

## 임의 형태를 가진 보의 진동해석 Vibration Analysis of Arbitrarily-Shaped Beams

민 경원\*  
Min, Kyung-Won

강 경수\*\*  
Kang, Kyung-Soo

홍 성목\*\*  
Hong, Sung-Mok

---

### ABSTRACT

A new method for the vibration analysis of arbitrarily-shaped beams is proposed on the assumption of imaginary seperation of the beams into prismatic beams and the remaining portions. The stiffness and mass of the beams are devided into two portions, according to the seperation. Applying the mode shapes of prismatic beams and Lagrange's equations give new characteristics equation. This equation has a low dimension of matrix with the coupling terms showing the effect of remaining portions on the vibration of arbitrarily-shaped beams.

---

### 1. 서론

임의 형태의 단면을 가지는 보(이하 임의 단면보라 함)은 가상적으로 일정한 단면을 지닌 보(이하 일정 단면보라 함)와 이것을 제외한 부분(이하 나머지 보라 함)으로 구분할 수가 있다. 이러한 구분을 함으로써 임의 단면보의 진동특성을 결정짓는 데 있어서 일정 단면보와 나머지 보의 상호작용을 이해할 수가 있으며 결과적으로 임의 단면보의 진동특성을 파악할 수가 있다.

해석의 첫 단계로써 임의 단면보의 질량과 강성을 일정 단면보와 나머지 보에 해당되는 질량과 강성으로 분류를 하고 임의 단면보의 모드형상을 일정 단면보의 모드형상으로 가정을 한다. 그리고 보의 포텐셜 에너지와 카이네틱 에너지를 유도를 하고 라그랑지 방정식을 적용을 하여 임의 단면보의 특성방정식을 유도를 한다.

유도된 특성방정식은 고려되는 모드형상의 갯수만큼의 차수를 지닌 매트릭스으로써 일반적인 구조진동의 특성방정식 형태를 띠고 있으나 나머지 보의 진동이 일정 단면보의 모든 모드형상에 관계하고 있으므로 질량 및 강성 매트릭스가 전체 매트릭스(full matrix)이다. 특성방정식은 일정 단면보와 나머지 보의 상호 작용을 의미하는 항으로 표현되어 있으며 원하는 진동수 대역내에 있는 진동특성을 파악하기 위해서는 대역내의 모드가 주된 역할을 하므로 특성방정식의 차수는 줄어 들게 된다.

---

\* 삼성건설 기술연구소

\*\* 서울대학교 공과대학 건축학과

예제 해석으로 나머지 보의 일정 단면보에 대한 질량비와 강성비 뿐만 아니라 해석 모드수를 변화시켜 임의 단면보의 진동특성을 파악하기로 한다

## 2. 임의 단면보의 분류

그림 1과 같은 임의 단면보는 진동특성을 결정짓는 강성,  $EI$  와 단위 길이당 질량,  $m$  으로 되어 있다. 이러한 임의 단면보를 그림 2와 같이 일정 단면보와 나머지 보로 가상적으로 가정을 하고 이에 따른 강성과 질량을 다음과 같이 분류를 한다. 실제로 존재하는 나머지 보에 양의 부호를, 그리고 존재하지 않는 나머지 보에 대해서는 음의 부호를 붙였다.

$$\begin{aligned} EI &= EI_p \pm EI_s \\ m &= m_p \pm m_s \end{aligned} \quad (1)$$

윗 식에서  $EI_p$ 와  $EI_s$ 는 각각 일정 단면보와 나머지 보의 강성을 의미하며  $m_p$ 와  $m_s$ 는 각각 일정 단면보와 나머지 보의 질량을 의미한다. 그리고 - 나머지 보는 윗 식에서 각각  $-EI_s$ 와  $-m_s$ 에 해당된다.

일정 단면보의 진동특성은 쉽게 구할 수 있으므로 일정 단면보의 모드형상을 임의 단면보의 모드형상(Ritz vector)으로 가정을 한다. 이러한 가정은 나머지 보에 의한 일정 단면보에 대한 진동 영향이 적다는 가정, 즉 나머지 보의 강성과 질량이 일정 단면보의 그것에 비하여 적다고 가정할 때 이루어 지나 임의 단면보의 해석에 있어서 모드형상의 갯수를 증가시켜 줄으로써 가정의 단점을 피할 수 있다.



그림 1. 임의 형태의 보

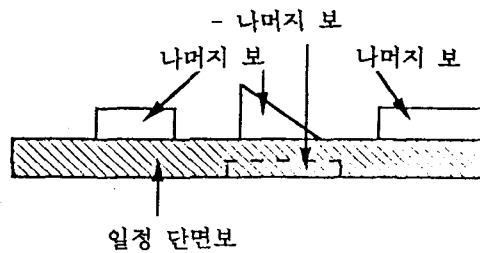


그림 2. 일정 단면보와 나머지 보

## 3. 특성방정식 유도

임의 단면보의 진동을 나타내는 미분방정식은 다음과 같다.

$$EI(x) u'''' + m(x) \ddot{u} = 0 \quad (2)$$

일정 단면보의  $i$  번째 모드형상,  $\phi_i$  을 이용하면 임의 단면보의 진동변위  $u$ 는 다음과 같으며  $a_i$ 는 모달 좌표이다.

$$u = \sum_i a_i \phi_i(x) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

임의 단면보의 운동에너지,  $K$  와 위치에너지,  $U$  는 다음과 같이 표현된다.

$$2 K = \omega^2 (\sum_i \sum_j a_i a_j m_{ij} + \sum_i a_i^2) \quad (4)$$

$$2 U = \sum_i \omega_i^2 a_i^2 + \sum_i \sum_j m_{ij} a_i a_j \omega_j^2 \quad (5)$$

윗식에서  $m_{ij}$ 와  $\omega_j^2$ 는 각각 나머지 보의 일정 단면보  $i$ 와  $j$  모드에 관계한 커플링 질량과 진동수로써 임의 단면보의 진동 특성을 결정짓는 요소이다.

위 에너지에 라그랑지 방정식을 적용시키면 다음과 같은 새로운 특성방정식이 유도가 된다.

$$(\omega_i^2 - \omega^2) a_i + \sum_j (\omega_j^2 - \omega^2) m_{ij} a_j = 0 \quad (6)$$

위 식을 매트릭스 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} (\omega_1^2 - \omega^2) + m_{11}(\omega_{11}^2 - \omega^2) & \cdot & \cdot & m_{1n}(\omega_{1n}^2 - \omega^2) \\ \cdot & (\omega_2^2 - \omega^2) + m_{22}(\omega_{22}^2 - \omega^2) & \cdot & m_{2n}(\omega_{2n}^2 - \omega^2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{symmetric} & \cdot & \cdot & (\omega_n^2 - \omega^2) + m_{nn}(\omega_{nn}^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

#### 4. 특성방정식 해석

위의 특성방정식은 일반적인 구조진동에서의 방정식과 다른 형태를 띠고 있지만 미지수인  $\omega^2$  을 기준으로 하여 다음과 같이 일반적인 형태로 나타낼 수 있다.

$$([K] - \omega^2 [M]) a = 0 \quad (8)$$

윗 식에서

$$K = \begin{pmatrix} \omega_1^2 + m_{11}\omega_{11}^2 & \omega_1^2 + m_{12}\omega_{12}^2 & \cdot & \cdot & m_{1n}\omega_{1n}^2 \\ \cdot & \omega_2^2 + m_{22}\omega_{22}^2 & \cdot & \cdot & m_{2n}\omega_{2n}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{symmetric} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_n^2 + m_{nn}\omega_{nn}^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 + m_{11} & m_{12} & \cdot & \cdot & m_{1n} \\ \cdot & 1 + m_{22} & \cdot & \cdot & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{symmetric} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 + m_{nn} \end{pmatrix} \quad (10)$$

식 (9)에서의  $i$ 번째 대각선 항의  $\omega_i^2$ 는 일정 단면보의 모드를 질량에 관하여 정규화시켰기 때문에  $i$ 번째 모드형상에 관계한 강성을 의미하며  $m_{ii}\omega_i^2$ 는  $i$ 번째 모드에 관계한 나머지 보의 강성에 해당되며  $EI_s$ 에 직접적으로 관계한다. 또한 비대각선 항인  $(ij)$ 번째 항  $m_{ij}\omega_j^2$ 는  $i$ 와  $j$ 번째 모드에 관계한 강성으로 커플링 항이다.

한편 식 (10)에서의 대각선 항의 1은 정규화된 각 모드형상의 질량을 의미하며 그외의 항은 모드형상에 관계된 나머지 보의 질량을 의미한다. 또한 비대각선 항인  $(ij)$ 번째 항은  $i$ 와  $j$ 번째 모드형상에 관계된 나머지 보의 질량을 나타낸다.

식 (8)는 일반적인 특성방정식 형태를 가지므로 해석을 쉽게 할 수 있다. 다만 정확도를 향상시키기 위하여 몇개의 모드형상을 해석에 포함시키는 것이 중요하다. 그러나 일정 단면보와 임의 단면보의 모드 간에는 일대일 대응 관계가 성립하므로 구하고자 하는 모드에 인접한 일정 단면보의 모드를 포함시켜 해석의 정확성을 향상시킬 수가 있다.

한편 식 (8)에서 하나의 모드만을 해석에 포함시켜 대응되는 고유진동수를 알고자 할 때는 스칼라 식이 되어 다음과 같은 식으로 표현이 된다.

$$\omega^2 = \frac{\omega_i^2 + m_{ii}\omega_i^2}{1 + m_{ii}} \quad (11)$$

윗 식은 임의 단면보에 대한 나머지 보의 영향이 적을 때 적용이 된다.

### 5. 예제 해석

본 논문에서 유도한 임의 단면보의 특성방정식의 해석 결과를 유한요소법에 의한 결과(요소를 충분히 사용하여 수렴하는 결과를 얻었기 때문에 정확한 결과라 볼 수 있다.)와 비교하였다. 해석 모델 1로는 그림 3와 같이 보의 우측 부분에 단면의 질량과 강성이 큰 보가 붙은 보를, 해석 모델 2로는 그림 4와 같이 중앙 부분이 가는 보를 택하였다.

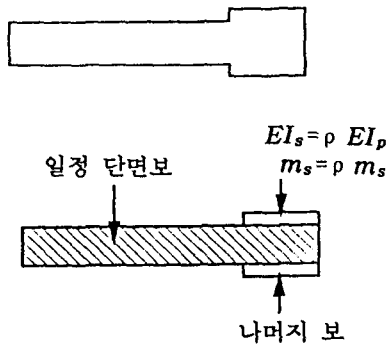


그림 3. 해석 모델 1

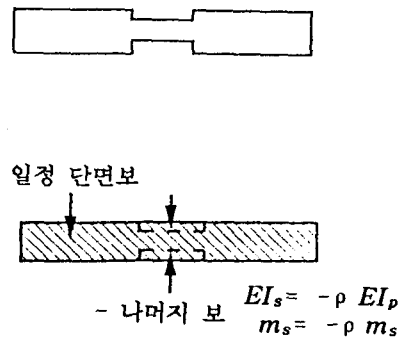


그림 4. 해석 모델 2

해석 모델 1에서는 우측 부분의 큰 보의 질량과 강성을 그림 3에서와 같이 변수  $\rho$  를 각각 0.1, 0.3, 0.6 으로 하여 좌측 부분의 작은 보의 질량과 강성과의 관계를 설정하였다. 또한 그림 3에 표시한 대로 일정 단면보를 제외한 부분을 나머지 보로 설정하였으며 해석에 포함되는 모드 수,  $\delta$  를 1, 3, 5로 변화시켜 유한요소법에 따른 결과와 비교하였다.

표 1에서와 같이 일정 단면보의 1차 모드에 대응되는 임의 단면보의 1차 고유진동수의 변화를 변수 변화에 따라 살펴 보았다. 변수  $\delta$  를 1로 한 경우에는 식 (11)를 이용하였으며 3과 5로 한 경우에는 식 (8)를 해석하였다. 질량 변화가 적은 경우에는 해석 모드수를 증가시키지 않아도 결과가 정확하게 나왔으나 질량 변화가 큰 경우 해석 모드 수를 증가시켜도 정확도에 수렴하지 않는 결과를 발견 할 수 있는데 그림 3의 모델에서 보듯이 우측 끝 부분에 달린 나머지 보의 변위를 표현할 수 있는 높은 차수의 모드를 해석에 포함시키지 않았기 때문이다.

해석 모델 2에서는 그림 4와 같이 일정 단면보와 나머지 보로 나누고 실제 존재하지 않는 나머지 보의 강성과 질량의 부호를 음수로 하였으며 변수  $\rho$  를 각각 0.1, 0.3, 0.6 으로 변화시켜 결과를 표 2 에 나타냈다. 예제 해석 1과는 달리 해석 모드수를 증가시킬 수록 수렴치를 나타내어 고차 모드의 영향이 중요하다는 것을 알 수가 있다. 이러한 사실은 나머지 보가 중앙에 위치하여 고차 모드와의 상관성을 증가시켰기 때문이다. 그림 5와 6에서는  $\delta = 5$  일때의 모드형상을 일정 단면보의 모드와 비교한 것으로 중간 부분의 나머지 보의 차이로 인하여 모드가 변하는 것을 알 수 있으며 해석 모델이 대칭인 관계로 2차 모드의 변화는 거의 없었다.

$\delta \backslash \rho$	제한된 방법			FEM
	1	3	5	
0.1	1.769	1.769	1.769	1.769
0.3	1.728	1.728	1.728	1.733
0.6	1.672	1.672	1.672	1.689

$\delta \backslash \rho$	제한된 방법			FEM
	1	3	5	
0.1	1.771	1.770	1.769	1.769
0.3	1.728	1.718	1.712	1.710
0.6	1.651	1.600	1.557	1.552

표 1. 임의 단면보의 고유진동수(모델 해석 1)  
단위: rad/sec

표 2. 임의 단면보의 고유진동수(모델 해석 2)  
단위: rad/sec

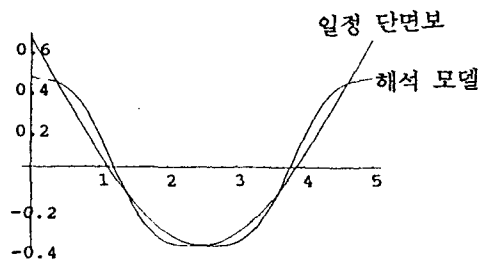


그림 5. 해석 모델 2의 1차 모드

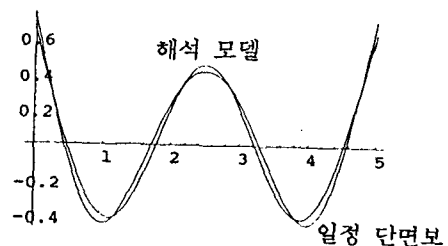


그림 6. 해석 모델 2의 3차 모드

## 6. 결론

임의 형태의 단면을 지닌 보의 진동 해석을 위한 새로운 방법을 제안하였다. 임의 형태의 보를 일정한 단면을 지닌 보와 그외의 부분으로 분리한 다음 일정한 단면을 지닌 보의 모드형상을 임의 형태의 보의 모드형상으로 가정을 하여 특성방정식을 유도하였다. 특성방정식은 일반적인 특성방정식의 형태를 이루고 있으나 구하고자 하는 고유진동수에 인접한 모드만을 고려하여 방정식의 차수를 크게 낮출 수 있어 계산의 간편함을 꾀할 수가 있다. 또한 유도된 특성방정식을 통하여 임의 형태의 보를 이루는 부분적인 보간의 상호작용을 이해할 수가 있다.

## 7. 참고문헌

1. Blevins, R.D., "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Chapter 8, Straight Beams, Van Nostrand Reinhold Co., NY., 1979.
2. Thomson, W.T., "Theory of Vibration with Applications", Chapter 7, *Lagrange's Equation*, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ, 1988.
3. Wolfram, S., "Mathematica: A System Doing Mathematics by Computer", Addison Wesley, NY. 1991.