최근 각광 받고 있다.

특히, 유한요소법은 방대한 계산량에도 불구하고 컴퓨터의 급속한 발달로 강력한 방법으로 인식하고 있으며, 계산에서 얻은 해도 실제와 거의 일치하여 정해로 생각하고 있다. 그러나 유한요소법은 형상이 복잡한 3차원 해석의 경우는 아직도 상당한 문제점을 가지고 있고, 방대한 계산량 때문에 대형 컴퓨터가 필요한 단점이 있다.

이에 비해 상계요소법은 변형영역을 몇 개의 요소로 나누고^[1-3] 각 요소의 속도장을 구성하여 일률을 최소화하는 방법으로 가공하중을 구한다. 그러므로 유한요소법에 비해

프로그램 구성이 간단하고 계산량이 적어 빠른 시간 내에 해를 구하는 장점을 가지고 있다.

그러나 상계요소법은 사람에 따라 속도장이 다를 수 있고, 속도장을 어떻게 잡느냐에 따라 해의 정확도에 차이가 나게 된다. 뿐만 아니라 속도장 유도에도 수학적 어려움이 따를 수 있으며 복잡한 형상에 대해서는 속도장 구성이 매우 어렵다. 또한 해석하고자 하는 형상이 곡면을 포함하는 경우는 단순화하여 직각삼각형이나 직사각형으로 변형역을 구성하여 동적가용 속도장을 유도해야 한다. 이러한 단순화 때문에 실제 공정과는 심한 차이를 보이는 경우도 있었다. 특히 속도장 구성의 어려움 때문에 상계요소법을 이용한 범용 프로그램의 개발은 매우 어려웠다.

최근에는 유동함수를 이용함으로써 동적가용 속도장을 쉽게 유도할 수 있는 방법이 제시^[4-5]되었다. 유동함수는 체적일정조건을 자연적으로 만족하는 장점을 가지고 있으나 2차원에서만 정의되기 때문에 유동함수 상계법을 이용하게 되면 3차원 형상의 소성가공 문제 해석은 불가능하였다. 따라서 복잡한 형상의 단조공정의 상계해석을 위해서 3차원 형상 문제도 해석이 가능하며 손쉽고 유연성 있는 속도장의 구성이 필요하다.

본 연구에서는 유한요소법에서 사용하는 8절점 요소의 형상함수와 상계요소법을 융용하여 각 절점의 속도성분을 직접 프로그램의 최적화 변수로 두어 단조공정을 해석하였다. 최적화를 위해서는 비선형, 구속조건이 있는 경우의 탐색 프로그램인 FTM (Flexible Tolerance Method)^[6]을 사용하였다.

II. 이론 해석

2.1 동적가용 속도장

본 연구에서 이용한 8절점 4각요소에서 각 절점의 좌표와 속도는 2.2절의 보간함수를 이용하여 다음과 같이 다항식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^8 \phi_i r_i & z &= \sum_{i=1}^8 \phi_i z_i \\ u &= \sum_{i=1}^8 \phi_i u_i & v &= \sum_{i=1}^8 \phi_i v_i \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 ϕ_i 는 형상함수이며 i 는 절점번호, r_i, z_i 는 각 절점에서 r, z 방향의 좌표, u_i, v_i 는 각 절점에서 r, z 방향 속도를 나타낸다.

속도 성분으로부터 변형율속도 성분을 구하면,

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{i=1}^8 \phi_i u_i \right) \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{i=1}^8 \phi_i v_i \right) \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{V_r}{r} = \frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^8 \phi_i u_i \right) \\ \dot{\epsilon}_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{i=1}^8 \phi_i u_i \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{i=1}^8 \phi_i v_i \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 형상함수 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_8$ 은 자연좌표 성분 ξ, η 의 함수이다.

연쇄 법칙에 따라

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 하첨자 α 는 절점 번호($1, 2, \dots, 8$)를 의미한다. 따라서

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} r_i & \frac{\partial r}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} r_i \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} z_i & \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} z_i \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 형상함수

유한요소법에서 유용하게 사용되고 있는 형상함수는 요소의 실제 거동을 표현할 수 있는 정도에 따라 형상함수를 이용하는 해석법의 정확도를 결정하게 된다. 따라서 실제의 경우와 가깝게 근사적으로 표현하는 함수를 찾아야 한다.

형상함수는 크게 두 가지로 나눌 수 있는데, 하나는 요소의 기하학적 형상을 정의해 주는 형상함수 또는 좌표전환에서 사용하는 형상함수이며, 다른 하나는 영역변수의 근사식을 정의하는 형상함수이다.

두 가지 모두에 대해 형상함수의 형태는 변수 φ 를 좌표값 또는 물리적인 영역 변수라고 할 때 보간함수로서

$$\varphi = \sum_{n=1}^N N_n \varphi_n \quad (5)$$

의 형태로 표현한다. 여기서 m, n 은 보간함수를 이루고 있는 절점의 수를 나타낸다.

식 (5)는 변수의 절점값들의 보간으로서 변수의 변화를 정의하는 것을 의미한다. 형상함수는 변수가 좌표값이든 또는 어떤 물리량이든 관계없이 임의의 변수와 그 변수의 절점값 사이의 관계를 정의해 주는 함수의 집합이다. Fig. 1 은 본 해석에서 사용한 8절점 사각요소이며, 이와 관련된 형상함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1) & \phi_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ \phi_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) & \phi_4 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \\ \phi_5 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) & \phi_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ \phi_7 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1) & \phi_8 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \end{aligned} \quad (6)$$

2.3 상계치

상계 이론은 한계하중이론(Limit Load Theorem)의 하나로 강소성 재료의 경우에 대해 Prager와 Hodge^[7]에 의해 정립되었다. 완전 강소성체의 변형에 관한 모든 동적 가용 속도장 중에서 실제공정에 필요한 에너지 소비율은 다음에 주어진 J^* 값을 최소화하는 것이다.

$$J^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_r^* \dot{\epsilon}_r^*} dv + \int_{S_r} |\Delta V^*| ds + \int_{S_r} T_r v_r^* ds_r \quad (7)$$

여기서, J^* 은 실제 공정에서 필요한 에너지 소비율의 상계이며 * 표는 동적가용 속도장에서 얻은 값을 나타낸다.

요소내의 내부 변형 에너지 소비율 \bar{W}_i 는 각 요소의 속도장을 이용하여 유효변형률 속도를 구하고, 유효응력과 유효변형률 속도와의 관계에 의해 다음 식으로 주어진다.

$$\bar{W}_i = \int_v \bar{\sigma}_i \bar{\epsilon}_i dv \quad (8)$$

여기서,

$\bar{\sigma}_i$ 는 유효응력(Effective Stress)이며

$\bar{\epsilon}_i$ 는 유효변형률 속도(Effective Strain Rate)이다.

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[-\frac{\dot{\epsilon}_r^2}{2} + \frac{\dot{\epsilon}_\theta^2 + \dot{\epsilon}_z^2}{2} + \dot{\epsilon}_{rz}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta z}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta r}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

마찰 에너지 소비율(\bar{W}_f)는 다이와 소재 사이에서의 마찰손실에 의한 에너지 소비율을 나타내며 아래 식과 같다.

$$\bar{W}_f = m \frac{\bar{\sigma}_i}{\sqrt{3}} \int_{S_r} |\Delta V|_r ds_r \quad (10)$$

여기서, $|\Delta V|_r$ 는 마찰경계면에서의 속도 불연속량이고, m 은 다이와 소재사이 마찰상수이다.

요소와 요소사이의 경계에서의 전단변형 에너지 소비율은 아래식과 같다.

$$\bar{W}_s = \frac{\bar{\sigma}_i}{\sqrt{3}} \int_S |\Delta V|_s ds_s \quad (11)$$

여기서, $|\Delta V|_s$ 는 전단경계면에서의 속도 불연속량이다.

본 연구에서는 요소와 요소 사이에서 수직속도 일정조건은 자연히 만족하고 있으므로 속도 불연속에 의한 내부 전단에너지는 생기지 않는다. 따라서 총에너지에는 요소 내부의 변형에너지, 다이와 소재사이의 마찰에 의한 마찰에너지의 합이 된다. 따라서 (4)식으로 부터 각 절점의 r, z 방향의 속도를 미지수로 두어 에너지를 최적화 하는 상계식을 유도할 수 있다.

즉,

$$\bar{W}_T = \bar{W}_i + \bar{W}_f \quad (12)$$

2.4 해석방법

재료는 등방성, 비압축성이며, Von Mises항복조건을 따르는 것으로 하였다. 또한 재료는 체적일정조건을 만족하

며, 금형은 완전 강체로 보았고, 온도 영향은 무시하였다. 마찰조건은 다음과 같이 표현하였다.

$$\tau = mK, \quad 0 < m < 1 \quad (13)$$

$$(\tau = \sigma_0 / \sqrt{3}, \sigma_0 \text{는 유동응력})$$

여기서, m : 마찰상수

K : 순수전단 항복응력

위의 가정에 따라 본 연구에서는 Gauss 적분법을 이용하여 에너지 소비율을 계산하였다. 여기서 제시한 동적가용 속도장은 체적일정조건을 만족하고 있지 않으므로 최적화 과정에서 만족시켜 주었다. 즉, 분할된 요소로 들어오는 유동량을 (+)로, 나가는 유동량을 (-)로 두어 정량적으로 각각 구하였다. 각 유동량을 모두 더하면 영이 되도록 최적화 프로그램의 등호 구속조건에 넣어 주었다.

또한 미지속도를 가지는 절점의 각 방향 속도를 최적화 프로그램의 준독립 변수로 두었다. 즉, 축대칭 변형의 경우 중심축 위에 절점이 있을 때는 r 방향 속도는 없고 다만과 접하는 절점에서는 z 방향의 속도는 다이속도와 같아진다. 또 컨테이너, 다이, 펀치 등으로 구속되어 있는 부분은 r 또는 z 방향 속도 가운데 한 곳은 결정된다. 따라서 나머지 미지 속도가 최적화 변수로 되는 것이다. 여기서 에너지를 최소화하는데 사용한 최적화 기법은 FTM(Flexible Tolerance Method)을 사용하였다.

T형 단조의 해석을 위한 요소분할은 Fig. 2에 잘 나타나 있다. 변형이 끝날때까지 요소의 수는 3개로 하여 해석 하였고, 절점 번호순서는 Fig. 2와 같이 하였다. 상부다이2가 아래로 진행함에 따라 요소가 변형하게 되는데, Fig. 2의 (a), (b), (c)는 요소가 변형과정에서 지나게 되는 하부다이의 곡면이 끝나는 아래쪽 원주면과 오른쪽 원주면을 기준으로 3가지 형태로 나눈 것을 보여준다. 따라서 소재가 원주면을 지났는지의 여부에 따라 각각의 형태를 적용하여 해석하였다. Fig. 3은 이론 해석을 위한 순서도(Flow Chart)이다.

III. 실험

T형 단조가공의 이론해석 결과를 검토하기 위하여 플라스틱으로 단조실험을 하였다.

실험장치는 Fig. 4에 있는 것과 같은 Load Cell이 25ton인 M.T.S(Material Test System)를 사용하였다. T형 단조를 위한 다이의 재료는 S45C를 사용하였고, 하부다이는 실험후 시편을 빼기 쉽도록 180° 분할형, 상부다이는 일체형으로 제작되었다. 다이의 실물은 Fig. 5와 같다.

시편을 제작할 때는 소재내의 기포를 제거하기 위해 손으로 충분히 반죽하였고 소재의 유동을 잘 볼 수 있도록 흰색 플라스티신과 검은색 플라스티신을 교대로 적층하였다. 또 충사이에 틈이 생기지 않도록 적층 후 오븐속에서 가열하여 프레스로 약간 눌러 주었다. T형 단조에서 사용된 시편은 원통 형상이고, 치수는 Fig. 6 과 같다. 시편의 재료는 모델재료로 자주 사용되는 Harbutt's Plasticine사의 플라스티신이고, 그 화학적 성분은 Table. 1과 같다. 플라스티신의 압축실험에서 얻은 응력과 변형률 관계는 다음과 같다.^[8]

$$\bar{\sigma} = 0.17797 \bar{\epsilon}^{0.0822} \text{ (MPa)} \quad (14)$$

실험에서 사용된 탈크 파우더의 마찰상수는 기존의 실험 결과^[8]로부터 0.4정도이다. 시편의 크기는 높이 108mm, 직경 70mm로 하였다.

T형 단조 실험시 시편을 일정온도(17°C)로 유지하기 위해 시편과 다이를 오븐속에서 하루정도 보관하여 사용하였으며, 실험 시작 2시간 전부터 항온항습기를 가동시켜 실내온도를 역시 17°C로 일정하게 유지하였다.

프레스의 상부다이 속도는 1 mm/s로 하였고, 윤활제로는 탈크파우더(Talc Powder, m=0.4)를 사용하였다. 하중과 다이행정 곡선은 M.T.S를 제어하는 PC에서 얻은 데이터를 이용하여 CAD로 그렸다.

IV. 결과 및 고찰

본 연구의 타당성을 검증하기 위하여 T형 단조에 대해 시뮬레이션 결과를 비교 검토하였다. T형 단조의 해석 결과는 모델재료인 플라스티신으로 실험하여 하중과 소재내의 유동을 비교하였다. 각각에 대하여 비교 검토한 결과는 다음과 같다.

Fig. 7(a)는 T형 단조의 이론해석 결과이고 (b)는 그에 대비되는 플라스티신 실험 결과의 시편 사진이다. Fig. 7(a)의 두번째 그림은 Fig. 2(a)의 요소분할법에 따라 해석된 것으로 그 유동양상과 단면 변화를 보여주고 있다. 그리고 Fig. 7(a)의 세번째와 네번째 그림은 Fig. 2(c)의 요소분할법에 의해 해석된 것이다.

시편 사진을 유심히 살펴보면 다이 접촉면 부근과 아래 부분에 데드메탈 영역이 뚜렷이 보이는데 비해 해석결과에서는 보이지 않고 있다. 또한 실험 결과 사진에서는 시편 아래 부분에 풀딩이 생기고 있지만, 해석 결과(Fig. 7(a))에서는 찾아 볼수가 없다. 풀딩이 해석결과에 나타나

지 않는 것은 요소의 개수를 3개로 하였기 때문에 요소수가 적어 소재의 형상변화를 표현하는 유연성이 부족한데 원인이 있는 것으로 생각된다. 하지만 소재의 변형 단면의 모양은 해석결과와 아주 잘 일치하고 있다. Fig. 8은 하중과 행정선도를 나타내고 있다. 전체적으로 하중선도의 경향은 실험과 잘 일치하고 있다. 그러나 최종행정 부근에서 실험결과와 차이를 보이고 있다. 이것은 소재의 변형이 심해짐에 따라 가공경화에 의한 하중 증가가 일어나는데 반해 해석에서는 가공경화를 고려하지 않았기 때문인 것으로 생각된다.

V. 결론

본 연구에서 제안한 범용성을 띤 속도장으로 T형 단조를 해석하였고, 이론 해석한 결과를 모델재료 실험결과와 비교하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 동적가용 속도장 유도에 따르는 수학적 어려움을 겪지 않고, 범용성을 띤 속도장으로 단조 문제에 적용하여 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다.
- 2) 곡면형상을 가지는 다이라도 8절점 요소구성의 장점 때문에 곡면 다이형상 그대로 요소분할이 가능하여 기존의 상계요소법과 같은 불필요한 단순화 없이 해석할 수 있었다.
- 3) 요소의 개수를 최소화하여 유한요소법에 비해 빠른 시간 안에 계산할 수 있었다.
- 4) 구속 다변수 최적화 프로그램을 본 프로그램에 맞게 수정을 더한다면 최적화 변수가 많아지는 단점이 있는 3차원 문제의 해석도 할 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. H.Kudo, "Some Analytical and Experimental Studies of Axisymmetric Cold Forging and Extrusion- I", Int.J.Mech.Sci., Vol.2, pp.102-127, 1960
2. H.Kudo, "Some Analytical and Experimental Studies of Axisymmetric Cold Forging and Extrusion- II", Int.J.Mech.Sci., Vol.3, pp.91-117, 1961
3. H.Kudo, B.Avitzur, T.Yoshikai,"Cold Forging of Hollow Cylindrical Components Having an Intermediate Flange-UBET Analysis and Experiment ", Annals of the CIRP, Vol.29, No.1, pp.129-133, 1980

4. P.C.T. Chen and F.F. Ling, "Upper-Bound Solutions to Axisymmetric Extrusion Problems", Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 863-879, 1968
5. V. Nagpal, "General Kinematically Admissible Velocity Fields for Some Axisymmetric Metal Forming Problems", J. of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B, Vol. 96, No. 4, pp. 1197-1201, 1974
6. D. M. Himmelblau, Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill Book Company, U.S.A., 1972
7. W. Proger, P. G. Hodge, Theory of Perfectly Plastic Solids, Chapman and Hall, London, 1951
8. 이종현, "정밀 성형 부품의 단조 공정 설계를 위한 Computer Simulation 및 MMT에 관한 연구", 1995, 박사학위 논문, 부산대학교

Table. 1 Properties of Plasticine

Components	CaCO ₃ (50~60 %), MgCO ₃ , Material Mineral, Fe-Si
Specific Gravity	1.8~1.92
Specific Heat	0.24 Kcal/Kg°C
Heat Conductivity	0.6 Kcal/mh°C
Hardness	HB 15 (24°C)
Bulk Modulus	675,000 psi (475 Kg/mm ²)

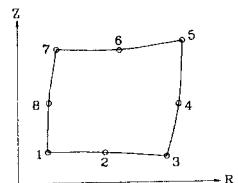
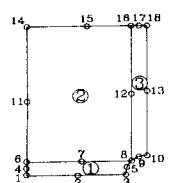
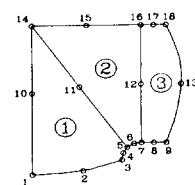


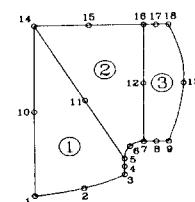
Fig. 1 Eight-Node Quadratic Rectangular Element



(a) Node Numbering of Type 1



(b) Node Numbering of Type 2



(c) Node Numbering of Type 3

Fig. 2 Global Coordinate System of T-Shape Forging

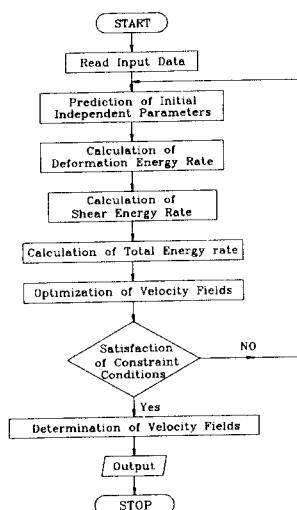


Fig. 3 Flow Chart for UBET Programming

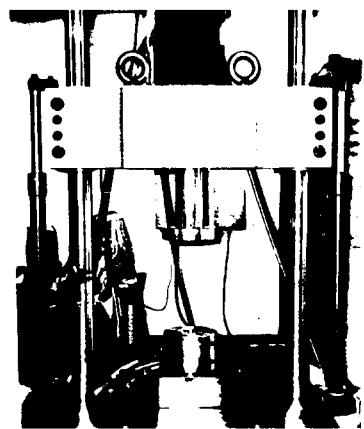


Fig. 4 Equipment for Model Material Test (MTS)

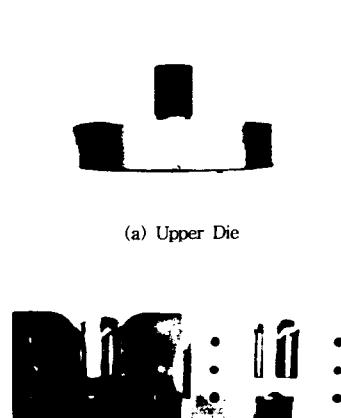


Fig. 5 Die Set for T-Shaped Forging

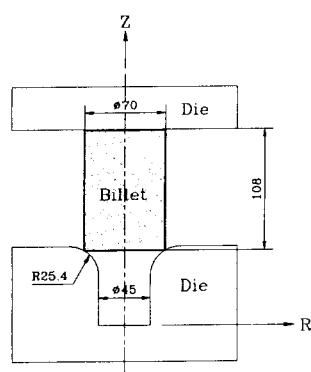


Fig. 6 Initial Billet and Dies for T-shaped Forging

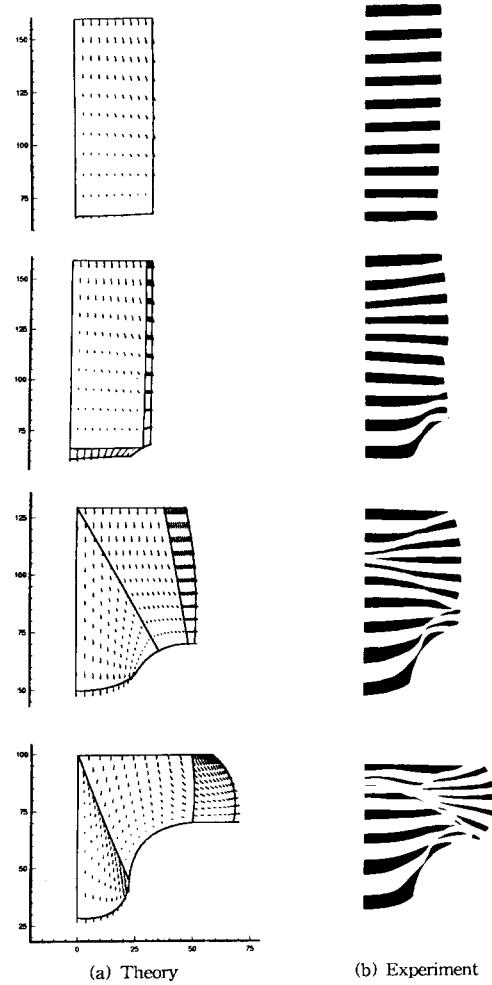
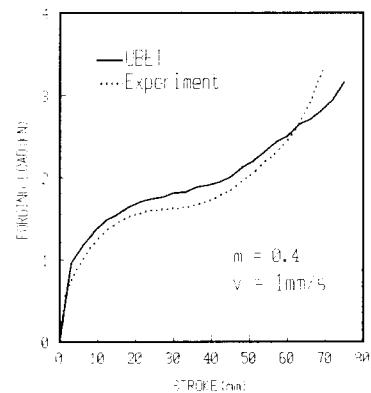


Fig. 7 Comparison of Velocity Vectors and Profiles of the Billet between Theory and Experiment in Stroke



[Lub.=Talc Powder ($m=0.4$), Die Vel. = 1 mm/s]
Fig. 8 Comparison between Theoretical and Experimental Forging Loads