

볼베어링으로 지지되는 회전축 계의 동특성 해석

김기환*, 최상현**, 이영환***, 한동철****

(Dynamic Characteristics of Rotor-Bearing Systems Supported by Ball Bearings)

1. 서론

대부분의 볼 베어링의 응용 분야에서는, 축과 베어링을 분리해서 구름 베어링을 경방향의 선형 스프링으로 고려하는 것만으로도 충분한 결과를 얻을 수 있다. 그러나, 근래의 가스 터빈, 공작 기계, 자이로 스코프와 같은 볼 베어링의 응용 분야에서는 고속, 고정밀도를 이루기 위해서 베어링-축계의 동적 특성을 정확하게 해석해야 할 필요성이 증가하고 있다. 베어링은 회전축 계의 동적 특성에서 매우 중요한 역할을 한다. 축의 위험 속도(critical speed)와 외력에 대한 진폭에 중요한 영향을 미치며, 그 자신이 회전축 가진의 원인으로 작용하기도 한다. 따라서, 전체 계의 동적 특성의 정확한 해석을 위해서는 베어링의 강성 특성에 관한 정확한 해석이 필요하다.

볼 베어링의 내·외륜과 전동 요소들 사이의 힘 평형은 근본적으로 비선형의 부정정계를 이룬다. 따라서, 베어링 내부의 하중 분포 및 외력에 대한 베어링의 변위 및 강성을 구하기 위해서는 궤도륜(raceway)과 전동 요소 사이의 구름 접촉에 대한 힘-변형 관계가 힘 평형 해석에 포함되어야 한다. 이러한 비선형 연립 방정식의 해는 직접적으로 구할 수 없으며, Newton-Raphson방법과 같은 반복 수치 해법을 통해 수치해로 구해야 한다.⁽¹⁾⁽²⁾

반경 방향 하중이 가해지고 있는 베어링이 회전을 하면 전동체의 공전에 의해 하중 방향선에 대한 각 전

동체의 상대적인 위치가 변화하여 각 전동체의 하중 분포가 변화하므로 볼 베어링의 강성에 주기 함수 형태의 변화를 가져오게 된다. 이러한 강성 변화는 회전축 계의 가진원으로 작용하여 분수 조화파 공진(Subharmonic resonance)등을 일으키기도 하므로 명확한 특성 해석이 필요하다.

따라서, 본 연구에서는 볼 베어링의 전동체 회전에 의해 발생하는 원심력, 자이로스코픽 모멘트, 하중 방향선에 대한 전동체의 하중 분포 변화 등을 고려하여, 볼 베어링의 강성 특성을 해석하고, 볼 베어링으로 지지되는 간단한 회전축 계에 해석 결과를 적용하여 진동 특성을 해석하고자 한다.

2. 볼 베어링의 강성 해석

2.1. 볼 베어링의 힘 평형식⁽³⁾

일반적으로는 하중에 대해 구름 베어링의 외륜과 내륜이 모두 움직일 수 있지만, 해석 상 내·외륜 사이의 상대적인 움직임만을 고려해도 충분하다. 그러므로, 외륜을 고정하고, 베어링에 가해지는 하중에 대해 내륜만 움직이는 것으로 생각할 수 있다. 내륜의 중심선-내륜의 회전축-상의 기준점에 외력이 가해지는 것

* 서울대학교 기계설계학과 대학원
** 서울대학교 터보동력기계연구센터
*** 서울대학교 정밀기계설계공동연구소
**** 서울대학교 기계설계학과, 정회원

으로 가정하고, 베어링-내륜-의 변위도 이 점을 기준
으로 한다. 이렇게 베어링의 내륜의 기준점에 가해지는
하중은 볼과 내륜의 궤도론 사이의 접촉 하중과 합
계 힘 평형 방정식을 구성하게 된다.

해석의 편이를 위해 다음과 같은 가정을 한다.

- 베어링 내·외륜의 구조적인 변형은 무시하고,
단지 볼과 내·외륜 사이의 접촉 하중에 의한
변형만을 고려한다.
- 케이지(Cage)와 볼 사이의 상호 작용에 의한 반
력 및 마찰력은 내·외륜에 의한 수직 반력에
비해 무시할 수 있다.

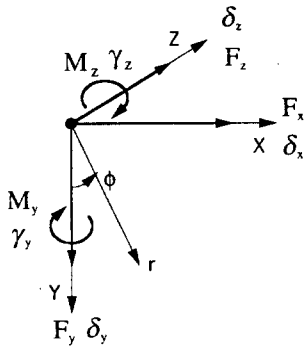


Fig. 2.1 Bearing Cartesian and cylindrical coordinate systems with bearing loading and displacements

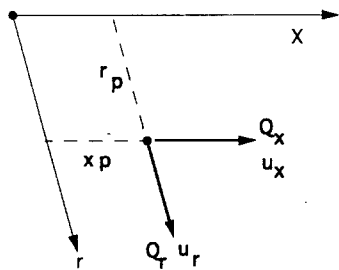


Fig. 2.2 Cross-section coordinate system with inner ring cross-section displacement and contact load vector components

베어링 해석을 위한 좌표계는 Fig. 2.1, Fig. 2.2와
같다. Fig. 2.1의 직각 좌표계 X-Y-Z는 베어링 내륜
의 기준점을 원점으로 하여 외력 벡터와 베어링 변위

벡터의 방향을 정의하며, Fig. 2.2의 원통 좌표계 r-φ
-X는 특정 볼의 위치(φ)에서의 접촉 하중 벡터 {Q}
와 내륜 단면 변위 벡터 {u}의 방향을 정의한다. Fig.
2.2에서 내륜 단면의 기준점 (xp, rp)는 내륜 궤도론의
곡률 중심이다.

베어링의 기준점에 가해지는 외력 벡터 {F}와 동일
기준점에 대한 변위 벡터 {δ}는 다음과 같다.

$$\{F\}^T = (F_x, F_y, F_z, M_y, M_z) \quad (2.1)$$

$$\{\delta\}^T = (\delta_x, \delta_y, \delta_z, \gamma_y, \gamma_z) \quad (2.2)$$

Fig. 2.2에서 {Q}와 {u}는 각각 다음과 같으며,

$$\{Q\}^T = (Q_x, Q_r) \quad (2.3)$$

$$\{u\}^T = (u_x, u_r) \quad (2.4)$$

접촉 하중은 내륜 단면 변위(Inner raceway
cross-section displacement)에 대한 함수이다.

$$\{Q\} = \{Q(\{u\})\} \quad (2.5)$$

{u}와 {δ}의 크기가 매우 작으므로, {δ}와 {u}사이
에 다음과 같은 선형적인 변환 관계를 맺을 수 있다.

$$\{u\} = [R\phi] \cdot \{\delta\} \quad (2.6)$$

여기서,

$$[R\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_p \cos \phi & r_p \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & -x_p \sin \phi & -x_p \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

마찬가지로, (2.7)의 변환 행렬을 이용해서 {Q}를
내륜 기준점에 대한 등가 하중 {f}로 변환할 수 있으
며, 등가 하중의 합과 외력 사이에 다음과 같은 힘
평형식을 세울 수 있다.

$$\{f\} = [R\phi]^T \cdot \{Q\} \quad (2.8)$$

$$\text{여기서, } \{f\}^T = (f_x, f_y, f_z, m_y, m_z)^T$$

$$\{F\} + \sum_{j=1}^N [f_j]^T = \{0\} \quad (2.9)$$

(2.5)의 접촉 하중에 관한 식이 비선형이므로, (2.9) 식 또한 비선형 방정식이다. 그러므로, 미지의 벡터 $\{u\}$ 를 계산하기 위해서는 Newton-Raphson 방법과 같은 반복 수치 해법을 도입해야 한다. (2.8), (2.9)식에 Newton-Raphson 방법을 적용하기 위하여, Taylor전개를 하면 다음 식이 유도되어 진다.

$$\{F\} + \sum_{j=1}^n [f_j]^T + \sum_{j=1}^n J_j(\delta)_j \cdot \{\Delta\delta\} = \{0\} \quad (2.10)$$

윗 식에서 $J_j(\delta)_j$ 는 j번째 전동체에서의 $\{\delta\}$ 에 대한 (f)의 자코비안 행렬이며, 결과적으로 이 행렬이 베어링의 강성을 구성하게 된다. 베어링 강성 행렬(5x5)은 다음과 같다.

$$\left[\frac{\partial \{F\}}{\partial \{\delta\}^T} \right] = - \sum_{j=1}^n J_j(\delta)_j \quad (2.11)$$

해석의 편의를 위해서 내륜 단면 기준점의 x_p 좌표를 기준 좌표계 XYZ의 원점과 일치시켜서 0으로 한다. 볼 베어링의 단면의 기준 위치($\{\delta\} = \{0\}$, $\{u\} = \{0\}$)에 대한 정의는 Fig. 2.3과 같다.

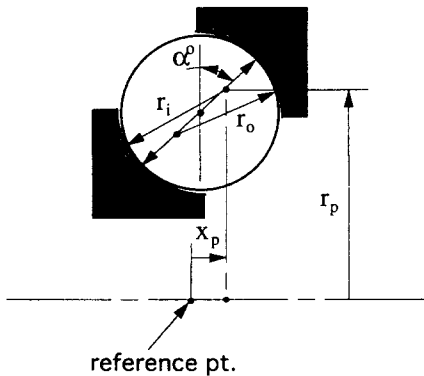


Fig. 2.3 Ball bearing cross-section geometry

2.2. 볼 베어링의 준정적 해석(Quasi-static analysis)

고속 회전하는 볼 베어링은 전동체의 자전과 공전

에 의한 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 크기가 다른 힘 성분에 비해 무시할 수 없을 정도의 크기이므로 전동체에서의 힘 평형식을 구성할 때, 이를 고려해야 하며, 이러한 베어링 힘 평형 해석을 준정적 해석이라 한다.

고속 회전에서 볼 접촉각은 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 영향으로 인해 내륜쪽은 증가하고, 외륜쪽은 감소하게 되며, 이것은 베어링의 하중 대 변위, 강성 특 성과 회전축 시스템의 동특성, 그리고 윤활 특성 등에도 영향을 미치게 된다.

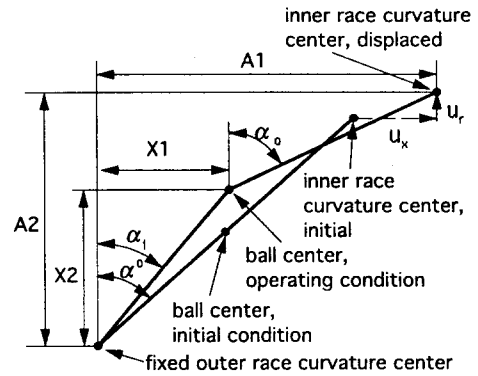


Fig. 2.4 Positions and displacements of groove centers and ball center in the cross section in quasi-static analysis

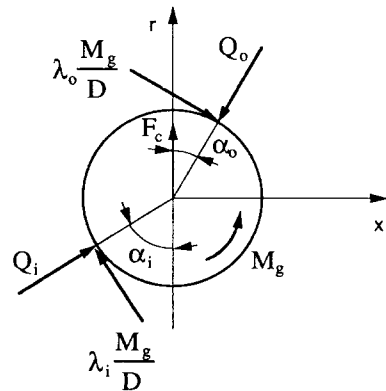


Fig. 2.5 Force equilibrium in ball

Fig. 2.4는 고속 회전하고 있는 볼 베어링이 복합 하중을 받아 탄성 접촉 변형을 한 후에 위치각 ϕ 에서의 볼 중심과 궤도륜 곡률 중심의 위치 변화를 나타낸다. A_1 과 A_2 는 각각 내·외륜의 곡률 중심 간의 축

방향 거리와 반경 방향 거리를 나타내며, X_1 과 X_2 는 각각 볼 중심의 축방향과 반경 방향의 거리를 나타낸다. Fig. 2.4에서 기하학적인 관계를 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{u\} &= \begin{Bmatrix} A_1 - DB\sin\alpha' \\ A_2 - DB\cos\alpha' \end{Bmatrix} \\ \cos\alpha_o &= \frac{X_2}{(f_o - 0.5)D + \delta_o} \\ \sin\alpha_o &= \frac{X_1}{(f_o - 0.5)D + \delta_o} \\ \cos\alpha_i &= \frac{A_2 - X_2}{(f_i - 0.5)D + \delta_i} \\ \sin\alpha_i &= \frac{A_1 - X_1}{(f_i - 0.5)D + \delta_i} \\ (A_1 - X_1)^2 + (A_2 - X_2)^2 &= \{(f_i - 0.5)D + \delta_i\}^2 \\ X_1^2 + X_2^2 &= \{(f_o - 0.5)D + \delta_o\}^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

정상 상태의 고속 회전 시 볼에 작용하는 힘은 Fig. 2.5과 같으며, 볼에 작용하는 접촉 하중과 변형량의 관계는 Hertzian 접촉 해석을 통해 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$Q_o = K_o \delta_o^{1.5} \quad (2.13)$$

$$Q_i = K_i \delta_i^{1.5} \quad (2.14)$$

Fig. 2.5로부터 다음과 같은 힘의 평형식이 유도된다.

$$\begin{aligned} Q_i \sin\alpha_i - Q_o \sin\alpha_o - \frac{M_g}{D} (\lambda_i \cos\alpha_i - \lambda_o \cos\alpha_o) &= 0 \\ Q_i \cos\alpha_i - Q_o \cos\alpha_o + \frac{M_g}{D} (\lambda_i \sin\alpha_i - \lambda_o \sin\alpha_o) + F_{c_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

여기서 λ 는 A.B.Jones에 의해 제시된 케도론 제어 가설에 의해 볼의 자이로스코픽 모멘트가 외륜 제어인 지 내륜 제어인지 따라 결정되는 상수이다.⁽¹⁾ 즉, 외륜 제어의 경우 $\lambda_i=0$, $\lambda_o=2$, 내륜 제어인 경우 $\lambda_i=\lambda_o=1$ 이 된다. (2.12)~(2.15)의 식은 비선형 방정식이므로 임의로 가정한 $\{\delta\}$ 에 대해 각 볼 위치에서의 X_1 , X_2 , δ_i , δ_o 값을 Newton-Raphson 방법을 이용하여 구할 수 있다. 한편 각 볼의 위치에서 작용하는 원심력 F_c 와 자

이로스코픽 모멘트 M_g 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_c &= \frac{1}{2} m d_m \omega^2 \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)^2 \\ M_g &= J \left(\frac{\omega_R}{\omega} \right) \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right) \omega^2 \sin\beta \end{aligned} \quad (2.16)$$

여기서, ω 는 내륜의 회전 속도이고, ω_R , ω_m , β 는 각 볼의 자전, 공전 속도와 자세각(Attitude angle)을 나타내며, 접촉각과 케도론 제어의 함수이다.

접촉 하중 Q 는 접촉선을 따라 가해지며, 접촉 하중 벡터는 다음과 같이 구성된다.

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} -Q_i \sin\alpha_i \\ -Q_i \cos\alpha_i \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

2.3. 볼 베어링의 강성

2.2에서 언급한 바와 같이 볼 베어링은 5자유도계로서 5x5 행렬의 강성 행렬을 갖게 되며 그 식은 (2.11)과 같다. 이 식에서 F_x , F_y , F_z 와 γ_x , γ_y 사이의 강성항은 다른 강성항에 비해 무시할 수 있을 정도로 작으므로, 축방향, 반경 방향의 강성항과 회전 강성항은 서로 분리될 수 있다. 볼 베어링의 강성은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} [K]_{lateral} &= \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} [K]_{angular} &= \begin{bmatrix} K_{\theta,\theta} & K_{\theta,\phi} \\ K_{\theta,\phi} & K_{\phi,\phi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial M_y}{\partial \gamma_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \gamma_z} \\ \frac{\partial M_x}{\partial \gamma_y} & \frac{\partial M_x}{\partial \gamma_z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

축방향으로 외력이 가해지는 앵글러 콘택트 볼 베어링의 경우에는 (2.18)에서 축방향 강성이 전체 회전축 시스템에 중요한 영향을 주며, 일반적인 깊은 홈 볼 베어링의 경우에는 축방향 하중이 가해지지 않으므로, (2.18)에서 축방향과 관련된 강성항을 생략하고 횡방향만의 2x2 행렬로 간단히 할 수 있다. 베어링 지지부에서의 굽힘 모멘트를 무시할 수 없을 경우, (2.19)의 회전 강성은 반드시 고려되어야 하며, 베어링 내륜의 각 변위는 베어링의 수명을 결정하는 중요한 요소이기도 하다.

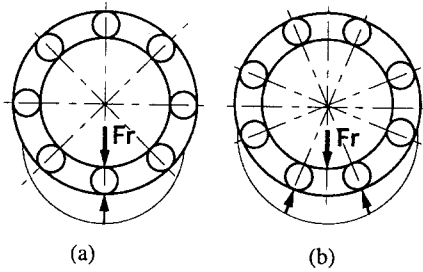


Fig. 2.6 Load distribution of ball bearing

볼 베어링이 반경 방향 하중을 받으면, Fig.2.6과 같이 전 동체가 하중선 상에 있는 경우(a)와 하중선 상의 양측에 있는 경우(b)와는 각 전동체에서의 하중 분포가 다르기 때문에 각 전동체의 접촉 변형량이 달라져서 베어링의 변위에 변화를 가져오며, 주기 함수 형태로 반경 방향의 강성이 변화하게 된다. 이 강성 변화의 진동수 ω_{ex} (rad/s)는 다음과 같다.

$$\omega = n \omega_m \quad (2.20)$$

여기서, n는 전동체의 수, ω_m 는 전동체의 공전 속도이다.

3. 회전축 진동 해석

회전축 진동 해석을 위해서는 일반적으로 전달 행렬법과 유한 요소법이 사용되는데, 본 연구에서는 티모센코 빔 모델을 적용한 유한 요소법을 사용하였다.⁽⁴⁾⁽⁵⁾

유한 요소법을 사용하였을 경우, 일반적인 회전축계에 대한 운동 방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + \{[C_B] - \omega[G]\}\{\dot{q}\} + \{[K_B] + [K]\}\{q\} = \{R\} \quad (3.1)$$

볼 베어링의 경우, 감쇠 계수는 베어링의 강성에 비해 매우 작으므로 무시할 수 있다. 또한, (2.20)식의 영향을 고려하여 베어링의 강성 행렬을 재구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [K_B] &= \begin{bmatrix} K_{yy} + \Delta K_{yy} \sin(n\omega_m t + \phi_{yy}) & K_{yz} + \Delta K_{yz} \sin(n\omega_m t + \phi_{yz}) \\ K_{zy} + \Delta K_{zy} \sin(n\omega_m t + \phi_{zy}) & K_{zz} + \Delta K_{zz} \sin(n\omega_m t + \phi_{zz}) \end{bmatrix} \\ &= [K_B]_st + [\Delta K(t)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

따라서, 볼 베어링으로 지지된 회전축계의 경우, 운동 방정식 (3.1)은 다음과 같이 재구성될 수 있다.

$$[M]\{\ddot{q}\} - \omega[G]\{\dot{q}\} + \{[K_B]_st + [\Delta K(t)] + [K]\}\{q\} = \{R\} \quad (3.3)$$

본 연구에서는 비선형 방정식인 식(3.3)의 특성 해석을 위해 직접 수치 적분 방법인 ρ -family 방법을 사용하였다.⁽⁶⁾

4. 수치 해석 예

Fig.4.1과 같이 두 개의 볼 베어링으로 지지된 간단한 회전축을 모델로 하여 해석을 수행하였다.

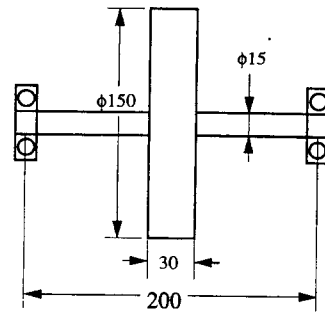


Fig. 4.1 Simple rotor model

해석에 사용된 6202 깊은홈 볼 베어링의 사양은 다음과 같다.

pitch diameter	25.26 mm
ball diameter	6.00 mm
inner raceway groove radius	3.01 mm
outer raceway groove radius	3.16 mm
ball number	8

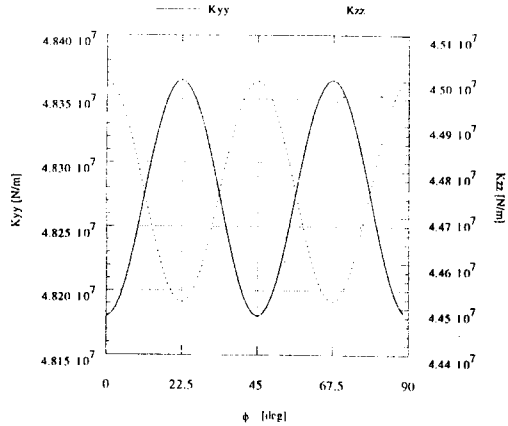
Fig.4.2는 6202베어링에 대한 준정적 해석을 통해 전동체의 공전에 의해 베어링의 경방향 강성이 변화하는 모습을 나타내고 있다. Fig. 2.1과 Fig. 2.2를 참조하여 하중방향선이 y 축방향을 지나도록 설정하였다. 그림에서 ϕ 는 임의로 선정한 전동체의, 하중 방향선에 대한 각도를 나타내고 있고, 그 결과, 전동체와 케드론 사이의 접촉의 비선형적인 힘-변형 특성 때문에 y 축 방향 강성이 z 축보다 큰 값을 나타내고 있다. 또한, Fig. 4.2로부터 y 방향과 z 방향의 연성되어진 강성항 $K_{yz}(=K_{zy})$ 는 주강성에 비해 그 값이 상당히 작으며, 그 평균적인 값은 0인 것을 알 수 있다.

베어링의 강성이 45° 주기의 함수 형태로 나타나는 것은 6202베어링의 전동체가 총 8개이기 때문이다.

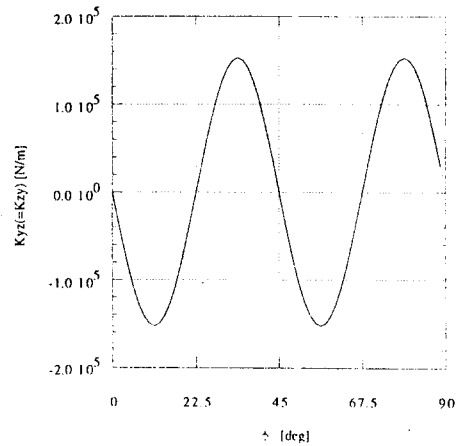
위의 베어링 해석 결과를 이용하여 해석축의 불평형 질량에 의한 변위를 구한 후, 이의 주파수 특성을 알아보기 위하여 Fourier변환을 하였다. 그 결과를 Fig 4.3에 나타냈다.

이로부터 볼 베어링에 의해 지지된 회전축의 진동 주파수는 주된 주파수 성분인 불평형 질량에 의한 조화 진동 주파수(ω)외에 일반적으로 알려져 있는 것과 같이 전동체의 통과 가진 주파수($n \cdot \omega_m$)와 조화 진동 주파수 간의 합과 차의 주파수에서 부가적인 피크 값이 나타남을 알 수 있다.⁽⁷⁾⁽⁸⁾ 해석 결과, 베어링의 강성 변화량(ΔK)이 주강성($K_{B,st}$)에 비해 상대적으로 작게 나타났기 때문에 부가적인 주파수 성분들이 불평형 질량에 의한 조화 진동 성분에 비해 무시할 수 있을 정도로 작게 나타났지만, 실제의 볼 베어링 적용 예에서는 전동체의 하중 방향선 통과시 충격적인 힘이 회전축에 전달되므로, 합·차 조화 진동 주파수의 영향

이 이론적인 해석보다 크게 나타난다.⁽⁹⁾



(a)



(b)

Fig. 4.2 Variation of stiffness

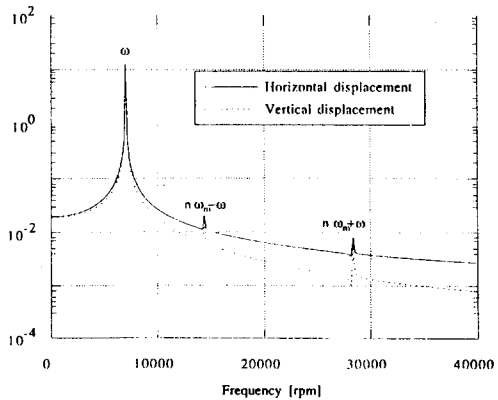


Fig. 4.3 Steady state frequency spectrum

5. 결과

볼 베어링의 전동체 공전에 의해 발생하는 원심력, 자이로스코픽 모멘트, 하중 방향선에 대한 전동체의 하중 분포 변화 등을 고려하여, 볼 베어링의 강성 특성을 해석하였다. 또한, 유한 요소법으로 모델링한 회전축의 운동 방정식에 그 결과를 적용하여 불평형 힘에 의한 변위를 계산한 후 주파수 분석을 하여, 전동체의 통과 가진에 의해 합·차 조화 진동이 발생함을 알 수 있었다.

참고 문헌

1. Jones, A. B., "A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings under Arbitrary Load and Speed Conditions," ASME Journal of Basic Engineering, June 1960, pp. 309-320
2. Harris, T. A., Rolling Bearing Analysis, Wiley, New York, 1984
3. de Mul, J. M., and Vree, J. M., "Equilibrium and Associated Load Distribution in Ball and Roller Bearings Loaded in Five Degrees of Freedom While Neglecting Friction-Part 1:General Theory and Application to Ball Bearings," ASME J. of Tribology, Jan. 1989, pp. 142-148
4. Nelson, H. D., "A finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory," ASME J. of Mechanical Design, Vol.106, No.4, pp.793-803, 1980.
5. Özguven, h. N. and Özkan, Z.L., "Whirl Speeds and Unbalance Response of Multibearing Rotors Using Finite Elements," ASME J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.106, No.1, pp.72-79,1984.
6. Bazzi, G. and Anderggent, E., "The ρ -family of Algorithms for Time-step Integration with Improved Numerical Dissipation," Earthquake eng. and Structural dynamics, vol. 10, pp.537-550, 1982
7. 田村英之, 清水浩, 日本機械學會論文集 34, 258(1968), 298.
8. 山本敏男, 機械の研究 19, 1(1967), 235.
9. Rahnejat, H. and Gohar, R., "The Vibrations of Radial Ball Bearings," Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 199, pp.181-193, 1985

NOMENCLATURE

- {F} = bearing load vector, F, FL
{M}, {C}, {G}, {K} = mass, damping, gyroscopic and stiffness matrices
{q} = displacement of the rotor system, L
{Q} = rolling element contact load vector, F
{R} = force vector of the rotor system, N
{R Φ } = transformation matrix
{u} = inner raceway cross-section displacement vector, L, rad
 α = contact angle, rad
{ δ } = bearing displacement vector, L, rad
- subscripts
i = inner
j = jth rolling element
o = outer