

한국전산구조공학회
1993년도 가을학술발표회 논문집

국문 : 송전철탑의 탄성계수의 변이에 따른 확률적 응답변이도
영문 : Stochastic Response Analysis of Transmission Tower Subjected
to Young's Modulus Variation

동 원 영* 정 영 수**
Dong, Won Young Chung, Young Soo

ABSTRACT

With the aid of finite element method, this paper deals with the problem of structural response variability of transmission tower subjected to the spatial variability of material properties, Young's modulus herein. The spatial variability of material property are modeled as two-dimensional stochastic field which has an isotropic auto-correlation function. Response variability has been computed based on two numerical techniques, such as the Neumann expansion method in conjunction with the Monte Carlo simulation method. The results by these numerical methods are compared with those by the deterministic approach.

1. 서론

구조해석의 강력한 도구의 하나인 유한요소해석법은 공학의 여러분야에서 정적 및 동적 해석에 광범위하게 사용되고 있다. 그러나 실제 작용하는 하중 및 구성재료는 불확정 성질(Random Property)을 갖고 있음에도 불구하고 기존의 유한요소해석법을 이용한 구조해석은 확정론적(Deterministic)으로 해석해 왔다. 물론 이러한 확정론적인 접근방식이 구조물의 설계와 안전성평가에 좋은 기준치의 역할을 하고 있지만 더욱 합리적인 해석방법이 절실히 요구되어 왔다. 이런 연유로 1960년대 이후에 신뢰성이론에 근거한 구조해석방법에 많은 관심이 고조되었으나 기존의 신뢰성이론으로는 복잡한 구조물의 해석에 많은 어려움이 야기되어 최근에는 유한요소해석이론에 신뢰성이론을 접목시킨 확률유한요소이론에 대한 연구활동이 다양해지고 있으며^[1,2,3,4] 하중을 불확정변수로 고려한 유한요소해석법은 최근 20년간 많은 연구가 이루어져 왔다.^[5] 본 논문은 확률론적 유한요소해석이론을 응용한 몬테칼로 모의분석법과 뉴우만확장법을 이용하여 철탑재료의 탄성계수의 변이에 따른 구조물의 응답 및 부재력의 변화정도를 조사 분석하고자 한다.

2. 확률변수

2.1 재료상수의 확률장 및 상관함수

재료의 변이를 나타내는 확률변수로서는 탄성계수 혹은 포아손비등을 취하여 확률론적 유한요소해석을 수행할수 있으나 본 논문에서는 탄성계수 $E(x)$ 를 불확정변수로 선택하였으며 부재별 탄성계수의 형태는 다음과 같다.

$$E(x) = E_0(1+e(x)) \quad (1)$$

* 중앙대학교 대학원 토목공학과 석사과정

** 중앙대학교 건설대학 토목공학과 부교수

여기서, $e(x)$ 는 통계적 특성을 갖는 확률장(Random Field)으로서 기대값은 $E[e(x)] = 0$ 이고 상관함수는 $R_{ee}(\xi) = E[e(x)e(x+\xi)]$ 이다. $X = (xy)^T$ 는 위치벡터를 나타내며 $\xi = (\xi_x, \xi_y)$ 는 두점 x 와 $x+\xi$ 사이의 거리벡터이다. 탄성계수의 변이분포가 등방성이라면 상관함수는 상대 거리 $|\xi|$ 만의 함수로 표시할수 있으며 다음과 같은 등방성 상관함수로 나타낼수 있다.

$$R_{ee}(\xi) = \sigma_E^2 \exp \left[- \left(\frac{|\xi|}{d} \right)^2 \right] \quad (2)$$

윗 식에서 d 는 양의 매개변수이며 σ_E 는 확률변수 $E(x)$ 의 표준편차를 나타낸다. 특히 d 는 상관관계의 척도(Scale of Correlation)로 정의할수 있으며 값이 클수록 상관관계가 적어짐을 나타낸다.

2.2 탄성계수의 변이행렬

유한요소법으로 구조해석을 할 경우 각 요소의 재료특성 및 각 요소에서의 응력 혹은 변형률의 정도를 감안하여 가능한 작은 요소로 분할하여야 한다. n 개의 요소가 있다면 재료상수 역시 n 개가 된다. 즉 $e_i = e(x_i)$; $i = 1, 2, \dots, n$ 인 등질성(Homogeneous)확률장의 각 성분들은 기대값이 0인 불확정분포이나 서로 상관관계를 갖는 값들이다. 단, 여기서 x_i 는 i 번째 부재의 중심점이며 그들의 상관관계는 분산행렬, C_{ee} 로 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$C_{ij} = Cov[e_i, e_j] = E[e_i e_j] = R_{ee}(\xi_{ij}) \quad (3)$$

$\xi_{ij} = x_j - x_i$ 이며 이는 요소 i 와 j 의 중심점간의 거리이다. 벡터 $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ 는 $e = LZ$ 를 이용하여 구할수 있으며, 여기서 $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ 로서 기대값이 0이고 표준편차가 1인 N 개의 가우시안(Gaussian) 확률변수이다. 그리고 L 은 하부삼각행렬(Lower Triangle Matrix)로서 분산행렬 C_{ee} 의 출레스키분해법으로 아래와 같다.

$$E[ee^T] = E[LZ(ZZ^T)L^T] = LE[ZZ^T]L^T = LIL^T = LL^T = C_{ee} \quad (4)$$

즉, L 은 단위 행렬이고 분산행렬 C_{ee} 에 대한 출레스키분해를 수행하면서 N 개의 독립적인 가우시안 분포의 확률변수 Z 를 구한 후 표본벡터 e 를 구할수 있다.^[4]

3. 수치해석 기법

3.1 몬테칼로 시뮬레이션

일반적으로 정적 유한요소해석을 수행할 경우 응답해는 아래와 같이 강성행렬의 역행렬을 구함으로 해결할수 있다.

$$[K](\Delta) = (F) \quad \rightarrow \quad (\Delta) = [K]^{-1}(F) \quad (5)$$

강성행렬의 역행렬을 구하는데는 많은 CPU시간이 소요되므로 본 논문에서는 $[K] = [U]^T[D][U]$ 를 이용한 수정 출레스키분해법을 사용하여 미지매개변수 $\{X\}, \{Y\}$ 를 구한 후 변위 $\{\Delta\}$ 를 구하였다.

$$[U]^T(X) = (F) \quad \rightarrow \quad [D](Y) = (X) \quad \rightarrow \quad [U](\Delta) = (Y) \quad (6)$$

특히 주목할점은 상부삼각(Upper Triangle)행렬 $[U]$ 는 $[K]$ 와 같은 크기의 Bandwidth를 갖는다. 확률유한요소법에서는 탄성계수의 변이로 인하여 증감되는 강성행렬은 다음식과 같

이 선형적으로 증첩하여 나타낼수 있다.

$$[K] = [K_0] + [\Delta K] \quad (7)$$

윗 식에서 $[K_0]$ 는 기대치의 강성행렬 즉 통상적으로 정적해석시에 입력되는 탄성계수로부터 유도된 강성행렬을 나타내며 $[\Delta K]$ 는 각 부재별 탄성계수의 변이값에 따른 강성행렬의 각 성분의 변화량인 증감분의 행렬을 나타낸다. 등방성상관함수로부터 구한 모든 요소에 대한 표본탄성계수에 근거한 식(7)과 같은 강성행렬을 구한 후 응답해는 강성행렬의 도치법 혹은 분해법으로 구할수 있다. 본 연구에서는 수정 출레스키분해법으로 구하였으나 편의상 다음 식과 같이 쓸수있다.

$$[K](\Delta) = (F) \rightarrow (\Delta) = [K]^{-1}(F) \quad (8)$$

특히 본 연구에서는 외력벡터 F는 확정론적으로 고려하였다.

3.2 뉴우먼확장법(Neumann Expansion Method)

강성행렬의 도치는 일반적으로 많은 CPU시간이 필요함에도 불구하고 몬테칼로 시뮬레이션 기법에서는 각각의 표본에서 강성행렬 $[K]$ 의 역행렬을 구하여 변위 (Δ) 를 구하였다. 그러나 도치된 강성행렬 $[K]^{-1}$ 을 뉴우먼확장법으로 전개하면 다음과 같이 $[P] = [K_0]^{-1}[\Delta K]$ 을 이용하여 다음과 같은 형태로 나타낼수 있다.

$$[K]^{-1} = [K_0 + \Delta K]^{-1} = [K_0]^{-1} [[I] - [P] + [P]*[P] - \dots] \quad (9)$$

식(5)의 $(\Delta_0) = [K_0]^{-1}(F)$ 를 식(9)에 대입하면 벡터 (Δ) 는 다음과 같은 급수로 나타낼수 있다.

$$\begin{aligned} (\Delta)^{-1} &= [K]^{-1}(F) = (\Delta_0) - [P](\Delta_0) + [P][P](\Delta) - \dots \\ &= (\Delta_0) - (\Delta_1) + (\Delta_2) - \dots \end{aligned} \quad (10)$$

(Δ_0) 는 식 (6)에서와 같이 $[K_0]$ 를 수정 출레스키분해법을 이용하여 구하고 $(\Delta_i) = [P](\Delta_{i-1})$ 를 반복적으로 수행하여 (Δ_i) 를 구하여 최종적으로 (Δ) 를 구할수 있다. 한편 식(10)의 급수식에서 (Δ) 의 계산종료는 아래식의 허용오차범위를 만족시키는 (Δ_i) 까지 고려한 것으로 가정하였다.

$$\delta_{err} \geq \left| \frac{\max(\Delta_i)}{\max(\Delta_0)} \right| \quad (11)$$

윗 식에서 δ_{err} 은 수렴도에 대한 허용오차를 나타내며, 본 연구에서 δ_{err} 은 0.001을 사용하였다. 그리고 뉴우먼 확장법은 $[P] = [K_0]^{-1}[\Delta K]$ 의 Eigen값의 절대값이 1.0보다 작은 경우에만 수렴한다. 이와 같은 수렴조건을 만족시키지 못하는 경우 수정강성행렬 $[K_0^*] = m[K_0]$ 를 이용하여 수정수렴행렬, $[P_0^*] = [K_0^*]^{-1}[\Delta K^*] = [K_0]^{-1} \left[\frac{1}{m} [K] - [K_0] \right]$ 을 유도하였으며 수정계수 m 은 수정수렴행렬의 고유치의 절대값이 1.0보다 작은 조건으로 아래와 같은 식으로부터 구할수 있다.

$$m > \frac{\text{Max}[\lambda_k] + 1.0}{2.0} \quad (12)$$

이 식에서 λ_k 는 수렴행렬 $[P]$ 의 Eigen값이다. 한편 응답해는 $\{\Delta_0^*\} = \frac{1}{m}\{\Delta_0\}$ 를 이용하여 아래 식으로 부터 구하였다.

$$\{\Delta\} = \{\Delta_0^*\} - \{\Delta_1^*\} + \{\Delta_2^*\} - \{\Delta_3^*\} + \dots \quad (13)$$

상기 식에서 $\{\Delta_i^*\} = [P^*]\{\Delta_{i-1}^*\}$ 이다.

4. 송전탑에 대한 수치해석예제

수치해석에 사용된 예제는 그림1과 같은 한국전력표준철탑중 154KV TYPE 'A'를 선정하였으며 일반적으로 송전철탑구조물은 좌우대칭인 입체트러스로 이루어져 있다.^[6,7] 이러한 특성을 이용하여 구조해석은 평면트러스 구조물로 모델링하여 고정하중과 풍하중에 대한 영향만을 고려하였다. 일반적으로 송전철탑구조물에 가해지는 고정하중에는 철탑자중, 가설선 및 애자장치등의 중량, 승강용사다리 난간등의 부대시설에 의한 중량등이 있으며 송전철탑구조물 설계시 사용하는 단위면적당 풍하중의 산정식은 다음과 같다.

$$P = Cq \quad (14)$$

C는 풍력계수로 단면형상에 따라 결정되며 q는 지상 10m 위치의 기준풍속압을 나타낸다. 그리고 기준풍속압 q는 다음의 식을 통해 결정할수 있다.

$$q = \frac{1}{2} \rho V_G^2 \quad (15)$$

여기서, ρ 는 대기밀도, V_G 는 최대순간풍속을 나타낸다. 본 논문에서는 근사적으로 표준풍압치를 이용하여 철탑본체, Arm, 애자장치의 풍하중을 산정하였으며 재료의 탄성계수와 변이값은 각각 강재에 대해 일반적인 값으로 알려진 29000ksi와 0.06을 사용하였다.^[8] Fig 2,3은 Node 100에서의 수평변위에 대한 기대치와 표준편차를 나타내며 마찬가지로 Member 2의 축방향력의 기대치 및 표준편차는 Fig 4,5에 도시하였다. 구조물의 제원은 높이 60.00m, 상부폭 1.10m, 하부폭 10.086m이며 암은 각각 7.60m, 8.2m, 10.6m 및 8.8m이고 각각의 부재는 등변 L형강으로 구성되어 있으며 표 1에 잘 나타나 있다. 표 2에는 상관관계거리 d의 변이에 따른 각 기대치와 표준편차의 변이를 나타내었다.

5. 결론 및 추후과제

본 연구는 송전철탑구조물의 몬테칼로(Monte Carlo)모의기법 및 몬테칼로(Monte Carlo) 모의기법의 근사해법으로서 뉴우먼(Newmann)확장기법에 의한 확률유한요소해법에 관한 논문으로서 뉴우먼(Newmann)확장기법은 몬테칼로(Monte Carlo)모의기법을 보완할수 있는 훌륭한 확률론적 유한요소해석기법으로서 프레임 요소, 평면응력 요소 그리고 판 요소등에 적절히 사용할수 있으리라 판단되며 본 확률론적 유한요소해석법은 추후에 부재 및 구조물의 안전성 평가에 적용할수 있는 훌륭한 방법이라 생각된다. 그리고 본 연구에서 제시한 송전철탑구조물의 응답변이에 계속하여 부재치수가 다른 송전철탑구조물, 하중이 변화했을 때 등의 응답변이와 이러한 경우의 신뢰도 수준을 파악하여 안전성 평가에 대한 연구를 수행하고자 한다.

6. 참고 문헌

- 1) Yamazaki, F., Shinozuka, G., "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol.114, No.8, 1988
- 2) Shinozuka, M., "Structural Response Variability," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol.113, No.6, 1987

- 3) Young, S., Chung, "Response Variability of Reinforced Concrete Frames by The Stochastic Finite Element Method," The Proceedings of the Second Korea-France Joint Seminar on Computational Mechanics & Structural Engineering, September, 6/9, 1993, Korea.
- 4) 정 영수, 김 기정, "뉴우먼 확장법에 의한 3차원 트러스의 확률유한요소해석," 한국전산 구조공학회, 봄학술발표회 논문집, 제 6권 제 1집, 1993
- 5) 김 성호, "신뢰성 제약조건을 가진 철탍구조물의 최적화에 관한 연구," 석사학위논문, 연세대학교 대학원 토목공학과, 1993
- 6) 한국전력공사기술연구원, 송전철탍 설계풍속에 관한 연구, 최종보고서, 1989
- 7) 한국전력공사, 가공송전용 철탍설계기준(설계기준-1111), 1987
- 8) Ellingwood, B., et al, "Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58," NBS Special Publication 577,1980

표 1. 부재별 치수

| 부재 | 사용재료 | 단위중량(Kg/m) | 단면적(Cm ²) |
|----------|---------|------------|-----------------------|
| 주추재 | L130×12 | 23.4 | 29.76 |
| | L130×9 | 17.9 | 22.74 |
| | L90×7 | 9.59 | 12.22 |
| 압류재 | L120×8 | 14.7 | 18.76 |
| | L100×7 | 10.7 | 13.62 |
| | L90×6 | 8.28 | 10.55 |
| 수평재 및 사재 | L75×6 | 6.85 | 8.727 |
| | L70×6 | 6.38 | 8.127 |
| | L65×6 | 5.91 | 7.527 |
| | L65×6 | 5.00 | 6.367 |
| | L60×6 | 5.37 | 6.844 |
| | L60×5 | 4.55 | 5.802 |
| | L60×4 | 3.68 | 4.692 |
| | L50×4 | 3.06 | 3.892 |

* 총중량 : 3.028t×2 = 6.065t

표 2. 상관관계거리 d에 따른 응답변이

| d | Displacement | | | | Axial Force | | | |
|-----|--------------|--------|---------|--------|-------------|---------|---------|---------|
| | M. C. S | | Neumann | | M. C. S | | Neumann | |
| | Mean | ST. D | Mean | ST. D | Mean | ST. D | Mean | ST. D |
| 1 | 75.01 | 0.7913 | 74.99 | 0.7937 | 80.25 | 0.02060 | 80.23 | 0.09813 |
| 5 | 75.01 | 0.7913 | 74.99 | 0.7937 | 80.25 | 0.02060 | 80.23 | 0.09813 |
| 10 | 75.01 | 0.7913 | 74.99 | 0.7937 | 80.25 | 0.02060 | 80.23 | 0.09813 |
| 50 | 75.01 | 0.7917 | 74.99 | 0.7940 | 80.25 | 0.02041 | 80.23 | 0.09809 |
| 100 | 75.01 | 0.8088 | 74.99 | 0.8112 | 80.25 | 0.02005 | 80.23 | 0.0855 |
| 200 | 75.01 | 0.9529 | 75.00 | 0.9544 | 80.25 | 0.01723 | 80.23 | 0.1073 |

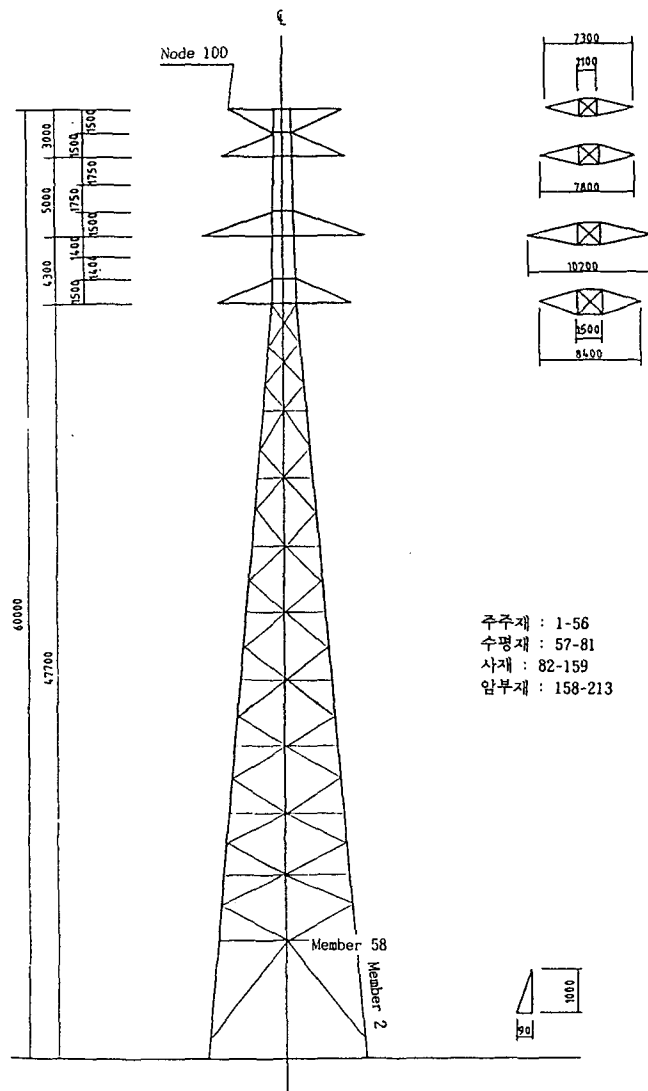


Fig 1. Transmission Tower 154KV Type 'A'

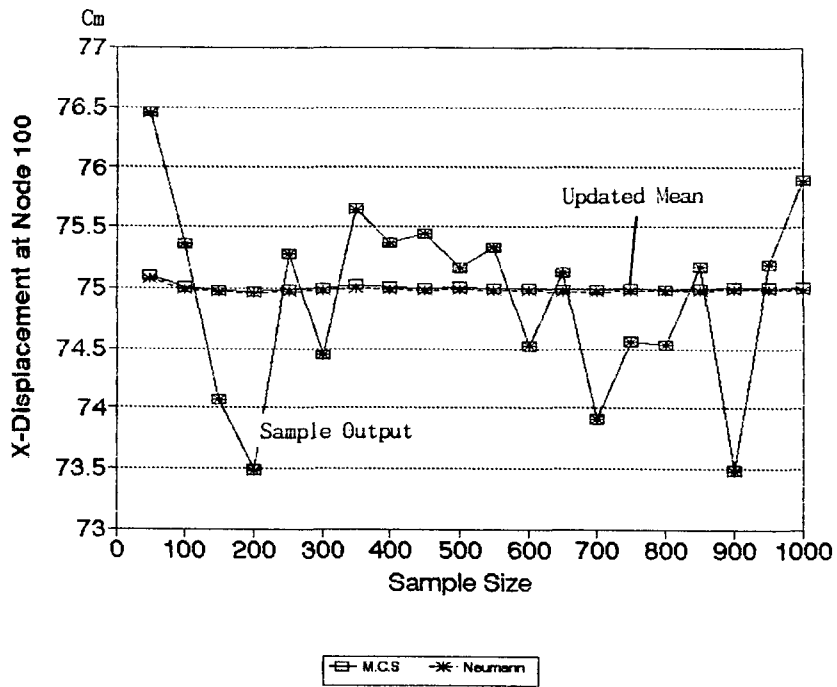


Fig 2. Horizontal Displacement at Node 100

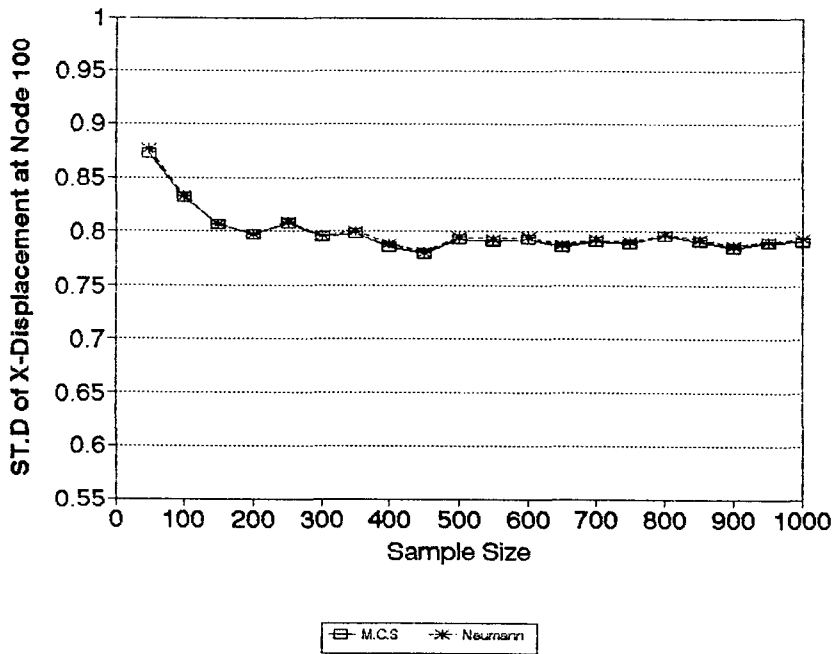


Fig 3. Standard Deviation of Horizontal Displacement at Node 100

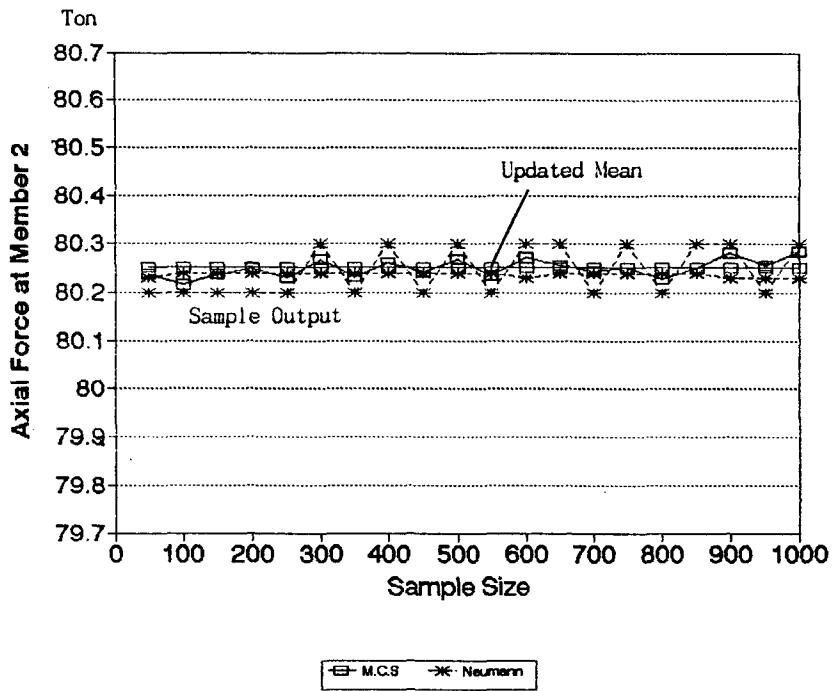


Fig 4. Axial Force of Member 2

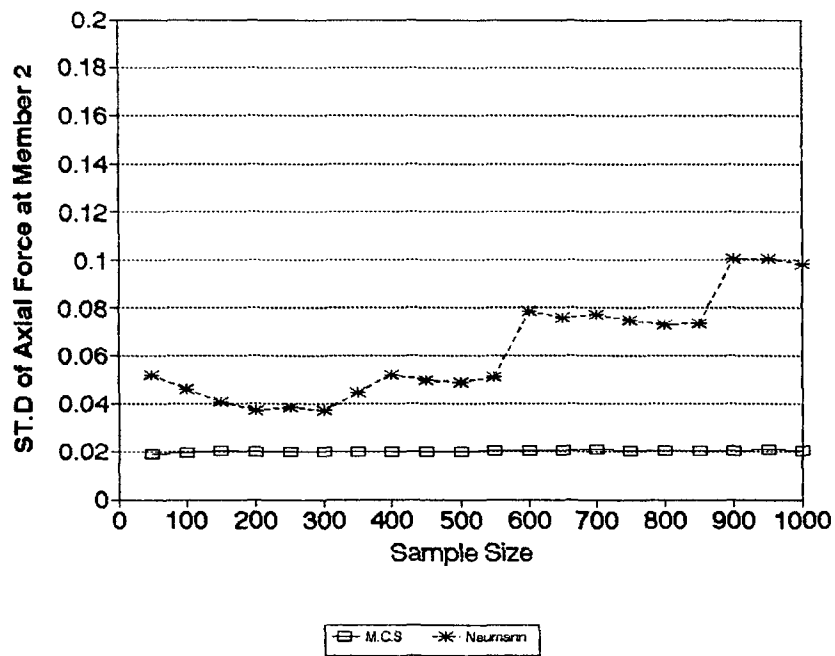


Fig 5. Standard Deviation of Axial Force at Member 2