

주기성이 있는 3차원 모델의 유한요소해석

이준호, 이복용**, 임종관***, 이기식*
 단국대학교, **대우공업전문대학, *한국권선기술 (주)

Finite Element analysis of 3 dimensional model with periodic structure

Joon-Ho Lee, **Bok-Yong Lee, ***Jong-Kwan Lim, *Ki-Sik Lee
 *Dankook University, **Daeyeu Technical College, ***Korea Winding Technology Co, LTD.

abstract - This paper deals with the 3 dimensional finite element analysis using the periodic boundary condition in case analyzing model has a periodic structure. Using the periodic boundary condition we can reduce computer's memories and computation time, because only the one period of the model is analyzed. To verify the usefulness of the proposed algorithm, can stack type PM step motor which used in FDD head driver is choosen and analyzed.

1. 서론

유한요소법[1][2]은 연속체를 등가적인 이산계로 모델링하고, 이산화된 요소행렬로부터 계행렬을 구성한 다음, 이를 풀어 결과를 얻는 수치해석적 기법 중의 하나이다. 유한요소법은 복잡한 경계조건의 처리, 재질의 비선형성과 이매질의 처리, 해의 안정성 및 격용의 용이성 등의 이유로 해석영역 및 경계조건의 설정이 용이한 경우에 널리 이용되고 있다.

해석 하고자하는 모델이 공간적인 주기를 가지고 있으면 주기경계조건을 부여해서 한 주기에 해당하는 영역만을 해석하여 전체를 대표할 수 있다. 이것은 계의 구성이 주기적인 상태에 있으므로 해석모델의 포텐셜과 모든 양들도 주기적으로 같은 값을 갖게 되기 때문이다. 주기경계조건을 사용하면 한 주기만을 해석하므로 전체를 해석하는 경우에 비해 컴퓨터의 기억용량과 계산시간을 절감할 수 있다. 특히 모델이 3차원인 경우에는 미지수가 2차원에 비해 현저히 증가하므로 그 유용성이 두드러진다.

본 연구에서는 주기성이 있는 3차원 모델에 대해 주기경계조건을 부여하여 한 주기만을 해석할 수 있는 알고리즘을 제시하였다. 제시한 알고리즘의 유용성을 알아보기 위해 FDD 헤드 구동용으로 사용되는 can stack 형 PM 스텝모터를 대상으로 이를 적용하였다.

2. 해석 이론

본 연구의 모델은 시간에 대한 전류의 변화가 없는 것으로 보아 정자장 문제로 취급하였다. 본 장에서는 3차원 유한요소법의 정식화와 이에 따른 주기경계조건을 부여하는 절차에 대하여 기술하였다.

2.1 유한요소정식화

변위전류를 무시한 maxwell 방정식과 보조방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2)$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H} + \vec{M}_0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

여기서, \vec{H} : 자계의 세기 [A/m]

\vec{J} : 전류 밀도 [A/m²]

\vec{B} : 자속밀도 [Wb/m²]

μ_0 : 진공중에서의 투자율 [H/m]

\vec{M} : 자화의 세기 [A/m]

χ : 자화율

\vec{M}_0 : 잔류자화의 세기 [A/m]

자기벡터포텐셜을 다음과 같이 정의하고

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5)$$

식 (2) ~ 식 (5)를 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 영구자석이 포함된 자기장의 지배방정식을 얻는다.

$$\nabla \times v(\nabla \times \vec{A} - \vec{B}_0) = \vec{J} \quad (6)$$

여기서 $v(= \frac{1}{\nu})$ 는 자기저항률이고, \vec{B}_0 [Wb/m²]는 잔류자속밀도이다.

지배방정식 (6)에 Galerkin법을 적용하면 다음과 같다.

$$\vec{R}_i = \int_V N_i [\nabla \times v(\nabla \times \vec{A} - \vec{B}_0) - \vec{J}] dv \quad (7)$$

식 (7)을 이산화하기 위해 해석영역을 유한개의 사면체로 분할하고 요소내의 미지함수를 일차함수로 근사 시킨다음 이것을 식 (7)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 요소행렬 (element matrix)를 구성할 수 있게 된다.

$$[K] \{A\} = \{F\} \quad (8)$$

여기서, [K]는 12x12행렬이고, (A), (F)는 12x1 벡터이다.

2.2 주기경계조건

그림 1과 같이 구조물의 배열이 주기적으로 반복되고 장(field)을 형성하는 전원(source) 역시 주기적으로 반복되면 구조물의 한주기에 대해서만 해석함으로써 전체를 대신할 수 있다. 이 방법을 도입한다면 컴퓨터의 소요기억용량과 계산시간을 절감할 수 있게 된다.

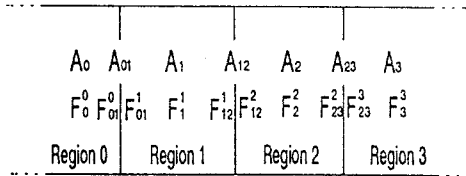


그림 1. 주기적인 모델

설명 편의를 위해 영역 1 내부의 절점에 대한 포텐셜을 A_1 , 영역 1과 영역 2의 경계에 있는 절점에 대한 포텐셜을 A_{12} 등으로 표시하고, 구동벡터의 상첨자는 영역을 표시하고 하첨자는 영역내부 또는 경계상의 값을 의미 한다고 하자. 그러면 요소행렬에서와 같이 등식은 성립하지 않지만 영역행렬을 형성할 수 있다. 영역 1에서의 영역행렬은

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & 0 \\ K_3 & K_4 & K_5 \\ 0 & K_6 & K_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{01} \\ A_1 \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{11}^1 \\ F_1^1 \\ F_{12}^1 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

과 같이 되고, 영역 2에서도 마찬가지로 다음과 같은 영역행렬을 형성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & 0 \\ K_3 & K_4 & K_5 \\ 0 & K_6 & K_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{12} \\ A_2 \\ A_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{12}^2 \\ F_2^2 \\ F_{23}^2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

영역 1과 영역 2에서 계수행렬 $K_1 \sim K_7$ 는 주기성에 의해 동일한 값을 갖는다. 따라서 식 (9)와 식 (10)을 조립하면 A_1, A_{12}, A_2 에 대해서는 다음과 같은 등식을 성립시킬 수 있다.

$$K_3 A_{01} + K_4 A_1 + K_5 A_{12} = F_1^1 \quad (11)$$

$$K_6 A_1 + (K_7 + K_1) A_{12} + K_2 A_2 = F_{12}^2 + F_1^2 \quad (12)$$

$$K_3 A_{12} + K_4 A_2 + K_5 A_{23} = F_2^2 \quad (13)$$

여기서 해석모델의 주기성을 고려하면

$$A_{01} = A_{12} = A_{23} \quad (14)$$

$$A_1 = A_2 \quad (15)$$

$$F_1^1 = F_2^2 \quad (16)$$

$$F_{11}^1 = F_{12}^2 \quad (17)$$

$$F_{12}^1 = F_{23}^2 \quad (18)$$

인 주기경계조건을 알 수 있다. 이것을 식 (11) ~ 식 (13)에 대입하여 정리하면

$$(K_1 + K_7) A_{12} + (K_2 + K_6) A_1 = F_{12}^1 + F_{12}^2 \quad (19)$$

$$(K_3 + K_5) A_{12} + K_4 A_1 = F_1^1 \quad (20)$$

과 같이 되고 이 식을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_7 & K_2 + K_6 \\ K_3 + K_5 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{12} \\ A_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{12}^1 + F_{12}^2 \\ F_1^1 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

식 (20)은 전체 계를 대표할 수 있는 계방정식이다.

3. 시뮬레이션 및 검토

그림 2는 본 논문에서 해석 대상으로 채택한 can stack형 PM 스텝모터이다[3][4]. 압연된 철판을 접어 10개의 고정자 teeth를 만들었으며 회전자인 영구자석은 10극으로 착자되어 있다. 2개의 전기적 자기적으로 독립된 can 내부에 하나의 축으로 연결된 영구자석이 있으며, 이것이 회전할 수 있도록 하기 위해서 2개의 can 안에 있는 고정자 teeth는 전체적으로 1/2 피치씩 엇갈려 있다. 2개의 여자코일은 병렬로 이루어져 있고, 서로 번갈아 가며 고정자를 여자 시킨다.

스텝모터의 구조를 살펴보면 2개의 can이 구조적으로 대칭이고 요크는 ϕ 방향으로 72° 마다 같은 모양이 반복된다. 그중 한 개의 can을 택하여 한 주기를 그림 3 및 그림 4와 같이 두가지 경우로 근사 시켜서 유한요소해석을 하였다. 모델 1과 모델 2에서 전류밀도는 $3,328,735 \text{ [A/m}^2\text{]}$ 를 인가 했고 영구자석의 잔류자속밀도는 0.1 [T] 이고, 코어의 비투자율은 1000 이다.

유한요소법을 적용하기위한 요소분할도를 그림 5에 나타내었다. 모델 1과 모델 2의 자속밀도 분포는 거의 같은 모양이며 모델 1에서 스텝모터 teeth부분의 자속밀도를 3차원 그래픽으로 표시하여 그림 6에 나타내었다. 모델 1에서 $y=6.35 \text{ [mm]}$ 와 모델 2에서 $y=0 \text{ [mm]}$ 는 같은 위치에 해당 되는 부분이다. 이 부분에서 모델 1과 모델 2의 포텐셜을 비교한 것이 그림 7에 나타내었는데 잘 일치함을 볼 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 주기성이 있는 3차원 모델에 대해 주기경계조건을 적용하여 유한요소해석을 실시하였다. 해석대상으로 FDD 헤드 구동용으로 사용되는 can stack형 PM 스텝모터를 택해서 한 주기를 두가지의 경우로 시뮬레이션 하였다. 한 주기를 두가지의 모델로 하여 각각 해석하였고, 두 모델에서 같은 부분의 포텐셜이 잘 일치함을 알 수 있었다.

해석대상의 모델이 주기성을 가지고 있는 경우에는 주기경계조건을 적용하면 전체를 해석하는 것에 비해 미지수가 현저히 감소하므로 컴퓨터의 소요기억용량과 실행시간을 줄일 수 있다. 특히 3차원의 경우에는 2차원에 비해 처리해야 하는 미지수가 월등히 많으므로 그 유용성이 두드러진다.

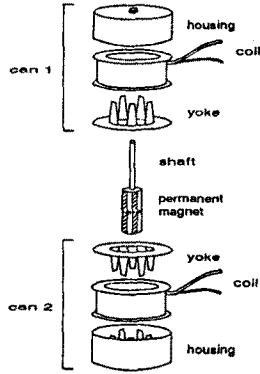


그림 2. 스텝모터의 구조도

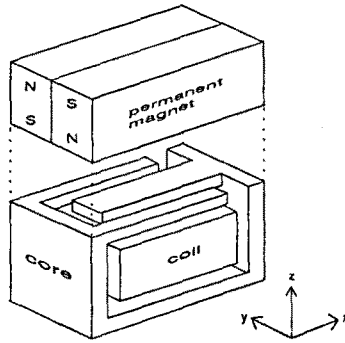


그림 3. 스텝모터 한주기 모델 (모델 1)

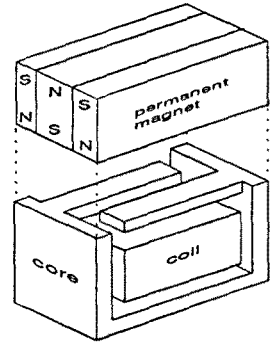


그림 4. 스텝모터 한주기 모델 (모델 2)

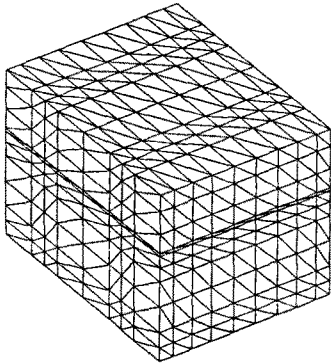
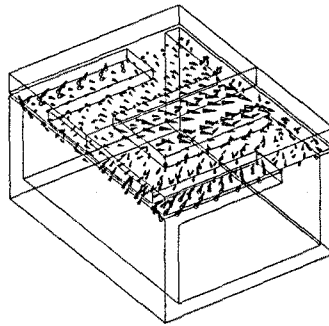
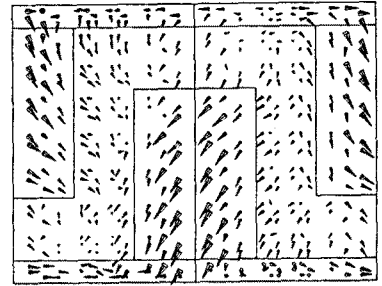


그림 5. 모델 1의 요소분할도

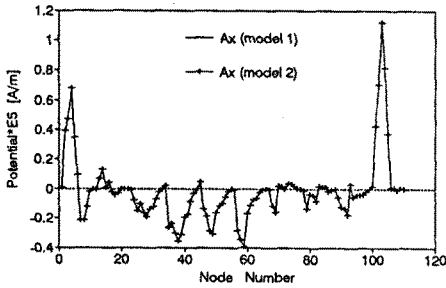


(a) $\theta=55^\circ$ $\phi=-125^\circ$

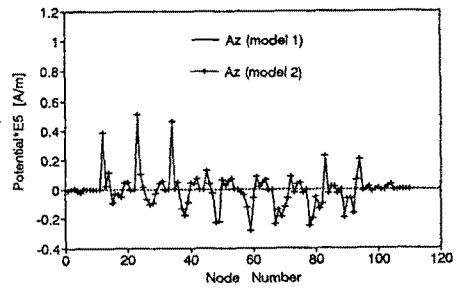


(b) $\theta=0^\circ$ $\phi=0^\circ$

그림 6. 모델 1의 teeth부분의 자속밀도

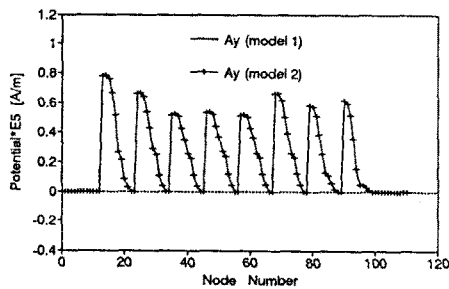


(a) Ax 성분



(c) Az 성분

그림 7. 모델 1과 모델 2의 포텐셜 비교도



(b) Ay 성분

참고 문헌

- [1] 임달호, "전기계의 유한요소법", 동명사, 1987.
- [2] David S. "Finite Element Analysis", 1988.
- [3] 한국공업표준협회, "정밀소형 MOTOR 기술"
- [4] 김상진, "소형모터제어", 성안당, 1992.
- [5] 이준호, "3차원 유한요소법에 의한 Can Stack 형 PM 스텝모터의 자장해석", 석사학위 논문, 단국대학교, 1994.