

## 축대칭 유도가열기의 해석을 위한 국부범함수를 이용한 유한요소법

백 승 국\*, 천 창 울\*, 정 현 교\*\*

\* 강원대학교 전기공학과, \*\* 서울대학교 전기공학과

Finite Element Method employing Localized Functional  
for analyzing The Axi-symmetric Induction Heating System

Baek SeungKook\*, Changyul Cheon\*, Hyun-Kyo Jung\*\*

\* Dept. of Electrical eng., Kangweon Nat'l Univ

\*\* Dept. of Electrical eng., Seoul Nat'l Univ

**Abstract.** The axisymmetric variational approach employing localized functional is applied to calculate the leakage magnetic field from an induction heating system consisting of an exciting coil and a conducting circular plate. The open boundary is treated by introducing the exterior functional which is represented using the spherical fundamental solutions. For the application to the voltage source problems, the currents on the exciting coil is treated as unknowns. Our results are compared with the previous results, which showed good agreements.

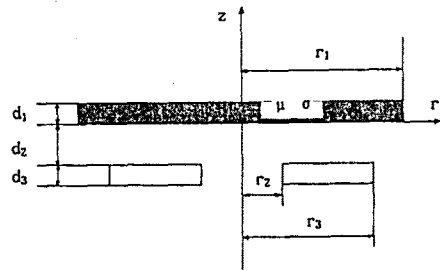


그림 1. 계산에 사용된 유도가열기 :  $r_1 = 16$  cm,  $r_2 = 2$  cm,  $r_3 = 11$  cm,  $d_1 = 2$  mm,  $d_2 = 8$  mm,  $d_3 = 5$  mm. 강자성 원형 도체판 :  $\sigma = 3.61 \times 10^6$  S/m,  $\mu = 1.6 \times 10^{-3}$  H/m, 표피 두께는 20kHz 에서  $\delta = 0.05$  mm

### 1. 서 론

유도가열기에서 고빈자계는 코일위에 놓인 도체 원형판에 고대로 와전류를 유도하는 여자 코일에 의해 발생된다. 와전류는 가열 효과를 높이며 원형경로를 흐른다. 그와 같은 구조에서, 실제 사용에서 감소되어야 할 손실자계 flux가 늘 존재한다.<sup>[1]</sup>

유한요소법은 폐경계에 대하여는 매우 알맞으나 위에서 언급한 것과 같이 개영역에 대하여는 적당하지 못한 단점이 있으므로 개영역 해석을 위하여 여러가지 기법 중 recursion technique<sup>[11,12]</sup>이 가장 간단하나 먼거리에서 계를 구하는 데는 적당하지 못한 단점이 있다.

이 논문의 목적은 위에서 언급한 손실 자계 flux를 푸는데 국부범함수를 사용하는 데 있다. 국부 범함수를 사용하기 위하여 유도가열기 주위에 가상 구 경계면을 취하여 전체 에너지 범함수는 내부 범함수와 외부 범함수의 합으로 주어진다 고 가정한다. 내부 범함수는 축대칭 삼각형 유한요소법에 의하여 범함수를 구하였고 외부 범함수는 1차 Regendre 연관함수를 사용하여 구의 경계적분항으로 구하였다. 내부와 외부의 POTENTIAL은 구의 경계에서 Matching됨으로 전체 에너지 범함수를 구하여 각 마디 POTENTIAL에 관계된 에너지 범함수를 최소화 함으로 MATRIX 식이 얻어진다. 이 국부범함수를 사용한 식에서 전류의 항을 미지수로 두고 전압전원 처리기법을 이용하여 전압을 조정함으로 전류를 제어하여 각 마디의 POTENTIAL을 구하였다.

### 2. 정식화

그림 1.은 간략한 축대칭 3차원 유도가열기를 나타낸다. 코일과 도전판을 둘러싼 구에서 내부영역을 가능한 한 작게 하므로써 요소의 갯수를 줄여서 계산하도록 하였다. 해석영역 내부에서 벡터포텐셜  $\vec{A}$ 는 Magnetoquasistatic System의 원통좌표계의 선형 체차 등방 매질에서 다음 형태의 식을 만족한다.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{\rho^2} = -\mu J \quad (1)$$

여기서  $\rho$ 는  $z$ 축으로 부터의 거리이고,  $J$ 는 전류밀도를 나타내고,  $\mu$ 는 투자율을 나타낸다. 또한 외부영역을 구 좌표계에서 취급하기 위하여 (1)식을 구좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \frac{A}{r^2 \sin^2 \theta} = -\mu J \quad (2)$$

여기서  $r$ 은 구의 중심에서부터의 거리이고,  $\theta$ 는  $z$ 축으로부터  $\varphi$ 평면까지의 각도이다.<sup>[1]</sup>

가열기의 모양이 원통 축대칭이므로 전류밀도와 자기 벡터 포텐셜의  $\phi$  방향 성분만이 존재한다고 가정한다.<sup>[5]</sup> 위의 수식에서 극좌법함수를 이용하여 식을 표현하면 전체 에너지범함수는 다음 식과 같이 내부 에너지 범함수와 외부 에너지 범함수의 전체에 의한 경계 적분식의 합으로 주어지게 된다.<sup>[1], [6]</sup>

$$I = \int_{v_1} \left[ \frac{1}{2\mu} |\nabla A_1|^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{|A_1|^2}{\rho^2} + \frac{j\omega}{2} A_1^2 - JA_1 \right] dv_1 + \int_s \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_2}{\partial n} \left( A_1 - \frac{1}{2} A_2 \right) ds \quad (3)$$

여기서  $\sigma$ 는 도전율을,  $\omega$ 는 각주파수,  $n$ 은 법선 방향을,  $s$ 는 구의 표면적 벡터 성분을,  $v_1$ 는 구의 체적을 나타내고, 내부 영역에서 벡터 포텐셜  $A_1$ 과 외부영역에서의 벡터 포텐셜  $A_2$ 를 다음과 같이 나타내면

$$A_1 = \sum_{l=1}^n N_l A_l \quad (4)$$

$$A_2 = \sum_{l=1}^M C_l r^{-l-1} P_l^j(\cos\theta) = \sum_{l=1}^M C_l U_l \quad (5)$$

(4)식에서  $N_l$ 는 기저함수를 나타내고,  $n$ 은 가상 구 내부의 전체 마디 수를 나타내고,  $A_l$ 는 각 마디에서 자기 벡터 포텐셜을 나타낸다. (5)식에서  $C_l$ 는 결정되어야 할 복소 확장 계수를 나타내고,  $M$ 은 경계 표면의 수와 같다고 가정한 복소 확장 계수의 수이고,  $P_l^j$ 는 1차 Legendre 연관 함수이다.

요소 매트릭스 방정식은 위 식들을 범함수  $I$ 에 대입한 후 정유조건으로부터 구해진다.

$$\frac{\partial I}{\partial A_l} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial C_l} = 0 \quad (6)$$

따라서 전체 매트릭스 식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$S_{11} = \sum_{l=1}^n \left[ \sum_{l=1}^3 \left\{ \frac{2\pi}{4\Delta^* \mu} (c_{ll} c_{ll} + d_{ll} d_{ll}) \rho_0^3 \right\} + \sum_{l=1}^3 \left\{ \frac{2\pi \Delta^*}{9\mu \rho_0^3} \right\} + \sum_{l=1}^3 \left\{ j2\pi\omega \int \rho N_{ll} d\rho dz \right\} \right] \quad (8)$$

위의 식에서  $\Delta^*$ 는 각 요소의 면적을 나타내고, 기저 함수  $N_{ll} = \frac{1}{2\Delta^*} (b_{ll} + c_{ll}\rho + d_{ll}z)$  이다.<sup>[3], [5]</sup>

$$S_{21} = \sum_{j=1}^M \frac{1}{\mu} 2\pi r^2 \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} (-j-1) r^{-j-2} \times \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} P_j^j \cos\theta (\theta_2 - \theta) \sin\theta d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} P_j^j \cos\theta (\theta - \theta_1) \sin\theta d\theta \right\} \quad (9)$$

위의 식에서  $\theta_1, \theta_2$  각 요소에서 경계에 일치하는 마디를 좌표계에 관하여 나타냈을 경우 마디의 각도가 된다.

$$S_{12} = S_{21} \quad (10)$$

$$S_{22} = -\frac{2\pi}{\mu} \sum_{j=1}^M \left\{ (-j-1) r^{-2j-1} \frac{2}{2j+1} \frac{(j+1)!}{(j-1)!} \right\} \quad (11)$$

여기서  $r$ 은 가상 구의 중심에서부터 경계면까지의 거리이다.

$$F_1 = \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^3 \frac{j\pi \Delta^*}{2} (\rho_0^3 + \frac{\rho_{ll}}{3}) \right\} \quad (12)$$

여기서  $\rho_{ll}$ 는 원통 좌표계에서  $z$  축에서부터 각 요소 마디의  $\rho$  까지의 거리이다.

$$F_2 = 0 \quad (13)$$

위의 수식에서  $S_{11}$ 과  $F_1$ 은 축대칭 삼각형 유한 요소법에 의하여 구하였고  $S_{12}, S_{21}, S_{22}$ 는 경계 요소에서 내부 범함수와 경계 적분식으로 전개된 외부 범함수에 의하여 구하였다. 요소 매트릭스를 풀음으로 벡터 포텐셜을 구하는 식에서 전류밀도  $J$ 를 미지수로 한 후 전압 전위 처리기법에 의하여 인가한 전압에 의하여 전류를 구한 후 전류밀도를 구하여 위의 수식에 넣어 주어 전압에 의해 벡터 포텐셜을 구하였다. 이 전압전위 처리기법은 다음 식에 의하여 구하였다.

도선에 유도되는 역기전력은 페러데이 법칙으로부터

$$V_{mf} = -j\omega \int_a \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (14)$$

여기서  $S$ 는 원형도선이 이루는 면적이고,  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 이므로 스투스 정리를 사용하여

$$V_{mf} = -j\omega \int_a \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = -j\omega \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (15)$$

로 쓸 수 있다. 여기서  $l$ 은 면적  $S$ 를 둘러싸고 있는 폐곡선이므로 결국 도선의 길이에 해당된다. 축대칭을 가정했으므로  $\vec{A}$ 는  $\phi$  방향 성분을 가지고 있고  $d\vec{l}$ 도  $\phi$  방향 성분만 존재하므로 역기전력은

$$V_{mf} = -j\omega A_{\phi l} = -j2\pi\omega A_{\phi \rho c} \quad (16)$$

로 쓸 수 있다. 여기서  $\rho c$ 는  $z$  축에서 도선위의 점점

까지의 거리이다. 또한 도선의 저항에 의한 전압강하는 오옴의 법칙으로부터

$$V = IR = I \frac{l}{\sigma S_c} = I \frac{2\pi r_c}{\sigma S_c} \quad (17)$$

으로 주어진다. 여기에서  $S_c$  는 도선의 단면적을  $R$  은 도선의 저항을 나타낸다.

도선에서의 전압강하는 역기전력에 의한 전압과 도선의 전압에 의한 전압강하분의 합이므로 외부에서 인가해주는 전압  $V_0$  는 다음 식과 같다.

$$V_0 = -j2\pi r_c A_0 + \frac{2\pi r_c}{\sigma S_c} I \quad (18)$$

위 식에서  $I$  는 도선에 흐르는 전류로서 위에서 구한 매트릭스 식에서 도출한 영역내의 각 정점에서의 벡터포텐셜  $A_0$  와 함께 구해야 할 미지수이다. 위 식을 매트릭스의 선형방정식들과 함께 사용함으로써 미지수의 갯수와 식의 갯수를 일치시킬 수 있으므로 인가해주는 전압에 따라 도선의 전류와 각 마디의 벡터 포텐셜을 구할 수 있다.

### 3. 사례연구

코일과 도체판의 모양은 그림 1.과 같으며, 위에서 언급한 수식을 이용하여 요소의 갯수를 443개로 나눈 뒤 요소에 대한 그림을 그림 2.에 그리었고, 전압 1 V에 대하여 전류와 flux의 분포를 계산하여 그림 3.(b)에 flux의 분포를 그렸다. 코일은 구리를 사용하였으므로 1 V의 전압에 전류의 크기가 (17)식에 의해 34.3 A가 흐름을 계산할 수 있었다. 그림 3.(a)는 벡터 포텐셜을 구하기 위하여 가상 구를 취한 다른 논문의 결과로 이 논문과 비교하기 위해 도시하였다.

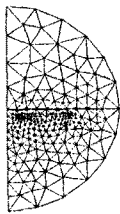


그림 2. 가상 구에 대한 내부 요소의 갯수. 총 443개의 요소로 분할.

### 4. 결 론

개 영역을 해석하기 위하여 가상 구를 사용하여 외부 영역을 국부 범함수를 이용하여 경계적분식으로 치환하여 해석함으로써 식이 복잡해지긴 하지만 요소의 수를 줄임으로 적은 요소로도 벡터 포텐셜을 구할 수 있었고, 개 영역의 다른 복잡한 문제에도, 이와 같이 가상 구와 경계 마디가 변하지 않으면, 적용할 수 있다. 또한 전압을 인가하여 전류와 벡터 포텐셜을 구할 수 있으므로 이 같은 방법이 유도 가열기의 설계에 많은 도움이 있을 것으로 사료된다.

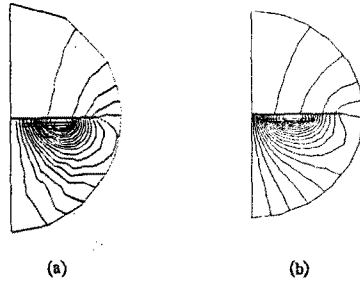


그림 3. a)는 전체 코일의 전류는 9A, 20kHz에서 기존의 좋은 결과를 가져온 논문의 자기 flux 분포, b)는 전체 코일에 걸리는 전압이 1 V<sup>(1)</sup>, 전류가 34.3 A, 20kHz에서 이 논문에 의한 자기 flux 분포.

### 5. 참고문헌

- [1] TANROKU MIYOSHI and GENTA MAEDA, "Finite Element Analysis of Leakage Magnetic Flux from an Induction Heating System", IEEE Trans. Magn, vol. MAG-18, NO. 3, MAY 1982.
- [2] P. Silvester and M. S. Hsieh, "Finite-element solution of 2-dimensional exterior-field problems", PROC. IEE, vol. 188, NO. 12, DECEMBER 1971.
- [3] E. B. Becker, G. F. Carey, and J. T. Oden, "FINITE ELEMENTS : An Introduction", Prentice-Hall, Inc., vol. 1, 1983.
- [4] A. J. Davies, "The Finite Element Method : A First Approach", Oxford University Press, 1980.
- [5] 임달호, "전기계의 유한요소법", p.103-120, 동명사, 1986.
- [6] 김원범, 정현교, 고창섭, 한송업, "국부범함수를 사용한 교류자장 문제의 유한요소 해석", p.79-82, 한국자학회지, vol. 1, Number 2, NOVEMBER 1991.