

트로코이달 헬리컬 기어의 비정상상태 유한요소해석

박용복, 양동열

한국과학기술원 정밀공학과

Nonsteady-state Finite Element Analysis of a Trochoidal Helical Gear

Yong Bok Park, Dong Yol Yang

Dept. of Precision Engineering & Mechatronics, KAIST

Abstract

In metal forming, there are problems with recurrent geometric characteristics and without explicitly prescribed boundary conditions. In such problems, so-called recurrent boundary conditions must be introduced. The present study deals with nonsteady-state three-dimensional finite element analysis for extrusion of a trochoidal helical gear through a curved die. The boundary-directed remeshing scheme based on the modular remeshing technique is developed to reduce the errors arising in fitting old and new mesh systems. The computed extrusion pressure in reaching the near steady-state loading stage is compared with the results of the experiment and the steady-state analysis. The three-dimensional deformed pattern involving warping at the extruded end due to torsional deformation mode is demonstrated.

Key word : Forming, Extrusion, Finite Element Method, Recurrent Boundary Condition

1. 서론

가공재료에 대한 상세한 변형을, 응력분포, 성형하중과 유동특성에 대한 예측은 소성 가공공정에 있어서 대단히 중요하다. 이들 정보들은 제품의 물성치를 좀더 효과적으로 조절하기 위한 압출공정의 적절한 설계를 위해 고려되어야만 한다. 해석을 위한 방법중에 해석적 방법으로써 상계법, 수치적 방법으로서 유한요소법이 압출공정의 해석을 위해 널리 이용되어 왔다. 그러나 복잡한 금형 형상에 대해서 변형율과 응력분포를 포함하는 좀더 상세한 정보를 얻기 위해 유한요소법이 효과적으로 사용될 수 있다. 일부 3차원 예제가 유한요소법을 사용하여 해석되었다[1-3].

헬리컬압출에 대해 Yang등[4]은 축방향 속도가 각 단면에서 일정하다고 가정하여 단면 변환에 의해 연속 금형을 통한 원형 소재로부터 헬리컬 형상의 압출에 대해 상계해를 제시하였다. 연속 다이를 통한 헬리컬 형상의 정상상태 압출에 대한 유한요소해석이 저자등에 의해 이미 수행된 바 있다[5]. 그러나 좀더 확실한 정보를 얻기 위해서는 비정상상태 해석을 수행하는 것이 필요하다.

본 연구에서는 반복경계조건을 사용한 강소성 유한요소법이 곡면금형을 통한 비정상 상태 3차원 헬리컬 압출을 해석하기 위해 사용되며, 금형의 단면에서의 특성축이 축방향을 따라서 회전하는 트로코이달 기어의 압출에 적용된다. 또한 압출하중에 대해 이미 보고된 실험결과[6]와 정상상태해석[5]과 비교된다.

## 2. 트로코이달 기어의 헬리컬 압출을 위한 금형면의 묘사

그림 1에서와 같이 금형면은 다음의 매개방정식으로 나타낼 수 있다.

$$r(\xi, \zeta) = X(\xi, \zeta)\mathbf{i} + Y(\xi, \zeta)\mathbf{j} + Z(\xi, \zeta)\mathbf{k} \quad (1)$$

원통형 좌표계에서 금형면 묘사를 위해  $R(\theta, Z)$ 가 결정되면 식(1)의 각 성분은 다음과 같다.

$$X = R(\theta, Z) \cos\theta \quad (2a)$$

$$Y = R(\theta, Z) \sin\theta \quad (2b)$$

$$Z = Z \quad (2c)$$

금형의 특성축과 함께 회전하는 회전된 좌표계(X, Y, Z)는 그림 1처럼 Z-축에 대해 금형의 비틀림각  $\psi(Z)$ 에 의해 공간상에 고정된 좌표계로 좌표 변환된다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\text{rot}} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{\text{rot}} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\psi(Z) = \frac{\Psi L}{L} Z \quad (3b)$$

트로코이달(trochoidal) 기어형상에 대한 금형면을 묘사하기 위해 식(2)에서의  $R(\theta, Z)$ 는 다음의 형태로 나타낼 수 있다.

$$R(\theta, Z) = \frac{1}{2}\{(f+g) + (f-g) \cos N_s \theta\} \quad (4)$$

여기서,  $N_s$ 는 주어진 단면에 대한 형상반복 대칭축의 수이다. 금형면의 외곽선이 부드럽게 변화하도록 하기 위해 외곽선 함수  $f(Z)$ 와  $g(Z)$ 는 다음과 같이 3차 다항식으로 선택하였다.

$$f(Z) = 1 + \left\{ CL^2 - \frac{3(1-\lambda)}{L^2} \right\} Z^2 + 2 \left\{ \frac{1-\lambda}{L^3} - CL \right\} Z^3 \quad (5a)$$

$$g(Z) = 1 + \left\{ DL^2 - \frac{3(1-\mu)}{L^2} \right\} Z^2 + 2 \left\{ \frac{1-\mu}{L^3} - DL \right\} Z^3 \quad (5b)$$

## 3. 강소성 유한요소법에 대한 수식화

구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (6)$$

여기서  $\dot{\epsilon}$ ,  $\bar{\sigma}$ 와  $\sigma_{ij}$ 는 각각 유효변형률 속도, 유효응력과 편차응력을 나타낸다.

이때 변분방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\int_V \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon} dV + K \int_V \dot{\epsilon}_v \delta \dot{\epsilon}_v dV - \int_{S_f} f_i \delta v_i dS = 0 \quad (7)$$

$\bar{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right) \sigma_{ij} \dot{\sigma}_{ij}}$ ,  $\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right) \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$ ,  $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii}$ 는 다음의 비압축성 조건을 만족시키기 위해 벌칙상수로 사용되는 큰 양의 상수이다.

$$\dot{\epsilon}_{ii} = 0 \quad (8)$$

$f_i$ 는 표면력으로 작용하는 마찰력이며 다음의 형태로 주어질 수 있다.

$$f = -\frac{2}{\pi} mk \tan^{-1}\left(\frac{|V_s|}{u_0}\right) t \quad (9)$$

여기서  $m$ 은 마찰상수,  $k$ 는 항복전단응력이며  $u_0$ 는  $|V_s|$ 에 비해 매우 작은 양수이다.  $V_s$ 는 금형에 대해 상대적인 재료의 속도벡터이며  $t$ 는  $V_s$  방향으로의 단위벡터이다.

#### 4. 형상반복면에 대한 반복 경계조건의 부가

일반적으로 많은 문제들이 대칭면을 가지고 있고 그 대칭면에 경계조건을 부가함으로써 계산시간이 상당히 감소된다. 그러나 해석하고자 하는 형상의 대칭면에서 해석장의 변수가 일정한 값으로 부가되지 않고 단지 반복면들에 대한 관계만 주어질 경우 그에 따른 경계조건을 부가하여 줄 필요가 있다[7, 8].

그림 2의 트로코이달 기어를 보면 전체 영역의 1/8만이 계산시간을 최소화하기 위해 고려된다. Z-축의 임의의 위치에서 X-Y단면은 그림 3에서 보는 것처럼 내부 영역  $\Omega$ 와 3개의 경계면  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 로 이루어져 있다.

$\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 의 반복면 위에서 서로 마주보는 동일한 위치에 있는 절점의 속도 경계조건은 반복각  $\theta$ 만큼 변환된 좌표계에 대해 다음과 같다.

$$V_{\Gamma_1} = V_{\Gamma_2} \quad (10)$$

뉴우튼-랩슨(Newton-Raphson)법을 사용하면 식 (7)은 다음과 같이 선형화된다.

$$K \Delta V = R \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} [K_{\Omega\Omega}] & [K_{\Omega\Gamma_1}] & [K_{\Omega\Gamma_2}] & [K_{\Omega\Gamma_3}] \\ & [K_{\Gamma_1\Gamma_1}] & [K_{\Gamma_1\Gamma_2}] & [K_{\Gamma_1\Gamma_3}] \\ & & [K_{\Gamma_2\Gamma_2}] & [K_{\Gamma_2\Gamma_3}] \\ \text{Sym.} & & & [K_{\Gamma_3\Gamma_3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Delta V_{\Omega}] \\ [\Delta V_{\Gamma_1}] \\ [\Delta V_{\Gamma_2}] \\ [\Delta V_{\Gamma_3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{\Omega}] \\ [R_{\Gamma_1}] \\ [R_{\Gamma_2}] \\ [R_{\Gamma_3}] \end{bmatrix} \quad (12)$$

반복면  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 에서 식(10)에 의해 식 (11)에서의 속도 벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta V = \begin{bmatrix} [\Delta V_{\Omega}] \\ [\Delta V_{\Gamma_1}] \\ [\Delta V_{\Gamma_2}] \\ [\Delta V_{\Gamma_3}] \end{bmatrix} = T_{rec} \Delta V_r \quad (13)$$

$$T_{rec} = \begin{bmatrix} [I] & O & O \\ O & [I] & O \\ O & [I] & O \\ O & O & [I] \end{bmatrix}, \Delta V_r = \begin{bmatrix} [\Delta V_{\Omega}] \\ [\Delta V_{\Gamma_1}] \\ [\Delta V_{\Gamma_3}] \end{bmatrix} \text{ and } [I] = \text{identity matrix}$$

### 5. 단위체 격자 재구성법에 근거한 경계 지향적인 격자 재구성법

반복경계조건을 가진 소성변형 문제의 해석에 있어서 해석하고자 하는 문제의 영역을 반복적인 경계를 갖는 최소의 영역으로 나누어 유한요소법을 적용할 때 각 경계면은 평면이 아닌 곡면을 이루게 되고 중간 변형 단계에서 격자 재구성을 할 때 그에 따르는 방법이 요구된다. 이를 위해서는 먼저 소성변형의 유동특성을 고려하여 단위체 격자 재구성법으로부터 목표로 하는 격자계의 기본적인 데이타(nodal coordinates, element connections)를 저장하고 다음과 같은 과정에 의해 격자 재구성이 이루어진다.

#### Step I. 제어점(control point) 선택

- 이전의 격자계로부터 제어점(A~F)을 선택한다. (그림 4(a))

#### Step II. 경계선(boundary edge line) 정의

##### 1) 이전 격자계 (old mesh system)

- Step I에서 선택된 제어점과 제어점 사이의 절점들을 이용하여 퍼그슨 곡선(ferguson curve)을 생성한다.

##### 2) 새로운 격자계(new mesh system)

이전의 격자계에서 선택된 제어점으로부터 그림 4(b)처럼 기본적인 직선과 곡선으로 이루어진 3차원 영역을 만들고 새로운 격자계의 절점의 조밀도를 결정한다. 새롭게 구성된 경계선상의 절점을 이전 격자계의 경계선에 일치시키기 위해 좌표축에 따라 다음과 같이 2가지의 fitting 방법을 병행한다.

- 특정축에 대한 회전
- 특정축에 따른 투영

#### Step III. 경계면의 절점 생성

앞서의 단계에서 결정된 각 경계선(boundary edge line)상의 절점들을 이용하여 쌍일차(bilinear)좌표로서 각 경계면(boundary surface)의 절점 좌표를 구성하는데 이

와 같이 생성된 각 절점은 격자계의 경계면과 일치하여야 하므로 위에서 제안한 2가지 fitting 방법중 적절한 방법을 통하여 경계면을 일치시킨다.

#### Step IV. 경계면 내부 절점 생성

단위체 격자 재구성법으로부터 얻어진 그림 5의 기본적인 격자 구조에 근거하여 step III에서 구하여진 경계면 데이터로부터 일정한 방향으로 주어진 가중치에 따라 절점을 transfinite mapping 또는 특정 축에 대해 회전한 좌표를 구한다.

### 6. 결과 및 토론

트로코이달기어의 금형 형상은 그림 2와 같으며 금형의 비틀림 각  $\Psi_L = 45^\circ$ , 금형 입구로부터 출구까지의 길이는 30mm, 입구의 반경은 15mm로 하였다. 또한 재료로서는 Al2024가 선택되고 그것에 대한 응력 변형도 관계는 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = 358.0 (\bar{\epsilon})^{0.156} \text{ (MPa)}$$

마찰상수  $m$ 은 0.12로 하였다.

그림 5에 초기의 격자계가 보여져 있으며 펀치 및 소재선단부 행정과 하중에 대한 관계는 그림 6과 같다. 전방압출시 소재의 선단부가 금형을 빠져나오면서 소재는 정상상태의 변형을 보여준다. 정상 상태에 도달할 때 하중의 크기에 있어서의 변동은 수치 해석시 금형면과 유한 요소의 절점 사이에 접촉관계로부터 발생하는 것이다. 비정상상태 해석으로부터 정상상태 도달 하중과 정상상태 해석으로부터의 압출하중이 거의 일치함을 알 수 있다.

비정상 상태의 헬리컬 압출 변형에서는 소재 선단부의 행정 길이가  $l=21(\text{mm})$ 일 때와  $l=29(\text{mm})$ 일 때 격자 재구성을 필요로 한다. 그림 7(a)에  $l=21(\text{mm})$ 일 때의 격자 구조를 보여주며 원으로 표시한 금형의 단축 부분에서 재료가 심한 압축과 비틀림 변형을 받기 때문에 계산을 더 이상 수행할 수가 없었다. 또한 각 경계면이 곡면을 형성하고 있음을 알 수 있다. 앞에서 소개한 경계 지향적인 격자 재구성법에 의해 발생한 격자 구조는 그림 7(b)와 같다. 또한  $l=29(\text{mm})$ 일 때의 격자 재구성 전과 후의 격자 구조를 그림 4-8에 보여준다.

그림 6에서 알 수 있는 것처럼 소재 선단부 행정 길이  $l=34.2(\text{mm})$ 일 때 정상 상태에 도달하였으며 그때의 격자 구조가 그림 9에 나타나 있다. 이 때 금형의 입구와 중간 위치, 출구의 각 단면의 X-Y 평면내에서의 속도 분포를 그림 4-10에 보여주고 있다. 금형면이 Z-방향으로 부드러운 3차 곡선을 이루고 있어 금형의 입구와 출구에서는 반경 방향으로의 압축 변형이 미소하기 때문에 재료 유동이 거의 없으며 금형의 비틀림 방향

으로의 유동이 지배적이다. 그러나 중간 위치에서는 압축 변형과 비틀림 변형이 동시에 일어남을 확연히 알 수 있다. 금형 출구 단면에서의 유효변형도 분포는 그림 11과 같으며 정상상태 해석 결과와 거의 일치한다.

그림 12는 재료의 선단부가 금형의 입구, 중간 위치, 출구를 통과할 때의 각각의 변형 모습을 보여준다. 일반적으로 금형의 비틀림각이 없는 압출에서는 X-Y 평면의 중심부에서 Z방향으로의 재료의 유동이 가장 빠르고 다음에 단축, 장축의 순서로 진행되나 헬리컬 압출에서는 비틀림 변형에 의한 뒤틀림 현상으로 선단부의 변형이 복합적인 양상을 띠고 있음을 알 수 있다.

그림 13은 계속적인 압출에 의하여 성형된  $l=50(\text{mm})$ 일 때의 변형 형상을 보여준다.

## 7. 결론

반복경계조건을 이용한 강소성 유한요소해석이 곡면금형을 통한 원형소재로부터 트로코이달 헬리컬기어 형상의 비정상상태 3차원 압출에 대해 제안되었으며 경계지향적인 격자 재구성 기법이 곡면의 경계면을 가진 형상의 경우에 효과적인 격자 재구성을 위하여 제안되었다. 계산되어진 압출 압력이 실험 및 정상상태 해석결과와 비교되었다. 금형의 각 위치에서 재료 선단부의 변형 형상이 비틀림 변형시에 나타나는 뒤틀림 현상을 보여 주었으며 각 단면의 속도분포로부터 압출과 비틀림 변형이 동시에 일어남을 확인할 수 있다.

## REFERENCES

- [1] Boer, C. R. and Webster, W. D., 1985, Direct upper-bound solution and finite element approach to round-to-square drawing, Trans. ASME. J. of Eng. for Ind., 107:254-260.
- [2] Yang, D. Y., Lee, C. M. and Yoon, J. H., 1989, Finite element analysis of steady-state three-dimensional extrusion of sections through curved dies, Int. J. Mech. Sci., 31:145-156.
- [3] Yang, D. Y., Yoon, J. H. and Lee, C. M., 1990, Computer-aided numerical analysis and design for cold extrusion of a spur gear, Proc. Instn. Engrs. 204:203-209.
- [4] Yang, D. Y. Kim, M. U. and Lee, C. H., 1978, An analysis for extrusion of helical shapes from round billets, Int. J. Mech. Sci., 20:695-705.
- [5] Park, Y. B., Yoon, J. H. and Yang, D. Y., 1994, Finite element analysis of steady-state three-dimensional helical extrusion of twisted sections using recurrent boundary conditions, Int. J. Mech. Sci., 36:137-148.
- [6] Lee, C. M., 1985, Analysis of three-dimensional lubricated extrusion of general helical shapes,

M. S. thesis, Korea-Advanced Institute of Science and Technology.

- [7] Bathe, K. J., 1982, Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [8] Zienkiewicz, O. C. and Scott, F. C., 1972, On the principle of repeatability and its application in analysis of turbine and pump impellers, Int. J. Numer. Methods Engng. 4:445-452.

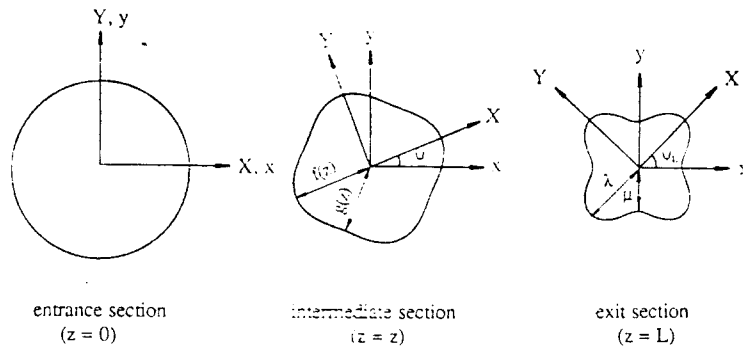


Fig. 1. Coordinate systems for description of the die surface

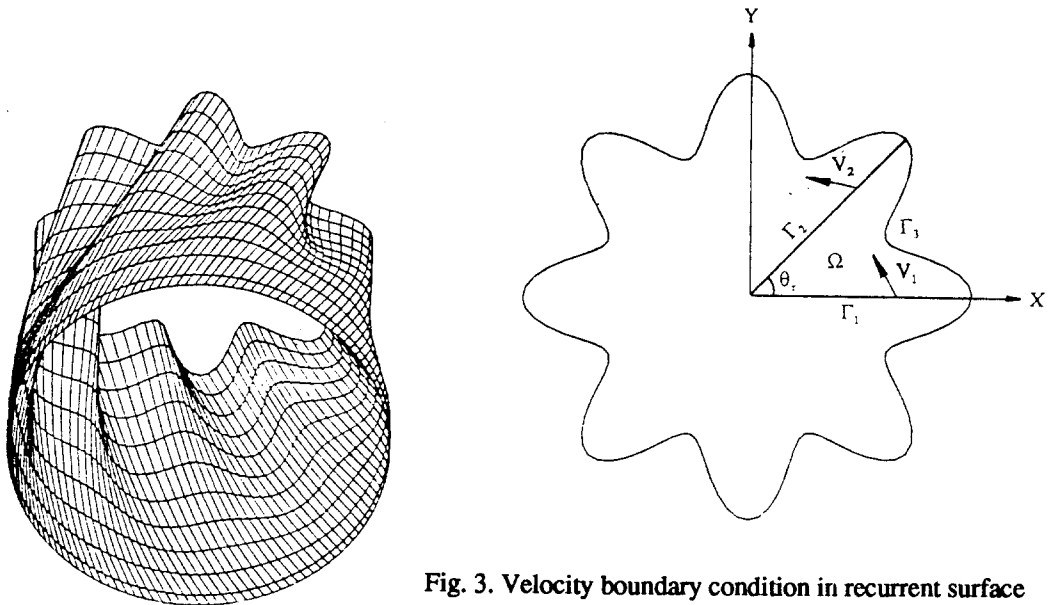


Fig. 3. Velocity boundary condition in recurrent surface

Fig. 2. Configuration of die shape generated by the present method for a trochoidal gear ( $\psi_L = 45^\circ$ )

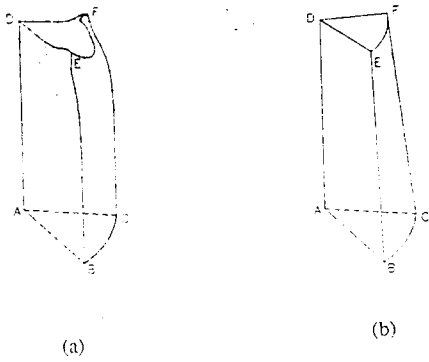


Fig. 4. Selection of control points  
 (a) old mesh system (b) new mesh system

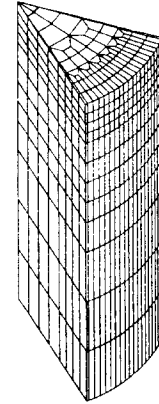


Fig. 5. Initial billet and its mesh system for helical extrusion

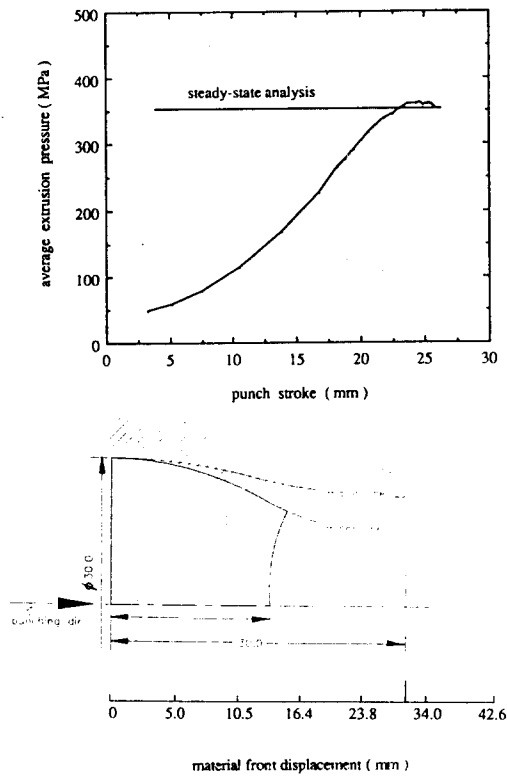


Fig. 6. Comparison of extrusion pressure for experiment steady-state analysis and nonsteady-state analysis

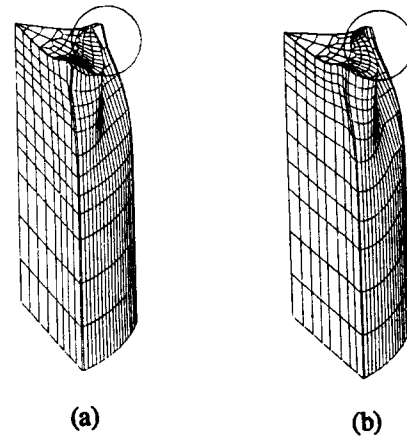
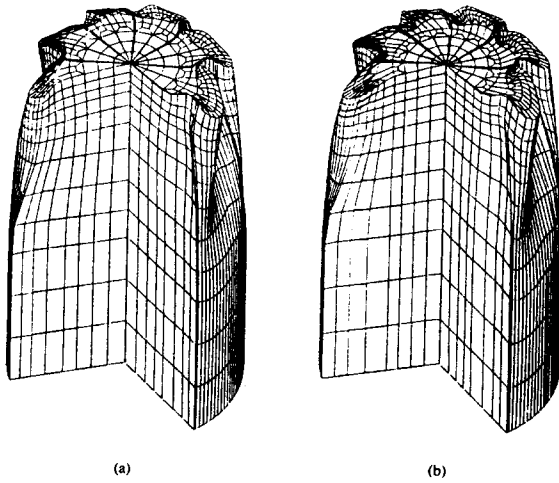
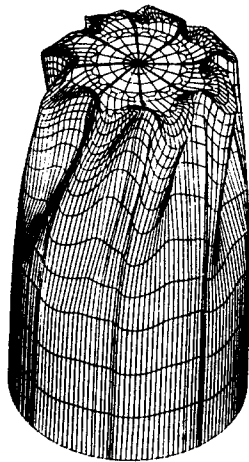


Fig. 7. Mesh configuration at the displacement of the material front  $l=21$ (mm)  
 (a) before remeshing (b) after remeshing

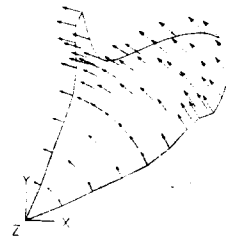




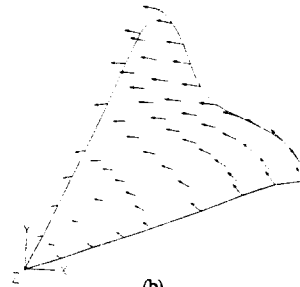
**Fig. 8. Mesh configuration at the displacement of the material front  $l=29(\text{mm})$   
 (a) before remeshing (b) after remeshing**



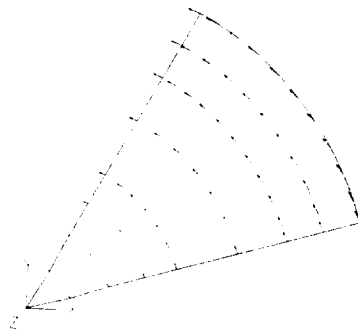
**Fig. 9. Mesh configuration at the loading stage  
 ( $l=34.2(\text{mm})$ )**



(c)

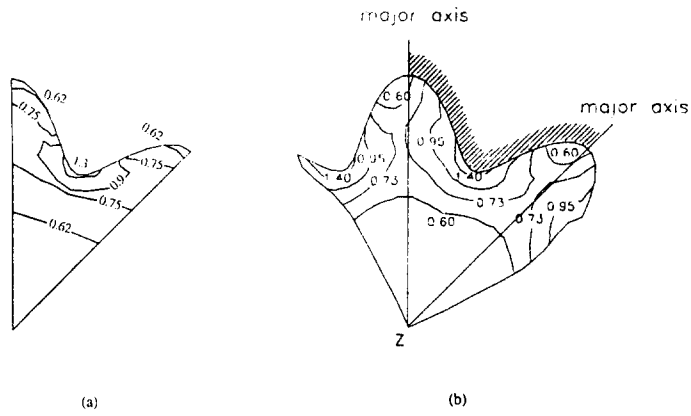


(b)

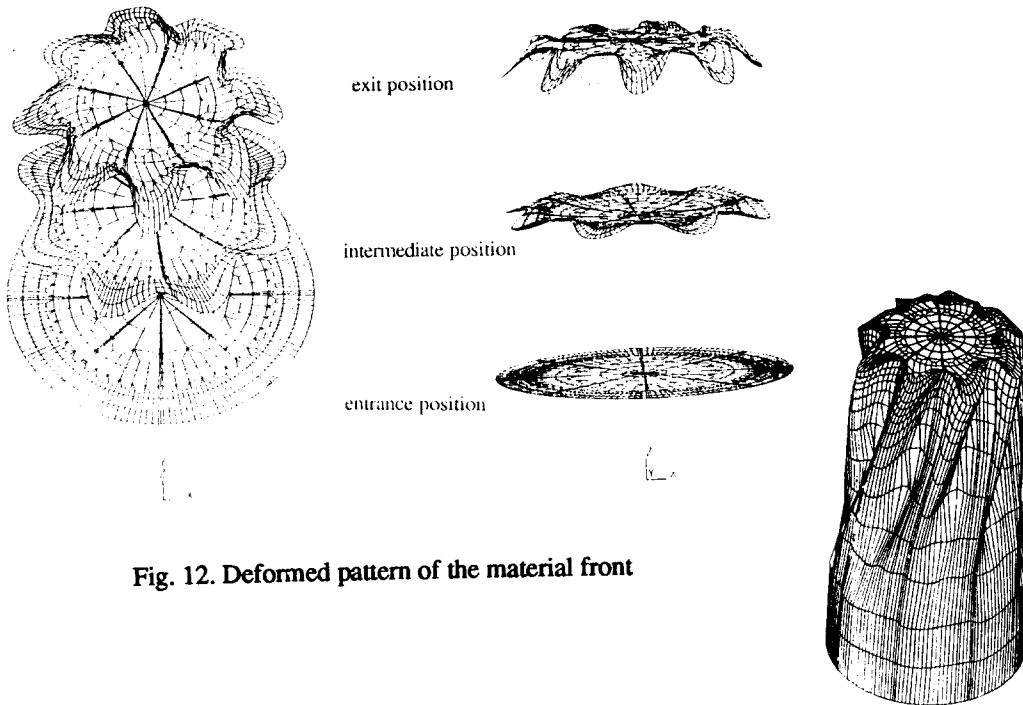


(a)

**Fig. 10. Velocity distribution x-y plane at the steady-state loading stage  
 (a) entrance section (b) intermediate section (c) exit section**



**Fig. 11. Distribution of the effective strain at the exit section of the die**  
**(a) steady-state analysis (b) nonsteady-state analysis**



**Fig. 12. Deformed pattern of the material front**

**Fig. 13 Mesh configuration at the loading stage ( $l = 50$  (mm))**