

천공판재의 항복거동

백승철, 이동녕, 오규환
서울대학교 금속공학과

Plastic yield behaviour of perforated sheets

Seung Chul Baik, Dong Nyung Lee and Kyu Hwan Oh
Department of Metallurgical Engineering,
Seoul National University

Abstract

The sheet perforated with a uniform triangular pattern of round holes and subjected to in-plane stress of arbitrary biaxiality was investigated. The equivalent continuum approach was employed to develop a theoretical model for global analysis, which includes defining a yield criterion and the strain hardening in terms of apparent stresses and apparent strains. Finit element analysis and experiment tension test were performed to examine the validity of proposed yield criterion and strain hardening models of perforated sheets.

1. 서론

새도마스크는 칼라 텔레비전과 컴퓨터 모니터에 사용되는 금속판이다. 압연으로 얇은 금속판재를 만든 후 에칭으로 원형이나 길쭉한 구멍을 일정한 배열로 뚫어 새도마스크를 만든다. 새도마스크는 곡면으로 프레스 성형한 후 사용된다. 정교한 프레스 성형이 요구되기 때문에 성형과정을 해석할 필요가 있다. 그러나 유한요소법을 이용하여 성형과정을 계산할 때 수많은 구멍을 지닌 판재를 실제 모양대로 요소를 나누어 계산하는 것은 불가능하다. 다공성 재료의 성형을 해석할 때와 같이¹⁾ 새도마스크를 구멍이 없는 연속체의 판재로 가정하여 성형과정을 계산해야 한다. 이 과정에서 우선적으로 구멍이 있는 새도마스크를 대표하는 연속체 판재의 기계적 성질을 결정해야 한다.

원형 구멍이 배열되어 있는 판재의 기계적 성질은 많은 사람에 의해 해석되었다. 기존의 연구자들이 구멍이 배열된 판재를 대표하는 연속체 판재의 탄성계수 및 포아송비를 근사적인 방법으로 계산하였다.²⁻⁴⁾ 탄성한계 내에서 응력분포를 해석해로 구하였고⁵⁾ 구멍의 형상변화등에 대하여도 수치해석적으로 계산하였다.⁶⁻⁷⁾

O'Donnell^{8,9)}과 Chen¹⁰⁾은 원형 구멍이 정삼각형 형태로 배열한 판재의 항복식을 제안하였다. O'Donnell이 제안한 항복식은 구멍의 크기가 큰 경우에만 타당한데 이 연구에서는 O'Donnell이 하계해석으로 구한 항복식을 개선하여 구멍의 크기가 작은 판재에서도 적용할 수 있는 항복식을 제안한다. 또한 변형률에 따른 항복곡면의 변화를 예측하는 식을 제안한다. 제안한 식이 실제에 잘 적용할 수 있는지를 유한요소법으로 항복곡면을 얻어 제안한 식으로 구한 항복곡면과 비교한다. 또한 원형 구멍 새도마스크를 각 방향으로 일축인장시험을 하여 방향에 따른 항복응력을 얻고 제안한 식에 의한 결과와 비교하고자 한다.

2. 이론적 전개

2.1 O'Donnell의 항복식⁸⁾

O'Donnell은 그림 1과 같이 원형 구멍이 정삼각형 형태로 배열한 판재를 연속체라고 가정할 때 적용할 수 있는 항복식을 유도하였다. O'Donnell이 제안한 항복식은 다

음과 같다.

인접한 구멍 사이의 가장 얇은 부분을 인대(ligament)라 하고 이 부분의 응력이 가장 크므로 가장 먼저 항복이 일어난다. 구멍이 있는 판재를 연속체로 가정할 때 판재가 받는 응력을 겉보기응력(apparant stress), 변형률을 겉보기변형률(apparant strain)이라고 하며 인대가 항복이 일어날 때를 천공판재가 항복이 일어나는 순간이라고 가정한다. 그림 1에서 x축과 y축 방향의 겉보기 응력을 각각 σ_x^* 과 σ_y^* 라 할 때 인대에서 s축 방향의 힘 F_s 와 n축 방향의 힘 F_n 을 구하면 다음과 같다.

$$F_n = \sigma_x^* p \sin^2 \psi + \sigma_y^* p \cos^2 \psi \quad (1)$$

$$F_s = -(\sigma_x^* - \sigma_y^*) p \sin \psi \cos \psi$$

여기서 p는 그림 1에 나타낸 것과 같이 인접한 구멍 사이의 거리를 말한다. 인대에서 응력상태가 균일하다고 가정하고 h는 인대의 길이일 때 인대에서 작용하는 응력은 $\sigma_n = F_n/h$, $\sigma_{ns} = F_s/h$ 이다. 인대의 길이가 작은 경우 인대에서 응력상태가 균일하다고 가정하고 구멍에 접한 인대 가장자리에서 σ_s 이 0이므로 인대 전체에서 $\sigma_s = 0$ 로 가정하였다. O'Donnell은 이것을 Tresca의 항복식에 대입하여 구멍이 있는 판재의 항복식을 다음과 같이 구하였다.

$$\left[(\sin^4 \psi + \sin^2 2\psi) \sigma_x^{*2} - \frac{3}{2} (\sin^2 2\psi) \sigma_x^* \sigma_y^* + (\cos^4 \psi + \sin^2 2\psi) \sigma_y^{*2} \right]^{\frac{1}{2}} = \delta \sigma_b^* \quad (2)$$

여기서 σ_b 를 기지금속의 항복응력이라 할 때 $\sigma_b^* = \mu \sigma_b$ 이며 μ 은 인대비(ligament efficiency)로 h/p 이다. δ 는 보정항으로서 상계해석으로 다음과 같이 구하였다.

$$\xi = \frac{\sigma_s^*}{\sigma_n^*}$$

$$\tan 2\beta = \left| \frac{(1-\xi) \sin 2\psi}{\cos^2 \psi + \xi \sin^2 \psi} \right| \quad (3)$$

$$e_1 = \beta + \cos^{-1}(\sin^2 \beta) - \frac{\pi}{2}$$

$$\delta = \frac{\mu + \cos e_1 - 1}{\mu \cos e_1}$$

ψ 가 0° 과 60° 인 두종류의 인대에서 각각 이 항복식이 적용된다. 임의의 응력상태에서 두가지 인대 중 하나 이상에서 항복이 일어날 때를 천공판재가 항복되는 순간으로 결정한다.

2.2 새로운 항복식

구멍의 크기가 클 때는 σ_s 를 0으로 한 가정이 타당하나 구멍의 크기가 작은 경우에는 이 가정이 적당하지 않다. 구멍이 작은 경우에서도 적용 가능한 항복식을 전개하기 위하여 인대의 s축 방향의 수직응력 σ_s 을 구하여야 한다. s축 방향의 겉보기응력이 σ_s^* 일 때 천공판재 내부의 응력 분포가 그림 2와 같다고 가정하면 그림 2에서 사각형 내부의 응력분포는 탄성한계 내에서 탄성이론을 이용하여 구할 수 있다. 인대 중심에서 σ_s 를 구하면 다음과 같다.¹¹⁾

$$\sigma_s = \frac{\sigma_a a}{l} + \frac{4\sigma_a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi a/l)}{m} \cdot \frac{(\pi c/l) \cosh(m\pi c/l) + \sinh(m\pi c/l)}{\sinh(2m\pi c/l) + 2(m\pi c/l)} \cos m\pi \quad (4)$$

여기서 σ_a , l , a , c 는 그림 2에 표시하였다. $f_s = \sigma_s / \sigma_a$ 라 하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\sigma_s = f_s \frac{\sigma_s^*}{\mu} \quad (5)$$

식(4)를 이용하여 인대비에 따른 f_s 를 구하면 그림 3과 같다. 그런데 식(4)를 항복식에 대입하는 것은 불편하므로 $f_s = \mu^2$ 으로 가정한다. 이 관계를 그림 3에 나타내었는데 식(4)로 얻은 결과와 비교하면 약간의 차이는 있으나 항복곡면이 크게 달라지지 않으므로 무시할 수 있다. σ_s 를 0으로 가정하는 대신에 식(5)를 이용하고 기지급속이 von Mises 항복식을 따른다고 가정하면 식(2)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & [(\mu^4 \cos^4 \psi + \sin^4 \psi + \frac{3-\mu^2}{4} \sin^2 2\psi) \sigma_x^{*2} \\ & - (\mu^2 \cos^4 \psi + \mu^2 \sin^4 \psi + \frac{2-\mu^4}{2} \sin^2 2\psi) \sigma_x^* \sigma_y^* \\ & + (\cos^4 \psi + \mu^4 \sin^4 \psi + \frac{3-\mu^2}{4} \sin^2 2\psi) \sigma_y^{*2}]^{\frac{1}{2}} = \delta \sigma_b^* \end{aligned} \quad (6)$$

구멍의 크기가 0인 경우 $\mu=1$ 이 되고 식(6)은 von Mises 평면응력 항복식이 된다.

2.3 천공판재의 가공경화

인대의 변형거동이 천공판재 전체의 변형거동을 지배하므로 연속체로 가정한 천공판재의 가공경화를 알기 위하여는 길보기변형률에 대한 인대의 변형률의 관계를 알아야 한다. 천공판재가 s 와 n 축으로 각각 변형한 경우 그림 4와 같이 구멍의 형상이 타원형이 된다. 판재가 s 축으로 변형한 경우 인대에서 s 축의 변형률은 초기 인대의 길이를 h , 변형 후 인대의 길이를 h' 라 할 때 다음과 같다고 가정한다.

$$\varepsilon_s = \ln \frac{h'}{h} = f_{ss} \varepsilon_s^* \quad (7)$$

여기서 f_{ss} 는 천공판재의 길보기변형률 ε_s^* 에 대한 인대의 s 축의 변형률 ε_s 의 비례상수이다. s 축 변형시에서는 n 축의 변형률은 무시한다. 판재가 n 축으로 변형하는 경우 인대의 n 축 변형률은 구멍의 n 축 길이의 변형률과 같고 s 축의 변형률은 인대 길이의 변형률과 같다고 가정하면 인대의 변형률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \ln \frac{h''}{h} = f_{sn} \varepsilon_n^* \\ \varepsilon_n &= \ln \frac{\Delta n'}{\Delta n} = \ln \frac{b}{r} = f_{nn} \varepsilon_n^* \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 r , b , h'' 는 초기 구멍의 반지름, 변형 후 구멍의 n 축 길이, 변형 후 인대의 길이를 의미하고, Δn , $\Delta n'$ 는 그림 4 (b)에 나타낸 바와 같이 인대를 중심으로 한 n 축 방향의 변형전, 변형후 미소길이를 각각 의미한다. f_{sn} 과 f_{nn} 은 천공판재의 길보기변형률 ε_n^* 에 대한 인대의 s 축의 변형률 ε_s 과 n 축의 변형률 ε_n 의 비례상수이다.

식 (7)과 (8)을 합하고, 인대에서 두계방향의 전단변형률은 무시하며 전단변형률 ε_{sn} 은 길보기 전단변형률 ε_{sn}^* 과 같다고 가정하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= f_{ss} \varepsilon_s^* + f_{sn} \varepsilon_n^* \\ \varepsilon_n &= f_{nn} \varepsilon_n^* \\ \varepsilon_{sn} &= \varepsilon_{sn}^* \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)를 유효변형률의 식에 대입하면 인대의 유효변형률 $\bar{\varepsilon}_l$ 은 다음과 같이 얻을 수

있다.

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[f_{ss}^2 \varepsilon_s^{*2} + (2f_{ss}f_{sn} + f_{ss}f_{nn})\varepsilon_s^*\varepsilon_n^* + (f_{sn}^2 + f_{sn}f_{nn} + f_{nn}^2) \varepsilon_n^{*2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

ψ 가 0° , 60° 인 인대에서 각각 유효변형률을 계산하여 천공판재 기지금속의 유동곡선으로부터 각 인대의 유동응력을 구하고 이것을 항복식에 대입하면 예비변형이 있는 판재의 항복곡면을 얻을 수 있다.

3. FEM 해석 방법

그림 5와 같은 유한요소망을 만들어 구멍의 크기만을 변화시키면서 이축인장과정을 탄소성 유한요소법으로 모사하였다. 점 A의 x값을 x_A , 점 B의 y값을 y_B 라 하고 두께 방향을 z축으로 놓고 두께를 z_t , 평균 두께를 \bar{z}_t 라 할 때 절보기 응력 σ_x^* 과 σ_y^* 는 다음과 같다.

$$\sigma_x^* = \frac{1}{x_A y_B z_t} \int_0^{x_A} \int_0^{y_B} \int_0^{z_t} \sigma_x(x, y, z) dx dy dz \quad (11)$$

$$\sigma_y^* = \frac{1}{x_A y_B z_t} \int_0^{x_A} \int_0^{y_B} \int_0^{z_t} \sigma_y(x, y, z) dx dy dz$$

변형전 x_A , x_B 의 초기값을 각각 x_{A0} , y_{B0} 라 할 때 ε_x^* , ε_y^* 를 다음과 같이 구하였다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \ln\left(\frac{x_A}{x_{A0}}\right) \\ \varepsilon_y^* &= \ln\left(\frac{y_B}{y_{B0}}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

천공판재의 항복점은 인대의 중심에서 항복이 일어나는 순간이라 정의하였다. 기지금속은 Fe-36Ni Invar 합금으로 탄성계수는 151GPa, Poisson비는 0.280¹²⁾를 사용하였다. 상온 소성영역에서 기지금속의 응력-변형률 관계식은 $\sigma = 229.9 + 1280\varepsilon$ 을 사용하였는데 여기서 σ 의 단위는 MPa이다.

4. 실험방법

그림 6은 원형 구멍 새도마스크를 나타낸다. 새도마스크의 구멍은 깊이에 따라 크기가 변한다. 단면에 대한 평균 구멍 크기는 0.107mm이다. 그림 6의 새도마스크에서 수직방향의 0° , 22.5° , 45° , 67.5° , 90° 방향으로 인장시편을 만들어 일축인장시험을 상온, 120, 200 $^\circ\text{C}$ 에서 행하였다. 인장시편의 가는 부분이 길이 32mm, 폭 6mm가 되게 하였고 표점거리는 25mm로 하였다. 구멍이 뚫리지 않은 원판의 인장시험은 새도우마스크의 인장시험과 같이 하였다. 인장시험에서 변형률속도는 $1.75 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 로 하였다.

5. 결과 및 고찰

천공판재를 인장하면 구멍의 주위가 응력이 집중되어 먼저 항복이 일어나고 변형이 진행됨에 따라 인대의 중심부까지 항복이 일어난다. 천공판재의 항복점을 인대의 중심에 항복이 일어날 때로 정의하여 유한요소법으로 항복곡면을 얻었다. 그림 7은 유한요소법으로 구한 항복곡면과 식(6)으로 구한 항복곡면을 비교한 결과인데 두가지 경우가 여러 인대비에 대하여 잘 일치한다. 그림 8은 새도마스크를 각 방향으로 일축인

장하여 얻은 실험값과 식(6)으로부터 얻은 결과를 비교한 것이다. 깊이에 따라 크기가 달라지는 새도마스크를 평균크기의 구멍이 일정하게 뚫려 있다고 가정하고 계산하였다. 이 결과에서도 실험값과 계산값이 잘 일치한다.

천공판재가 변형하면 항복곡면의 영향을 미치는 요인으로 구멍의 형상 및 위치의 변화와 기지금속의 가공경화가 있다. 재료의 가공경화 효과를 빼고 구멍의 형상 및 위치 변화 효과만을 고려하기 위하여 x, y축으로 각각 10% 예비변형한 천공판재의 기지금속이 가공경화하지 않고 초기의 항복응력을 그대로 지닌다고 하고 예비변형된 천공판재의 항복곡면을 유한요소법으로 얻었다. 이 결과를 예비변형하지 않은 천공판재의 항복곡면과 비교한 것이 그림 9이다. 그림 9에서 보면 예비변형된 천공판재의 항복곡면과 초기 천공판재의 항복곡면이 거의 일치하고 식(6)으로 구한 계산식과 거의 일치하는 것으로 10% 변형의 한계에서 구멍의 모양 및 위치 변화에 의한 항복곡면의 변화를 무시할 수 있다.

그림 10은 식(9)의 인대비에 대한 f_{ss} , f_{sm} , f_{mm} 를 유한요소법으로 구한 것으로 이 값을 이용하여 인대의 유효변형률을 식(10)을 이용하여 얻고 기지금속의 일축인장 유동곡선으로부터 가공경화량을 알 수 있다. 이것을 이용하여 x, y 축으로 각각 10% 예비변형한 천공판재가 가공경화되었을 때 예비변형된 천공판재의 항복곡면을 구하면 그림 11과 같다. 유한요소법으로 구한 결과와 식(6), (9), (10)를 이용하여 얻은 계산결과가 일치함을 알 수 있다.

6. 결론

이 연구에서는 천공판재의 항복식과 가공경화현상을 원형구멍 새도마스크의 일축인장 시험과 유한요소법으로 관찰하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 새로 제안한 천공판재의 항복식이 새도마스크의 일축인장 결과와 유한요소법에 의하여 얻은 항복곡면을 잘 예측한다.
- (2) 천공판재의 겉보기 변형률에 따른 인대의 변형률을 계산하여 변형 중 천공판재 항복곡면의 변화를 예측하는 식을 제안하였다.

참고문헌

1. D.N. Lee and H.S. Kim, Powder Met., 35 (1992) 275
2. T. Slot and W.J. O'donnell, J. Engineering for Industry, 93 (1971) 935
3. Dusan Krajcinovic and Kaushik Mallick, Int. J. Solids Structures, 29 (1992) 1837
4. W.J. O'donnell, Welding Research Council Bulletin No.124 (1967)
5. M.D. Bird and C.R. Steele, J. Appl. Mechanics, 59 (1992) 398
6. Y. Nakamura, T. Tatenami and T. Ohata, Proc. 3rd Int. Conf. Technology of Plasticity, Kyoto, 3 (1990) 1231
7. T. Slot and T.R. Branca, J. Pressure Vessel Technology, 93 (1974) 220
8. W.J. O'donnell and J. Porowski, J. Appl. Mechanics, 40 (1973) 263
9. A. Sawczuk W.J. O'donnell and J. Porowski, Int. J. Mech. Sci. 17 (1975) 411
10. Fuh-kou Chen, J. Mat. Proc. Tech. 37 (1993) 175
11. S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of Elasticity, 3ed, McGraw-Hill (1970) 57
12. G. Hausch and H. Warlimont, Z. Metallk, 63 (1972) 547
13. S.H. Baik, S.H. Lee, S.C. Kim and D.N. Lee, J. Korean Inst. Met. Mater., 32 (1994) 128

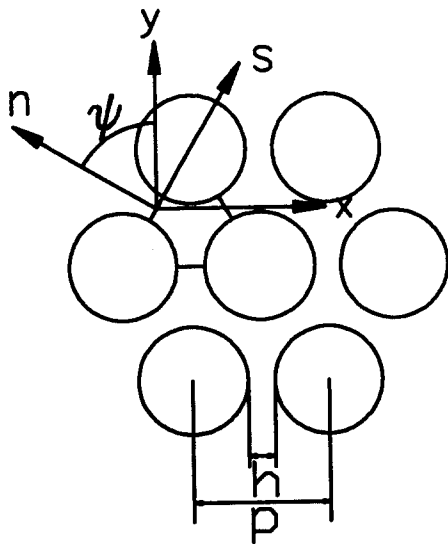


Fig.1 Unit triangular cell of hexagonal perforation array under biaxial stress in the directions of symmetry axes.

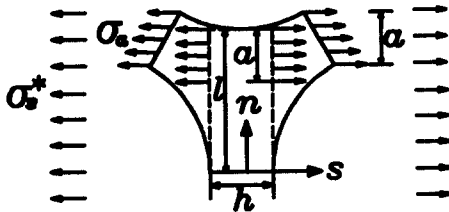


Fig.2 Stress distribution in unit triangular cell under uniaxial stress in the direction of s axis.

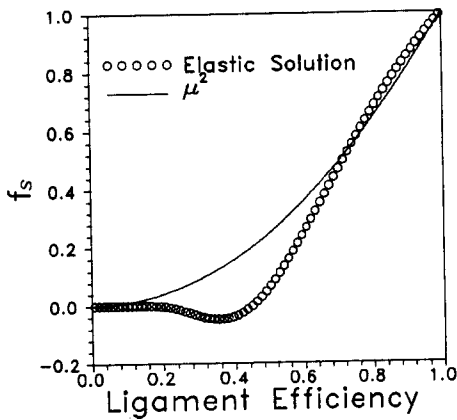


Fig.3 f_s in Eq.(5) as a function of ligament efficiency.

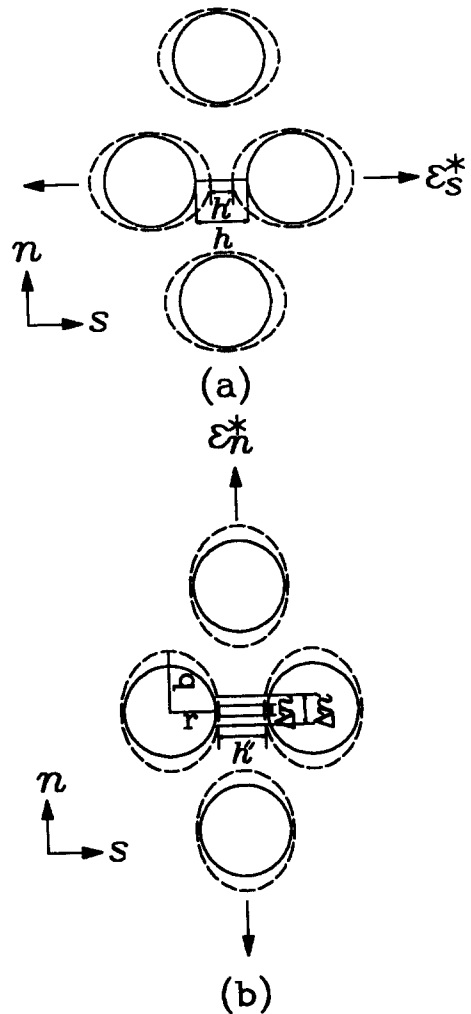


Fig.4 The change of hole geometries in perforated sheets under strains in the directions of (a) s axis and (b) n axis.

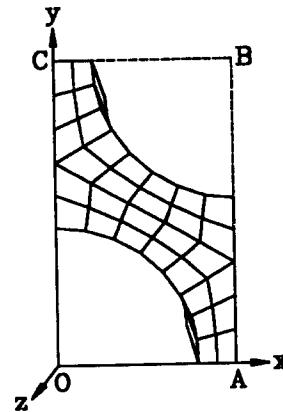


Fig.5 Mesh for 3-dimensional finite element analysis.

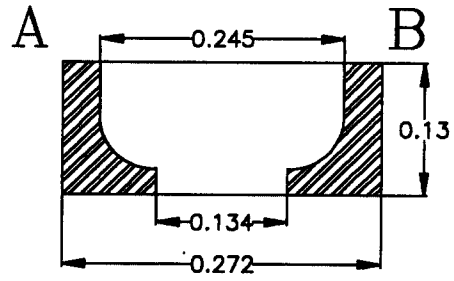
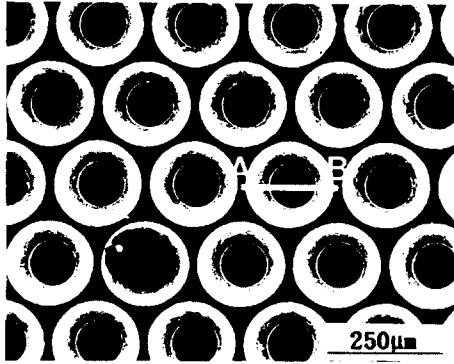


Fig.6 SEM structure of hole-type shadow mask and geometry of hole. (unit: mm)

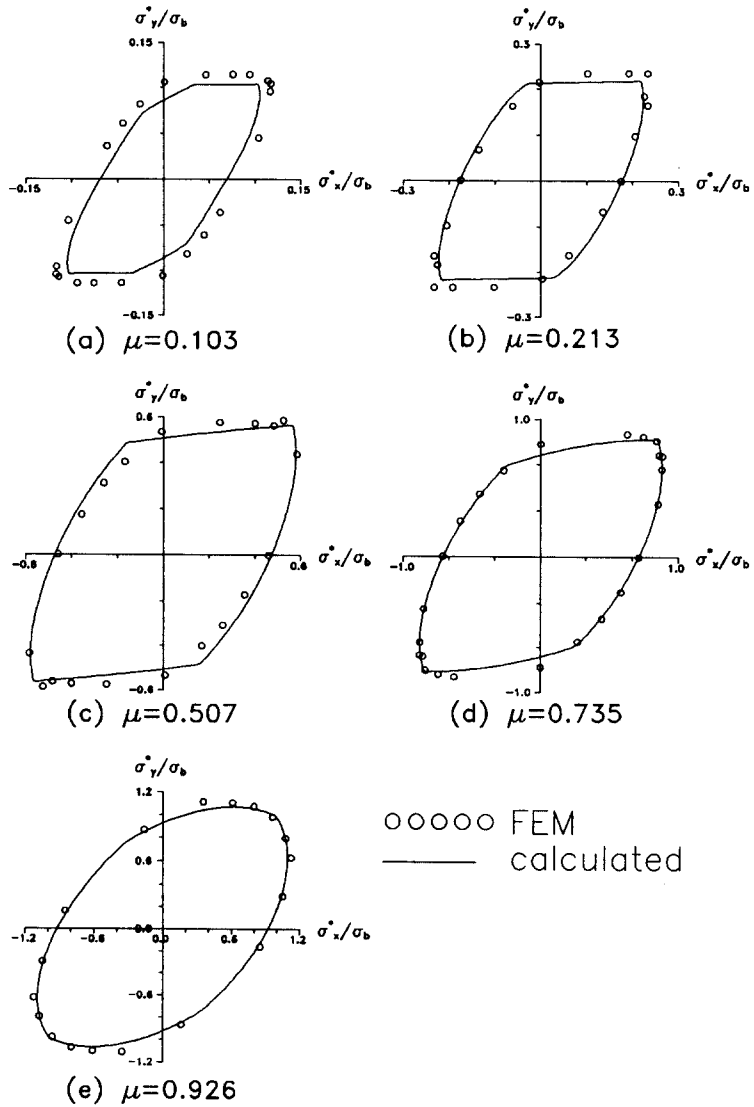


Fig.7 Yield curves calculated using Eq.(6) and analysed by finite element method at various ligament efficiencies

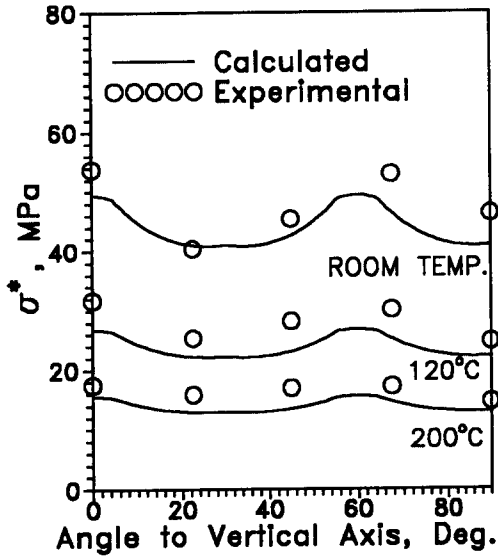


Fig.8 The longitudinal apparent yield stresses under uniaxial tension of shadow mask as a function of angle to the vertical direction, ψ .

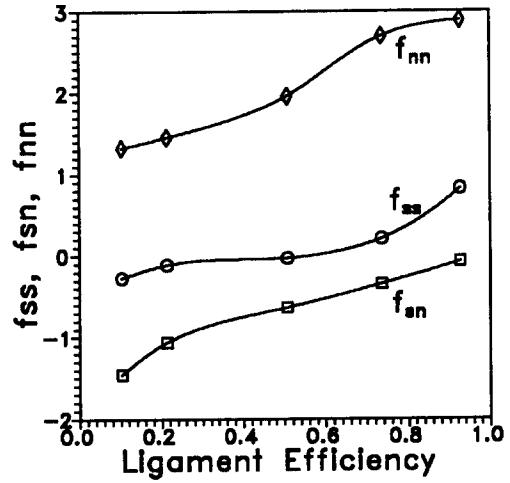


Fig.10 f_{ss} , f_{sn} and f_{nn} in Eq.(9) as a function of ligament efficiency.

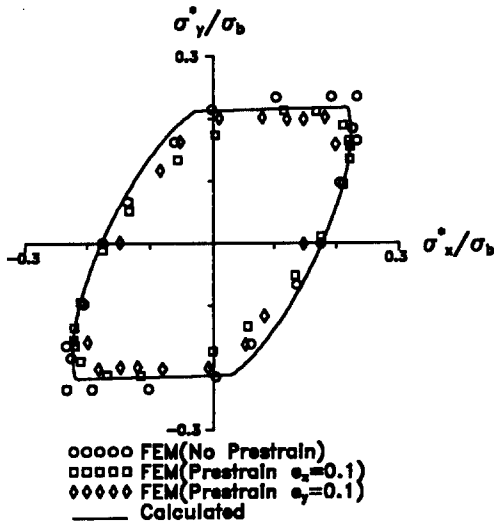


Fig.9 The initial yield curves calculated using Eq.(6) and analysed by FEM compared with the yield curves of perforated sheets prestrained with $\epsilon_x=0.1$ and $\epsilon_y=0.1$, respectively which were analysed by FEM, where the base metal of perforated sheet was assumed not to harden by prestrain and the ligament efficiency was 0.213.

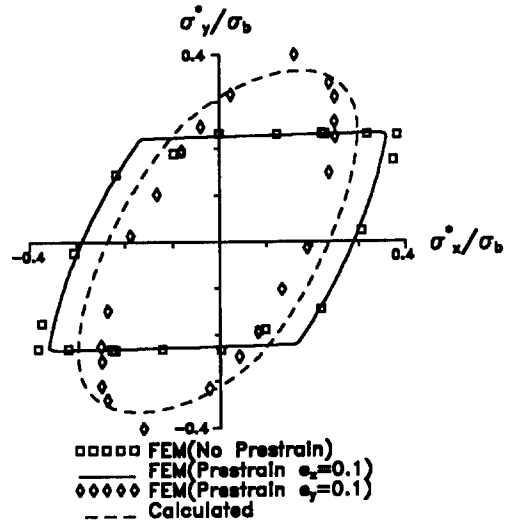


Fig.11 The yield curves of perforated sheets prestrained with $\epsilon_x=0.1$ and $\epsilon_y=0.1$, respectively which were calculated and analysed by FEM, where the ligament efficiency was 0.213.