

난류경계층에 의한 다층재질 원통형 실린더의 유체소음 해석 연구

신 규 권, 홍 전 속*, 이 헌 곤*

(A Study of Flow Induced Noise for Multilayered Cylinder due to Turbulent Boundary Layer)

(Ku-Kyun Shin, Chin-Suk Hong, Hun-Gon Lee)

1. 서론

긴 원통형 실린더 주위에 자유 유체 흐름이 있을 때, 실린더 주위에서는 유체의 점성에 의해 난류 경계층이 형성되고, 난류 경계층 내 유체 입자의 운동에 의해 실린더 표면에서는 변동 압력이 발생하게 된다. 그러나 이들 난류 경계층 내 유체 유동에 의한 압력 변동은 실제로 방사되어 먼거리까지 전파되지는 않지만 파동의 형태로 실린더 내부에 전달되어 실린더 내부에 압력 변동을 발생시킴으로서 유동유기 소음의 주요한 원인이 된다.

본 연구에서는 외부 호스, 내부 충전유 및 탄성체 핵으로 구성된 다층 재질의 무한히 긴 원통형 실린더가 자유 흐름 중에 있을 때, 유체 유동에 의한 난류 경계층내 벽면 압력 변동(wall pressure fluctuation)이 내부 탄성체 핵의 표면에 미치는 영향을 분석하기 위하여 난류 경계층에 의한 다층 재질의 실린더 내부 압력 변동 해석 이론을 정립 하였다. 본 해석 이론에서는 파동 방정식을 이용하여 외부 호스 벽면 압력에 대한 전달 함수를 도출하고, 난류 경계층내 벽면 압력 변동은 Corcos model을 기초로 하여 Strawderman이 제안한 실험식을 사용하여 추정하였다. 또 이를 바탕으로 자유 흐름 속도 변화등에 따른 실린더 내부 압력변동의 변화를 분석 하여 보았다.

2. 이론적 배경

자유 흐름 중에 있는 실린더 외부에 형성되는 난류 경계층 내 유체 입자는 종류와는 달리 eddy 형태의 복잡하고 불규칙적인 운동을 하므로 난류 경계층 내 유동장의 모든 곳에서의 속도 및 압력이 시시각각 변화되고 이때 발생하는 실린더 벽면에서의 압력 변동은 실린더 내부에 변동압의 형태로 전달된다.

이 압력 변동의 전파는 유체 및 고체에서의 선형화된 Navier-Stokes 방정식을 이용하여 파동 방정식의 형태로 정식화 할 수 있다:

2-1 실린더 내부 전달 함수

2-1-1 탄성체에 대한 파동방정식

Newton의 제2법칙에 의해 탄성체 미소 요소에 대한 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \vec{\sigma} \quad (2-1)$$

여기서, ρ 는 탄성체 밀도, \vec{u} 는 변위 vector, $\vec{\sigma}$ 는 응력 vector, ∇ 는 라플라시언이다. 식(2-1)의 우변 응력 항을 변위항으로 나타내기 위하여 미소 변형을 가정하면 Hook 법칙에 의한 응력-변위 관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (2-2)$$

여기서 μ, λ 는 Lamé의 탄성계수, δ_{ij} 는 Kronecker delta함수이다.

식(2-2)를 식(2-1)에 대입하고 변위 \vec{u} 를 시간에 대한

* 국방과학연구소

조화 함수로 가정하면 식(2-1)은

$$-\omega^2 \vec{u} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \nabla \nabla \cdot \vec{u} \\ = c_s^2 \nabla^2 \vec{u} + (c_l^2 - c_s^2) \nabla \nabla \cdot \vec{u} \quad (2-3)$$

이 된다. 여기서

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2-4-a)$$

$$c_l^2 = \frac{1}{\rho} (\lambda + 2\mu) \quad (2-4-b)$$

이고 c_s, c_l 은 각각 복소 전단파 와 복소 종파의 전파속도를 나타낸다. vector장에서의 변위 vector \vec{u} 는 Helmholtz's theorem 에 의해 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\vec{u} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{A} \quad (2-5)$$

여기서, $\phi(x, t)$ 는 scalar potential 로 종방향의 운동을 $\vec{A}(x, t)$ 는 vector potential 로 횡방향의 운동을 나타낸다. 이때, 횡방향 파동은 변형시 체적이 일정하므로 $\vec{A}(x, t)$ 는 다음과 같이 2개의 scalar 함수로 표현할 수 있다.

$$\vec{A} = \vec{z} \phi + \nabla \times (\vec{z} \chi)$$

식(2-5)를 식(2-3)에 대입하고 정리 하면 3개의 scalar 함수 ϕ, ψ, χ 에 대한 파동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{c_l^2} \phi = 0 \quad (2-6-a)$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{c_s^2} \psi = 0 \quad (2-6-b)$$

$$\nabla^2 \chi + \frac{\omega^2}{c_s^2} \chi = 0 \quad (2-6-c)$$

2-1-2 유체에 대한 파동 방정식

실린더 외부 유체 및 내부 충전유에 대하여도 탄성체에서와 마찬가지로 유체 입자 속도에 대한 3개의 scalar 함수 ϕ_i, ψ_i, χ_i 가 만족해야 하는 파동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \phi_i + \frac{\omega^2}{c_{yi}^2} \phi_i = 0 \quad (2-7-a)$$

$$\nabla^2 \psi_i + \frac{\omega^2}{c_{si}^2} \psi_i = 0 \quad (2-7-b)$$

$$\nabla^2 \chi_i + \frac{\omega^2}{c_{si}^2} \chi_i = 0 \quad (2-7-c)$$

여기서, c_{yi}, c_{si} 는 각각 유체 중에서의 종파 및 전단파 속도이다.

2-1-3 원통형 실린더에 대한 정식화

본 연구에서는 그림 2.1 에서 보이는 바와 같이 중심축으로부터 반경 r_1 까지는 탄성체 핵, $r_1 - r_2$ 까지는 내부 충전유, $r_2 - r_3$ 까지는 외부 탄성체인 호스, r_3 이상은 외부 유체인 3층 재질의 무한 길이 원통형 실린더에 대하여 앞절에서 구한 파동 방정식들을 이용하여 외부 호스에서의 압력 변동에 대한 핵 표면에서의 응답 특성 즉 전달 함수를 정식화 하였다.

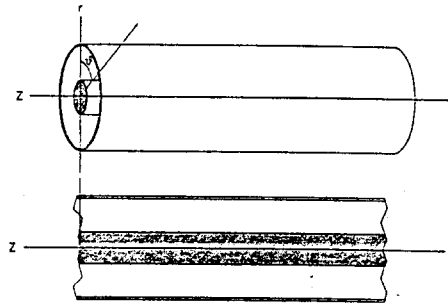


그림 2.1 실린더의 좌표계

그림 2.1 에서와 같이 실린더의 길이 방향으로 z , 반경 방향으로 r , 회전 방향으로 θ 인 원통형 좌표계를 설정하고 i 번째 탄성체 요소 및 유체 요소의 속도에 대한 scalar 함수를

$$\phi_i = \phi_i(r, \theta, z) e^{-j\omega t} \\ \psi_i = \psi_i(r, \theta, z) e^{-j\omega t} \\ \chi_i = \chi_i(r, \theta, z) e^{-j\omega t} \\ \phi_f = \phi_f(r, \theta, z) e^{-j\omega t} \\ \psi_f = \psi_f(r, \theta, z) e^{-j\omega t} \\ \chi_i = \chi_i(r, \theta, z) e^{-j\omega t}$$

라 하면 이들은 각각 원통형 좌표계에 대한 파동 방정식을 만족하여야 한다. 즉 i 번째 탄성 요소에 대하여 식(2-6-a)를 원통형 좌표계로 변환하면

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (2-8)$$

이고 ϕ_i 를 변수 분리 하여 식(2-8)에 대입하고

$$\phi_i(r, \theta, z) = P(r) \Theta(\theta) Z(z)$$

경리 하면 식(2-8)의 일반해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_i = [A_{1i} J_n(rk_{ii}) + B_{1i} Y_n(rk_{ii})] c_2 e^{in\theta} c_1 e^{ik_x z} e^{-j\omega t} \quad (2-9)$$

그런데 본 연구에서는 계산을 간단히 하기 위하여 실린더 표면에 균일하게 발달된 난류 경계층에 의한 표면 압력 변동은 회전 방향 θ 에 관계없이 일정한 power를 가지고 있고 탄성체 핵 표면에서의 변동 압력을 θ 방향으로의 평균치만 고려하면 ϕ_i 는 θ 에 독립된 함수 형태를 가질 수 있으므로 상수 $n=0$ 라 한다. 따라서 식(2-9)는

$$\phi_i = [A_{1i} J_0(k_{ii}r) + B_{1i} Y_0(k_{ii}r)] \exp j(k_x z - \omega t) \quad (2-10-a)$$

가 된다. 마찬가지로 방법으로 ϕ_i, χ_i 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_i = [A_{2i} J_0(k_{ii}r) + B_{2i} Y_0(k_{ii}r)] \exp j(k_x z - \omega t) \quad (2-10-b)$$

$$\chi_i = [A_{3i} J_0(k_{ii}r) + B_{3i} Y_0(k_{ii}r)] \exp j(k_x z - \omega t) \quad (2-10-c)$$

여기서

$$k_{ii}^2 = \frac{\omega^2}{c_{ii}^2} - k_x^2$$

이고 유체에 대해서도 탄성체 경우와 마찬가지로 방법으로 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_f = [A_{1f} J_0(K_{if}r) + B_{1f} Y_0(k_{if}r)] \exp j(k_x z - \omega t) \quad (2-11-a)$$

$$\phi_f = [A_{2f} J_0(k_{if}r) + B_{2f} Y_0(k_{if}r)] \exp j(k_x z - \omega t) \quad (2-11-b)$$

$$\chi_f = [A_{3f} J_0(K_{if}r) + B_{3f} Y_0(k_{if}r)] \exp j(k_x z - \omega t) \quad (2-11-c)$$

여기서,

$$k_{if}^2 = \frac{\omega^2}{c_{if}^2 - j\omega(\lambda_f + 2\mu_f)/\rho_f} - k_x^2$$

$$k_{if}^2 = \frac{\omega^2}{c_{if}^2} - k_x^2$$

이다. 식(2-10), 식(2-11) 중의 미지수 A_{1i}, B_{1i}, \dots 는 각 층에서 변위 (혹은 속도) 와 응력의 연속성, 실린더 중심축 및 실린더 표면에서의

의력 (변동 압력)등 에 의한 경계 조건으로부터 구할 수 있다.

2-2 Corcos Model을 이용한 난류 경계층 내의

벽면 압력변동

난류 경계층은 실린더 외부 벽면에서 공간-시간 랜덤 압력장으로 표현 된다. 본 연구에서, 난류 흐름은 실린더 축 방향으로 흐르고 실린더 외부 벽면에서 균일한 난류 경계층이 잘 발달되어 있다고 가정하면 랜덤 압력장은 시간 영역에서 정상 랜덤 과정으로 생각할 수 있다.

난류를 정량적으로 표현하기 위하여 압력 파워를 주파수와 파수 성분으로 Fourier 변환한 에너지 스펙트럼 $\Gamma(\omega, k)$ 를 사용한다. 이 에너지 스펙트럼의 수학적 표현은 흐름 방향으로 거리 ξ , 흐름에 수직 방향으로 거리 η 에 떨어진 두점사이의 cross-power spectrum $S(\omega, \xi, \eta)$ 에 대한 이론적 모델 및 실험자료에 근거를 둔 것으로, 평판위의 흐름에 대하여 Corcos 는 다음과 같은 식을 제안 하였다.

$$S(\omega, \xi, \eta) = \Phi(\omega) A(\xi) B(\eta) e^{-j\omega\xi/u_c} \quad (2-12)$$

여기서 u_c 는 대류속도, $\Phi(\omega)$ 는 난류 경계층 내의 벽면 압력변동의 파워 스펙트럼 밀도 이다. Yan 과 Willmarch는 실험을 통하여 긴 원형 실린더에 대하여 식(2-12)의 적용이 가능함을 확인하였다. 식(2-12) 중 함수 A는 흐름방향, 함수 B는 흐름에 수직방향으로의 상관 길이(correlation length)로, 이들 함수는 실험을 통한 측정 결과를 이용하여야 하지만 본 연구에서는 Strawdeman 이 제안한 다음과 같은 실험식을 사용하여 에너지 스펙트럼을 추정하였다.[1]

$$\Gamma(\omega, k) = \Phi(\omega) \bar{B} \times 2\beta \frac{\omega}{u_o} / ((\beta \frac{\omega}{u_o})^2 + (k - \frac{\omega}{u_c})^2) \quad (2-13)$$

여기서 δ 는 난류 경계층 두께, a 는 실린더의 반경, u_o 는 자유 흐름 속도(예인속도)이고,

$$\beta = 0.2 \left(1 - \left(1 + 0.8 \frac{\omega \delta}{u_0} \right)^{-1} \right) \quad (2-14-a)$$

$$\bar{B} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2C+1}} K \left(\frac{2C}{2C+1} \right) \quad (2-14-b)$$

이다. 여기서 K는 제1종 완전 타원 적분이다. 또 파워 스펙트럼 밀도는 다음식을 사용하였다.

$$\begin{aligned} & \Phi(\omega; \delta, u_0) \\ &= \begin{cases} 1.5 \times 10^{-7} \rho^2 u_0^3 \delta, & \frac{\omega \delta}{u_0} \leq 10 \\ 1.5 \times 10^{-7} \rho^2 u_0^3 \delta \left(\frac{\omega \delta}{u_0} \right)^{-3}, & \frac{\omega \delta}{u_0} < 10 \end{cases} \end{aligned} \quad (2-15)$$

여기서 ρ 는 유체 밀도이다.

3. 수치 계산 결과 및 고찰

3.1 수치 계산 모델

본 연구에서의 해석 이론을 적용하기 위한 수치 계산용 모델의 형상은 그림 3.1과 같다.

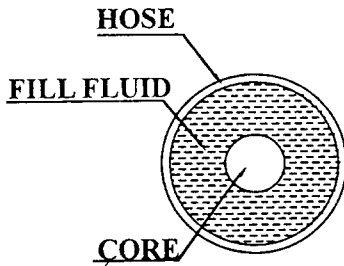


그림 3.1 수치 해석용 모델 형상

3.2 전달함수 계산 결과

전달함수로써 외부 단위 압력 변동 $\Gamma(k, \omega)$ 와 내부 핵 표면에서의 반경 방향 응력 (σ_r)의 비를,

$$R(k, \omega) = \frac{[\sigma_r(k, \omega)]_{r=a}}{\Gamma(k, \omega)}$$

로 정의하고 각 주파수에 대한 수치 계산 결과를 그림(3.2)에 나타내었다. 여기서 알 수 있는 바와 같이 전달 함수의 피크치는 각 주파수에 대한 bulge파의 파수 근처에서 나타나며 피크치 이후의 전달 함수는 파수가 증가함에 급격히 감소함을 알 수 있다.

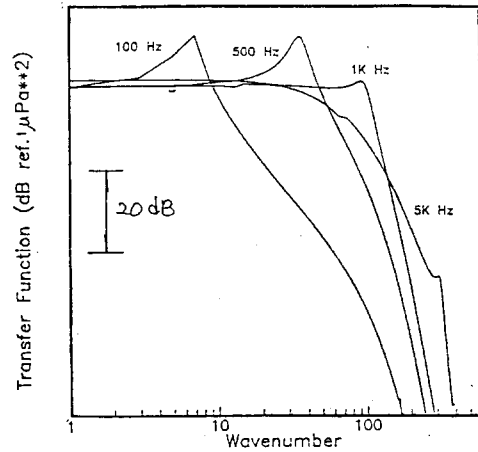


그림 3.2 전달함수

3.3 벽면 압력 변동 추정

다음으로 벽면 압력 변동의 에너지 스펙트럼 $\Gamma(k, \omega)$ 을 주파수 100Hz, 500Hz,에 대하여 계산하고 그 결과를 그림 3.3에 나타내었다. 여기에서 알 수 있는 바와 같이 에너지 스펙트럼은 $k = \omega/u_c$ 부근에서 피크치를 보이고 있다. 이는 대류 속도로 흐르는 에디에 압력 변동 에너지의 대부분이 집중되어 있음을 의미한다.

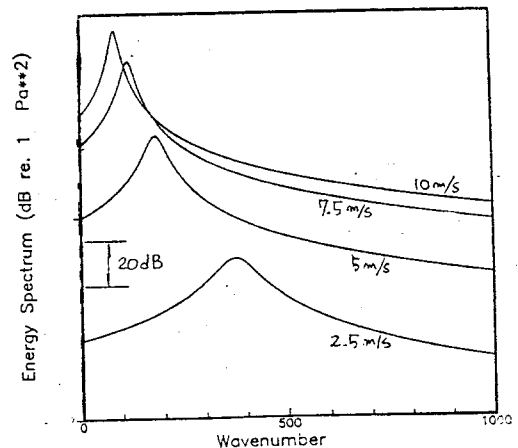


그림 3.3.a 벽면 압력 변동의 에너지 스펙트럼 (100Hz)

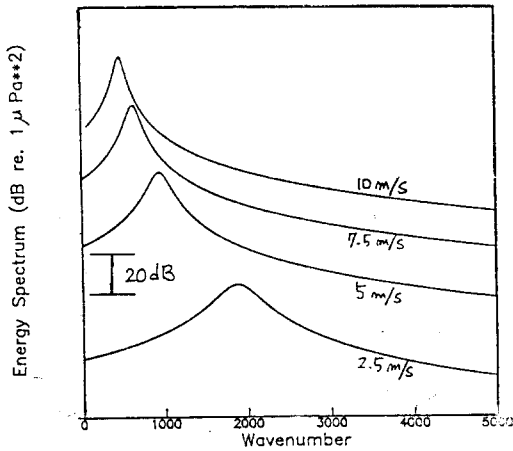


그림 3.3.b 벽면 압력 변동의 에너지 스펙트럼(500Hz)

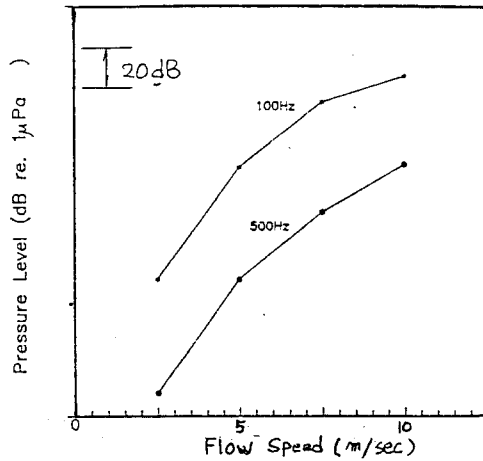


그림 3.4 내부 핵 표면에서의 압력 변동 수준

3.4 난류 경계층에 의한 내부 핵 표면에서의 압력 변동 수준 예측

앞에서 구한 전달 함수 $R(k, \omega)$ 와 벽면 압력 변동에 대한 에너지 스펙트럼을 이용하여 내부 핵의 표면에서의 압력 변동 수준을 예측할 수 있다. 즉, 핵 표면 압력 변동 수준은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |R(k, \omega)|^2 \Gamma(k, \omega) dk$$

이를 주파수 100Hz, 500Hz 에 대하여 각 자유 흐름 속도에 따라 계산한 결과를 그림 3.4 에 나타내었다. 여기서 알 수 있는 바와 같이 500Hz 에서 보다 100Hz 에서의 내부 핵 표면 압력 변동은 높은 수준을 보이고 있으며 자유 흐름 속도가 증가함에 따라 압력 변동 수준은 급격히 증가함을 알 수 있었다.

4. 결론

이상과 같이 자유 흐름 중에 있는 다층 재질의 원통형 실린더에 대하여 외부 표면에서의 난류 경계층에 의한 실린더 내부 핵에서의 압력 변동 수준을 추정하는 알고리즘을 정립하고 수치 계산을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 난류 경계층 내 벽면 압력 변동이 내부 핵 표면에 유기되는 전달 함수는 실린더의 bulge 파의 파수 부근에서 피크치를 보이며 이 후 파수 영역에서는 급격히 감소된다.
- 2) 벽면 압력 변동의 에너지 스펙트럼은 대류 속도에 대한 파수 부근에서 피크치를 보이며 이는 대류 속도로 흐르는 에디에 벽면 압력 변동의 에너지가 집중됨을 의미한다.
- 3) 실린더 내부 핵의 표면 압력 변동 수준은 자유 흐름 속도가 빨라 질수록 증가하며 같은 자유 흐름 속도에서는 주파수가 높아질수록 감소함을 알 수 있었다.

참고 문헌

1. R. R. Smith, et. al., "A Finite Element Model for Analyzing Self Noise Levels in Geographical Towed Line Arrays", ASME, 1976
2. T. T. Yeh, et. al., "Dynamics of a

Cylindrical Shell System Coupled by Viscous Fluid", JASA, vol.62, No.2, 1977

3. S. S. Francis, et. al., "Response of Elastic Cylinders to Convective flow Noise I. Homogeneous, Layered Cylinders", JASA, vol.75, No.1, 1984

4. P. M. Morse, et. al., "Methods of Theoretical Physics", McGraw Hill, New York, 1953

5. W. M. Ewing, et. al., "Elastic Waves in Layered Media", McGraw Hill, New York, 1957

6. 生井武文外, "粘性流體の力學", 理工學社, 1978