

고균등자장 발생용 초전도 마그네트의 설계

진홍범^o, 나완수, 류강식
한국전기연구소 초전도응용연구사업팀

Design of high homogeneity superconducting magnet

Hong-Beom Jin^o, Wan-soo Nah, Kang-sik Ryu
Applied Superconductivity Lab. KERI

Abstract

High homogeneity and stability are required in superconducting magnet for Magnetic Resonance Imaging. In this paper, Magnetic Field theories for the design of high homogeneity magnet are introduced and multi-sections solenoid type coils are optimized to produce highly homogeneous field.

1. 서론

고균등 초전도 마그네트는 현재 임상현장에 급속도로 보급되고있는 MRI(Magnetic Resonance Imaging)시스템에 필수적이다. MRI시스템에 필요한 자장의 세기는 양성자를 기준으로 하여 0.5-2(Tesla) 정도이고, 30-50cm DSV(Diameter of Spherical Volume)의 공간 내에서 1-10 PPM(Part Per Million)의 자장균등도가 요구된다. 본 논문에서는 고균등 마그네트의 설계에 필요한 수식을 정리하고 설계 예로서 보아 내경이 28cm이고 중심자장이 2(Tesla)인 동물시험용 MRI 마그네트의 설계결과에 관하여 기술한다. 단, 본 논문에서는 c. g. s. 단위계를 사용한다.

2. 다분할 솔레노이드형 코일에 의한 균등자장 발생의 기본 원리

Z축에 대하여 축대칭(axial symmetry)인 솔레노이드형 코일의 Z축상 자속밀도는 다음과 같이 축상 거리의 함수로서 Taylor Series로 나타낼 수 있다.

$$B_z(z) = B_z(0) + \frac{\partial B_z(0)}{\partial z} z + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_z(0)}{\partial z^2} z^2 + \dots \quad (1)$$

균등자장 발생용 마그네트의 설계는 중심부근의 어느 일정공간 내에서 중심자장에 근사한 자장값만 발생하도록 만드는 것이므로 식(1)에서 $B_z(0)$ 이외의 항들은 자장의 불균일을 나타내는 항들로서 n차의 자장 불균일 성분으로 정의하기로 한다. 다분할 솔레노이드형 코일에서는 그림1과 같이 Z=0 평면에 대하여 대칭이 되도록 코일을 배치한다. 이 경우에는 식(1)에서 홀수차 항이 상쇄되고 짝수차 항만 남게된다. 그림1에는 두 코일의 간격에 따른 축상 자장의 분포를 나타냈다. 두 경우 모두 식(1)의 2승항 형태의 자장분포를 갖는데 (a)에서는 양의 값을 (b)에서는 음의 값을 갖는다. 따라서, 이 두 자장

이 합쳐지면 2차의 불균일 성분은 상쇄되어 중심 부근에서의 자장균등도가 향상된다. 이와같이 각 차수의 자장 불균일 성분이 서로 상쇄되도록 다수의 솔레노이드형 코일을 공간적으로 배치하는 것이 다분할 솔레노이드형 코일에 의한 균등자장 발생의 기본 원리이다.

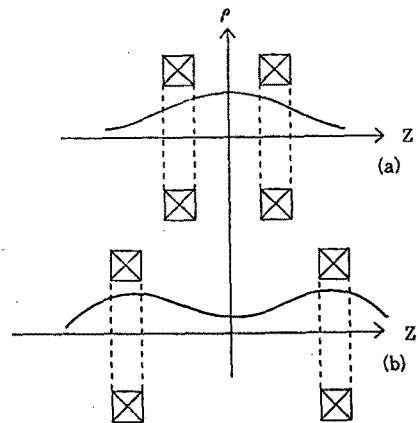


그림1. 2분할 솔레노이드형 코일의 Z축상 자장분포

3. 솔레노이드형 코일의 자장 이론

전류원이 없는 공간 내에서 스칼라 자기 포텐셜 V는 Laplace equation을 만족한다.

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2)$$

식(2)는 구좌표계를 적용하여 구하면 다음과 같은 형태의 해를 갖는다.

$$V = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi) = R(r) \cdot S(\theta, \phi) \quad (3)$$

여기서 $R(r)$ 은 구의 반경 r의 함수이고, $S(\theta, \phi)$ 는 구표면상의 위치의 함수 이므로 스칼라 자기 포텐셜 V의 변화는 반경 r의 함수와 구 표면상의 위치의 함수의 곱으로 나타내진다. 구 표면상의 위치 함수 $S(\theta, \phi)$ 는 Surface harmonics 이라한다. 만일 ϕ 가 일정할 경우 θ 만의 함수 S는 Surface Zonal harmonics이라 하며, θ 가 일정할 경우 ϕ 만의 함수 S는 Circular harmonics이라 한다. 식(3)의 각 독립함수는 변수분리에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$R(r) = A r^n + B r^{-n-1}$$

$$\Phi(\phi) = C \sin m \phi + D \cos m \phi$$

$$\Theta(\theta) = E P_m^n(\cos \theta) + F Q_m^n(\cos \theta) \quad (4)$$

여기서 m, n 은 정수(단 $m \leq n$), A, B, C, D, E, F 는 경계조건에 의해 결정되는 계수이고 $P_n^m(\cos \theta)$ 와 $Q_n^m(\cos \theta)$ 는 각각 1, 2차 associated Legendre function이다.

식(3), (4)로부터 구좌표계에서 라플라스 방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A r^n + B r^{-n-1}) \sum_{m=0}^{m=n} [C P_n^m(\cos \theta) + D Q_n^m(\cos \theta)] \times [E \sin m \phi + F \cos m \phi] \quad (5)$$

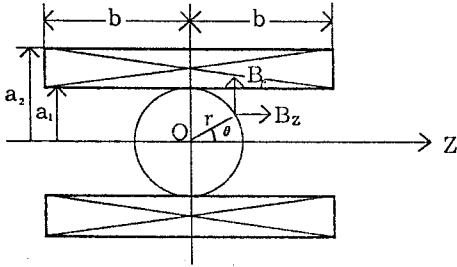


그림2. 솔레노이드형 코일의 형상

그림2의 솔레노이드형 코일의 경우에 경계조건을 적용하면 스칼라 자기 포텐셜은 다음과 같이 간단해진다. 그림2에서 라플라스 방정식이 성립하는 영역은 코일 내반경 a_1 의 구내이다. 이 구내의 미소반경 내에서 포텐셜은 유한한 값을 가지므로 식(4)의 첫번째 식에서 계수 B 는 0이 되어야 한다. 또한 그림2의 코일은 OZ 축상에서 포텐셜이 유한한 값을 유지한다. 따라서 식(4)의 세번째 식에서 2차 associated Legendre function은 제외되어야 한다. 이상을 종합하면 솔레노이드형 코일의 내반경 a_1 의 구내의 한점 P 에서의 스칼라 자기 포텐셜은 다음식으 로 된다.

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=n} r^n P_n^m(\cos \theta) [A_n^m \cos m \phi + B_n^m \sin m \phi] \quad (6)$$

만일 그림2의 솔레노이드형 코일이 z 축에 대하여 완전 축대칭인 이상적인 경우 이라면 포텐셜 V 는 ϕ 에 따라 변화하지 않고 θ 및 r 의 변화에만 의존하는 Zonal harmonics가 된다. 즉 식(6)에서 $m=0$ 인 경우 associated Legendre function은 Legendre Polynomial이 되어 포텐셜 V 는 다음식으로 간단해진다.

$$V(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (7)$$

다음의 관계식을 이용하여 자속밀도 B 의 axial 성분과 radial 성분을 구하면 각각 식(9), (10)과 같다.

$$B = \text{grad} V$$

$$(\partial/\partial Z)(r^n P_n) = n r^{n-1} P_{n-1}$$

$$(\partial/\partial \rho)(r^n P_n) = -\sin \theta r^{n-1} P_{n-1} \quad (8)$$

$$B_z(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n B_{z(0)}}{\partial Z^n} r^n P_n(\cos \theta) \quad (9)$$

$$B_\rho(r, \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^n B_{z(0)}}{\partial Z^n} r^n \sin \theta P_n'(\cos \theta) \quad (10)$$

그림2의 솔레노이드형 코일이 $Z=0$ 평면에 대하여 대칭인 경우 식(9), (10)에서 n 은 짝수차 항이 된다.

다분한 솔레노이드형 코일에 의한 균등자장 마그네트의 설계는 2절에서 언급한바와 같이 자장불균일 성분을 상쇄시키는 것으로 마그네트의 자장 불균등도 (field inhomogeneity)는 상쇄되지 않는 최초의 고차항에 의해 결정된다. 일반적으로 MRI에 필요한 자장 균등도를 얻기 위해서는 최소한 6차항까지 상쇄되도록 설계해야 한다. 즉 8th order 마그네트가 되도록 한다. 이와 같이 정해진 각 차수항에서 B_z 와 B_ρ 의 자장분포는 다음식을 이용하여 등어리곡선 (error contour)를 그려봄으로써 알 수 있다.

$$r^n P_n(\cos \theta) = \text{Const.} \quad (11)$$

$$r^n \sin \theta P_n'(\cos \theta) = \text{Const.} \quad (12)$$

그림3에는 B_z 및 B_ρ 성분에 대해 $n=2, 4, 6$, 일때, 즉 2nd, 4th, 6th order의 등어리곡선을 나타냈다. 그림3에서 알 수 있는 바와같이 B_ρ 성분의 등어리곡선은 기본적으로 B_z 성분의 등어리곡선과 동일하며, B_z 성분의 등어리곡선을 $\pi/4m$ ($m=1, 2, 3, \dots$)만큼 회전시킨 형상이다. 따라서 B_z 성분의 균등도를 향상시키면 B_ρ 성분의 균등도는 자동적으로 향상되어 전체 자장 균등도가 증가하게 된다. 이와같은 이유 때문에 균등자장 마그네트의 설계에서는 식(9)로 주어지는 Z 축 성분의 자장만 고려해드 된다.

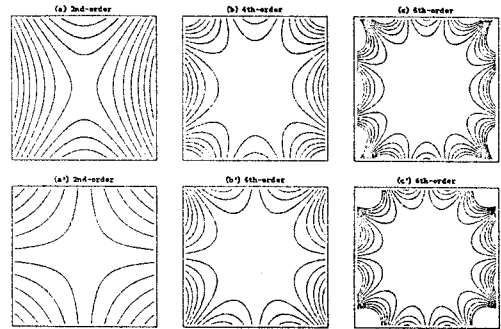


그림3. B_z 와 B_ρ 성분의 등어리곡선

(a), (b), (c) : B_z 의 등어리곡선

(a'), (b'), (c') : B_ρ 의 등어리곡선

4. Main coil의 설계

균등자장 마그네트는 균등자장을 발생시키는 main coil과 마그네트의 제작오차에 의해 발생하는 자장의 불균등 성분을 상쇄시켜주는 shim coil로 구성된다. 본 절에서는 main coil의 설계식을 정리하고 설계 예로서 5분할 초전도 마그네트의 설계 결과를 기술한다.

그림2의 솔레노이드형 코일이 축대칭이고 $z=0$ 평면에 대하여 대칭인 경우 z 축상의 자속밀도는 Biot-Savart의 법칙으로부터

$$B_z = 0.2\pi j a_1 \left[(\beta + \frac{z}{a_1}) \ln \frac{\alpha + [\alpha^2 + (\beta + z/a_1)^2]^{1/2}}{1 + [1 + (\beta + z/a_1)^2]^{1/2}} + (\beta - \frac{z}{a_1}) \ln \frac{\alpha + [\alpha^2 + (\beta - z/a_1)^2]^{1/2}}{1 + [1 + (\beta - z/a_1)^2]^{1/2}} \right] \quad (13)$$

여기서 j 는 평균전류밀도 (A/cm^2), $\alpha = a_2/a_1$, $\beta = b/a_1$ 이다. 중심점에서의 자속밀도는 식(13)에 $z=0$ 를 대입하고, 형상상수 $F(\alpha, \beta)$ 를 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$B_0 = j a_1 F(\alpha, \beta) \quad (14)$$

여기서 $F(\alpha, \beta) = 0.4\pi \beta \ln \frac{\alpha + [\alpha^2 + \beta^2]^{1/2}}{1 + [1 + \beta^2]^{1/2}}$ 이다.

식(13)을 이용하여 식(9)의 Zonal harmonics를 전개하면

$$B_z(r, \theta) = j a_1 [F(\alpha, \beta) + F(\alpha, \beta) E_2 \left(\frac{r}{a_1}\right)^2 P_2(\cos \theta) + F(\alpha, \beta) E_4 \left(\frac{r}{a_1}\right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots] \quad (15)$$

여기서 $E_n = \frac{1}{B_0} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n B_z(0)}{\partial z^n}$, ($n=2, 4, 6, \dots$)이다.

식(15)에서 $F(\alpha, \beta) E_n$ 은 n 차의 자장 불균등성을 나타내는 계수(error coefficient)로서 고균등 자장을 발생시키려면 가능한 고차항까지 최소화 시키야 한다.

그림4는 5분할 솔레노이드형 코일의 의해 8차항 까지의 error coefficient를 최소화 시킨 10th order 초전도 마그네트의 자장분포도이다. 중심자속밀도는 운전전류 170[A]에서 약 2[Tesla]이고, 인덕턴스는 7.78[Henry], 자장균등도는 직경 10cm 구내에서 0.3 ppm이다.

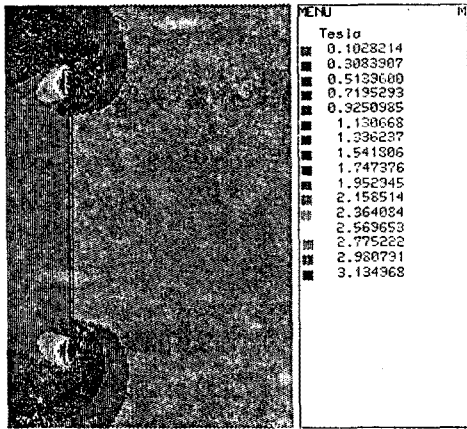


그림4. 5분할 솔레노이드형 코일의 자장분포도(축대칭)

5. Shim coil의 설계

Main coil의 설계시 코일이 z 축에 대하여 축대칭인 이상적인 경우에 한정하고, 다수의 솔레노이드형 코일을 대칭적으로 배치하였다. 그러나 실제 마그네트는 권선오차, 선재의 직경 불균일 및 외부 자성체의 영향등의 원인 때문에 z 축에 대하여 축대칭이 되지 못하며, $z=0$ 평면에 대해서도 비대칭이 된다. 따라서 요구되는 자장 균등도를 얻기 위해서는 이러한 영향에 의한 자장의 불균등 성분을 상쇄시켜주는 shim coil이 필요하게 된다.

z 축에 대하여 축대칭이 되지않는 경우 솔레노이드형 코일의 중심부근에서의 스칼라 자기포텐셜은 식(6)으로 주어지므로 z 축 성분의 자속밀도는

$$B_z = -\cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (16)$$

으로 부터 다음식으로 주어진다.

$$B_z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} r^n [(n-m+1) \cos \theta P_{n-1}^m(\cos \theta) + \sin \theta P_n^m(\cos \theta)] \times [A_{n-1}^m \cos m \phi + B_{n-1}^m \sin m \phi] \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

식(17)을 직각좌표계를 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$B_z = A_0^0 + 2A_2^0 + 3A_4^0 + 3B_2^1 Y + 3A_4^2 (2Z^2 - X^2 - Y^2) + 12A_4^3 Z X + 12B_4^3 Z Y + 15A_6^2 (X^2 - Y^2) + 15B_6^2 (2XY)$$

$$+ A_4^0 Z [8Z^2 - 15(X^2 + Y^2)]/2 + 15A_4^1 X (4Z^2 - X^2 - Y^2)/2 + 15B_4^1 Y (4Z^2 - X^2 - Y^2)/2 + 90A_6^3 Z (X^2 - Y^2) + 90B_6^3 Z (2XY) + 105A_6^4 X (X^2 - 3Y^2) + 105B_6^4 Y (3X^2 - Y^2) + \dots \quad (18)$$

어떠한 원인에 의해 발생한 불균등 자장은 식(18)을 이용하여 harmonics로 전개할 수 있으며, shim coil을 이용하여 비교적 값이 큰 저차수 항 부터 상쇄시켜 줌으로써 균등자장을 얻을 수 있다.

본 논문에서는 Z^1 및 Z^2 의 axial gradient와 X 및 Y 의 radial gradient를 상쇄시키기 위한 초전도 shim coil을 설계 하였다. Z^1 및 Z^2 의 axial gradient를 발생시키기 위해서 그림5의 (a), (b)와 같이 소형의 솔레노이드형 코일을 $z=0$ 평면에 대하여 비대칭 또는 대칭적으로 배열하고 각각 Z^1 및 Z^2 이외의 axial gradient는 최소가 되도록 간격 및 권선수를 결정하였다. X 의 radial gradient는 그림5의 (c)와 같이 saddle형의 코일을 Z 축에 대하여 대칭적으로, 그리고 X 축에 대하여 비대칭적으로 배열하고 3차의 radial gradient X^3, XY^2, XZ^2 가 최소화 되도록 설계하였으며, Y 항의 shim coil은 X 항 shim coil을 Z 축에 대하여 90° 회전시키면 된다. shim coil에 의해 발생가능한 axial gradient는 각각 $0.2G \text{ cm}^{-1} \text{ A}^{-1}$, $6.12 \times 10^{-2} G \text{ cm}^{-2} \text{ A}^{-1}$ 이고, radial gradient는 $0.13G \text{ cm}^{-1} \text{ A}^{-1}$ 이다.

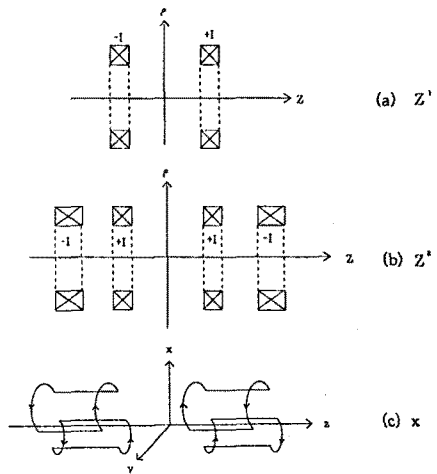


그림5. Shim coil의 구조

6. 결론

본 논문에서는 스칼라 자기 포텐셜 V 를 사용하여 $B = \text{grad } V$ 로 표현되는 B 를 구좌표계에서 Legendre의 Spherical harmonics 로 전개함으로써 고균등 마그네트의 설계에 필요한 수식을 정리하고 본 수식을 이용하여 동물시험용 초전도 MRI 마그네트의 main coil 및 shim coil을 설계하였다. 본 논문의 이론식과 설계방법은 고균등 마그네트의 설계에 매우 유용하리 라고 판단된다.

7. 참고문헌

1. Static and Dynamic Electricity, W. R. SMYTHE, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1950
2. Solenoid Magnet Design, D. B. MONTGOMERY, 1980