

# 類似變換 技法을 利用한 非線形 3次元 모델의 開發

## A Nonlinear Three-dimensional Spectral Model Using Similarity Transform Technique

姜官秀\* 鄭景太\* 蘇在貴\*

### 1. 緒論

流速의 鉛直分布를 알기 위한 方案의 하나로 Galerkin 函數 展開모델에 대한 研究가 활발히 進行되어 왔다(Heaps, 1972; Davies, 1980; Gordon, 1982; 최, 1983; 강등, 1993). Galerkin 函數 利用 3次元 모델은 垂直座標上의 水平流速 成分을 水平座標, 時間에 따라 變하는 係數와 水深에 따라 變하는 函數群의 곱의 형태로 線形展開하며, 係數의 값은 Galerkin 방법을 써서 구한다. Galerkin 모델의 類型은 사용하는 基底函數群(basis set)에 의해 결정되는데 Heaps(1972)가 基底函數(basis function)로 鉛直 渦粘性係數를 포함하는 二次微分項의 固有函數(eigenfunction)를 사용한 이래 다양한 기저함수를 이용한 연구가 進行되었다.(Davies, 1977; Davies, 1980; Owen, 1980; Gordon, 1982)

본 연구에서는 기본방정식의 Galerkin해의 수치계산시 선형항 처리에 유사변환기법을 도입하여 해를 구한 후 이류항을 포함한 비선형항 처리에는 Davies(1980)의 방법을 사용 이류항 처리에는 시간 분할방법을 택하였다.

類似變換 技法을 사용할 경우의 長點은 기존의 Galerkin-eigenfunction 모델이 기저함수가 고유함수일 경우만 적용 가능했던 한계를 벗어나 임의의 기저함수에도 적용 가능하다는 것이다. 실제 적용시 기저함수는 직교성이 없는 Chebyshev 다항식 함수를 사용하였으나 어떤 基底函數에도 使用 가능하다.

類似變換 技法을 사용한 기존의 연구는 Hwang등(1984)에 의해 有限要素法을 사용하여 地下水 오염 문제에 적용한 연구가 있었고, 해류순환모델에서는 강등(1993)이 선형방정식의 해를 구하는데 적용하였다. 모델 테스트로써 Davies(1980)와 동일한 조건(Heaps' basin)에 대해 수치실험을 수행, 비교하였다.

### 2. 3次元 流體 運動 方程式 및 鉛直函數 展開 技法에 의한 解

#### (1) 直交 座標系로 表示된 基本方程式

水平方向 擴散項을 무시하고 靜水壓條件(hydrostatic approximation) 및 等海水密度(homogeneous condition)를 가정한 3次元 連續方程式과 運動方程式은 아래와 같이 표현된다(Davies, 1980).

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\zeta}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\zeta}^{\eta} v dz = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \gamma v = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (N \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma u = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (N \frac{\partial v}{\partial z}) \quad (2.3)$$

\* 韓國海洋研究所 沿岸工學研究室(Coastal Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)

$$w(z) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_z^h u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^h v dz \quad (2.4)$$

여기서,

- $x, y, z$  : 平面上의 東向, 北向, 鉛直 直交座標系  
(a left handed set of Cartesian coordinates)  
 $z$  : 平均海面下の 垂直座標,  
 $t$  : 時間,  
 $\zeta$  : 平均海面上的의 海水位,  
 $u, v, w$  : 水深  $z$  에서의  $x, y, z$  方向 流速 成分,  
 $\rho$  : 海水密度,  
 $\gamma$  : Coriolis 係數,  
 $g$  : 重力加速度  
 $N$  : 鉛直 와점성계수 (a coefficient of vertical eddy viscosity)

해수면과 바닥에서의 境界條件은 다음과 같이 주어진다.

$$-\rho(N\frac{\partial u}{\partial z})_s = F_s, \quad -\rho(N\frac{\partial v}{\partial z})_s = G_s \quad (2.5)$$

$$-\rho(N\frac{\partial u}{\partial z})_b = F_b, \quad -\rho(N\frac{\partial v}{\partial z})_b = G_b \quad (2.6)$$

여기서  $F_s, G_s$  는 해수면상 바람응력의  $x, y$  방향성분을 나타내고,  $F_b, G_b$  는 海底面 摩擦應力의  $x, y$  방향성분을 나타낸다.

## (2) 類似變換技法을 利用한 鉛直函數 展開技法에 의한 解

기본방정식을 연직방향으로  $\sigma$ -변환(transform)하고 기저함수  $f_r(\sigma)$ 를 Chebyshev 다항식 함수를 사용하고 Galerkin기법을 적용하면  $x$ 방향 운동방정식은 식(2.7)과 같이 행렬방정식 형태로 표현된다(Davies, 1980).

$$[C]\{\alpha\} = -\frac{4}{(h+\xi)^2}[D]\{\alpha\} + \{p\} - \left(\frac{2}{h+\xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t}[G]\{\alpha\} - \{S\} \quad (2.7)$$

여기에서

$$\{p\} = \gamma[C]\{\beta\} - g\frac{\partial \xi}{\partial x}\{f\} - \frac{2F_b}{\rho(h+\xi)}\{f_1\} + \frac{2F_s}{\rho(h+\xi)}\{f_{-1}\} \quad (2.8)$$

$$\{S\} = \left[ \left( [H^*]\{\alpha^*\} + [H^{**}]\{\alpha^* \} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{h+\xi} \left( [J^*]\{\alpha\} + [J^{**}]\{\alpha\} \right) \right] \quad (2.9)$$

$[C], [D]$ 는  $r, k$  위치의 요소가  $\int_{-1}^{+1} f_r f_k d\sigma, \int_{-1}^{+1} N \frac{df_r}{d\sigma} \frac{df_k}{d\sigma} d\sigma$  로 되는  $m \times m$  行列이다.

$\{f_1\}, \{f_{-1}\}$  는  $k$  요소가  $f_k(-1), f_k(+1)$  로 정의되는 행벡터이다.

$\{f\}$  는  $k$  요소가  $\int_{-1}^{+1} f_k d\sigma$  로 정의되는 행벡터이다.

$\{\alpha\}, \{\dot{\alpha}\}, \{\beta\}, \{\dot{\beta}\}$ 는 상수  $A, B$ , 과 그 미분항으로 정의되는 행벡터이다.

$\{\alpha^x\}, \{\alpha^y\}, \{\beta^x\}, \{\beta^y\}$   $A_x$  과  $B_x$  의  $x, y$ 방향 공간미분항이다.

$[G], [H^*], [H^{**}], [J^*], [J^{**}]$ 는 Davies(1980) 논문참조.

식(2.7)은 다음과 같이 두단계의 수치과정을 거쳐 해를 구한다.

$$[C] \dot{\alpha}_t = -\frac{4}{(h+\xi)^2} [D] \{\alpha\} + \{p\} \quad (2.10)$$

$$[C] \dot{\alpha}_n = -\frac{2}{(h+\xi)} \frac{\partial \xi}{\partial t} [G] \{\alpha\} - \{S\} \quad (2.11)$$

여기서 식(2.29)에 類似變換 技法(강등,1993)을 적용한다.

$\{\alpha\} = [r]\{\zeta\}$ 로 변환하고 식(2.10)에  $[r]^T$ 를 곱하면 식(2.12)와 같이 표현될 수 있다.

$$[r]^T [C] [r] \{\zeta\} = -\frac{4}{(h+\xi)^2} [r]^T [D] [r] \{\zeta\} + \{p'\} \quad (2.12)$$

여기에서,  $\{p'\} = [r]^T \{p\}$  이고,  $[r]$ 는  $[C]^{-1}[D]$ 의 고유벡터행렬이다.

$[r]$ 는  $[C], [D]$ 行列에 직교(orthogonal)하므로  $[r]^T [C] [r], [r]^T [D] [r]$  는 대각성분만이 존재하며, 각각의 대각 성분을  $\gamma_n, \delta_n$  이라 하면 식(2.12)는 다음과 같은 독립적인 方程式 형태로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_n \zeta_n &= -\frac{4}{(h+\xi)^2} \delta_n \zeta_n + p_n' \quad (n=1, \dots, m) \\ \zeta_n &= -\frac{4}{(h+\xi)^2} \lambda_n \zeta_n + \frac{p_n'}{\gamma_n} \quad (n=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (2.13)$$

여기에서,  $\lambda_n = \frac{\delta_n}{\gamma_n}$  이다.

따라서 식(2.13)는 초기치를 알 수 있을 경우 解析解를 구할 수 있다.

초기치를  $t = 0$ 일 때  $\zeta_n = \zeta_n^0$  이라고 하면 解析解는 다음과 같다.

i)  $\lambda_n$  가 0이 아닐 경우,

$$\zeta_n' = \left( \zeta_n^0 - \frac{p_n'}{\gamma_n} \right) e^{\frac{-4}{(h+\xi)^2} \lambda_n t} + \frac{p_n'}{\gamma_n} \quad (n=1, \dots, m) \quad (2.14)$$

ii)  $\lambda_n$  가 0일 경우,

$$\zeta_n' = \zeta_n^0 + \frac{p_n'}{\gamma_n} t \quad (n=1, \dots, m) \quad (2.15)$$

식(2.15),(2.16)를 이용하여 일정 시간에서의  $\zeta_n'$  를 구하면 고유벡터행렬을 곱하여 Galerkin해의 선형항에 대한 기저함수의 계수 값을 구할 수 있다. 이상과 같이 구한 기저함수의 계수값에 비선형항의 계수값을 더하여 해를 구하게 된다. 이류항의 처리에는 시간간격 분할방법을 사용하였다.

### 3. 數值實驗 및 結果

본 연구는 Heaps(1972), Davies(1980)에 의해 적용된 North Sea 규모의 一定水深 長方形 Basin에 적용하였다. 計算 領域 400km×800km에 9×17개의 格子網을 구성하였으며, 水深은 일정 수심 65m, 전향력상수는  $0.44h^{-1}$ 로 주었다. 바람 條件은 북풍에 의한 바람응력이  $-1.5N/m^2$ 으로 전 영역에 일정하게 주었다. 격자 체계는 Staggered grid system인 Arakawa-C grid 를 사용하였다. 이류항 처리에 있어서 시간간격을 4로주어 4번의 계산시간마다 1번씩의 이류 항 계산을 수행하도록 하였다. 초기 조건으로는 Cold start 조건을 주었고 境界條件은 해저면 경계에 비선형마찰관계식을 사용하였으며 육지경계에는 閉境界條件을 사용하였다.

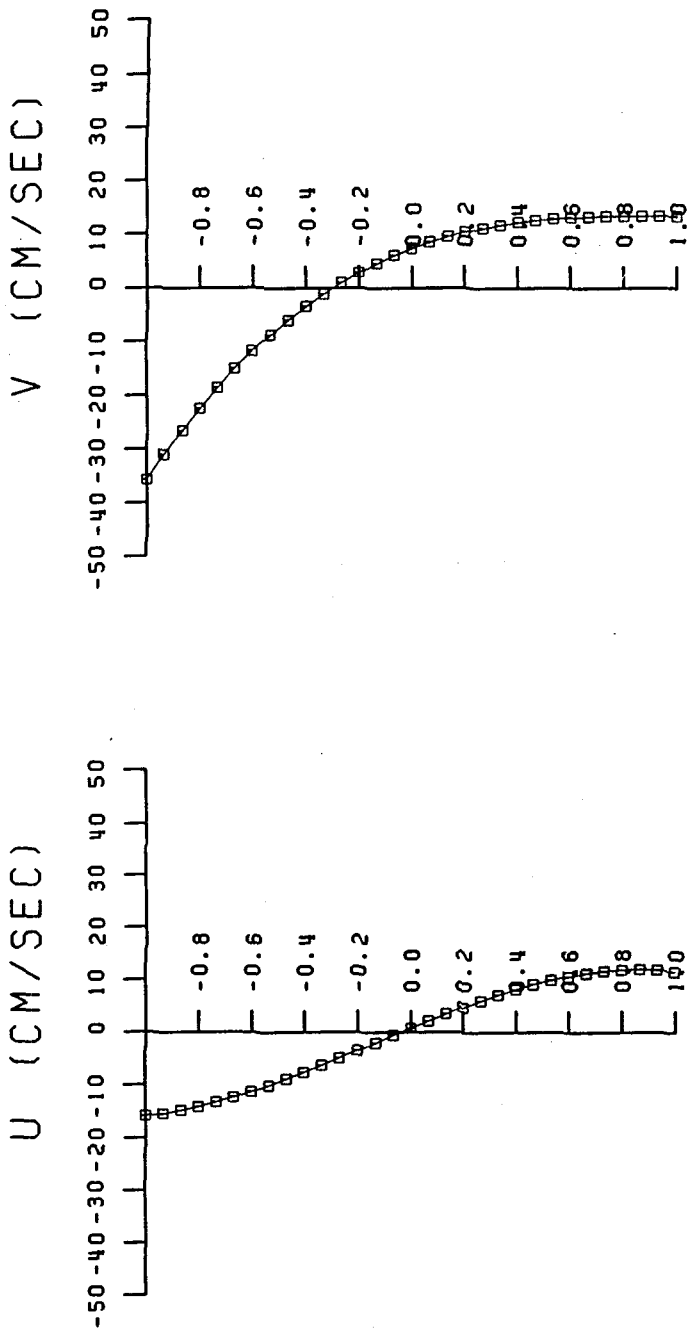
Davies(1980)의 계산결과와 비교를 위하여 Davies(1980)의 조건과 동일조건하에서 수치 실험을 수행하였다. Fig 1은 300시간 경과후의 모델영역 중앙점에서의 연직유속을 비교한 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이 유사변환기법 모델은 기존 Davies(1980)모델 결과와 유사하게 재현함을 알 수 있다.

### 4. 結論 및 討議

本 研究에서는 基本方程式의 Galerkin해의 선형항에 類似變換 技法을 사용하는 비선형 3 차원 모우드 모델을 開發하였다. 개발된 類似變換 技法 모델의 長點은 기존의 고유함수 방법 (eigenfunction-Galerkin method) 사용시 基底函數가 Sturm-Liouville system의 해를 만족해야 하는 제약을 받지 않아 어떤 基底函數에도 적용이 가능하다. 모델의 檢證을 위해 Heaps (1972) 가 사용한 一定水深 長方形 Basin에 適用하여 그 結果를 Davies(1980)의 연구 결과와 比較, 檢 討하였다. 검토 결과 개발된 모델은 기존의 연구 결과와 상당히 유사하여 실제 지형에 적용 가능하리라 판단된다. 그러나, 본 모델을 실제 지형에 적용함에 있어서는 不規則 水深, 實際의 岸線, 조간대 및 外海 境界를 처리할 수 있게 확장해야 하며 現在 研究가 進行中에 있다.

### 參考文獻 (References)

- 姜官秀, 蘇在實, 鄭景太, 鮮于仲皓. 1993. 類似變換技法을 이용한 3次元 모델의 開發, 韓國 海岸, 海洋工學會誌 (in press)
- 崔秉昊. 1983. 京畿灣의 3次元 流動 解析모델. 韓國海洋學會誌, 제18권 제1호, pp10-20.
- Davies, A. M., 1980. Application of the Galerkin method to the formulation of a three-dimensional nonlinear hydrodynamic numerical sea model, Appl. Math. Modelling, 4, pp245-256.
- Gordon, R. B. 1982. Wind-driven circulation in Narrangansett Bay. Ph.D Dissertation, University of Rhode Island, Kingston.
- Heaps, N. S., 1972. On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges. Memoires Societe Royale des Sciences de Liege, 6serie, tome II, pp143-180.
- Hwang, J. C., Koerner, R. M., Cho, W. C. and K. S. Yeung., 1984. An Eigenvalue Technique for SoluteTransport, Jour. of Hyd. Eng., 110(10),pp1302-1314.
- Owen, A., 1980. A three-dimensional model of the Bristol Channel, Jour. of Phys. Oceanogr., 10, pp1090-1302.



POINT : CENTER PT.                      POINT : CENTER PT.

Fig. 1. Comparison of vertical velocity profiles at the center of the rectangular sea of transform technique model(□) and Davies model(solid line) at t=300 hours.