

한국전산구조공학회

1993년도 가을학술발표회 논문집

호장법을 이용한 공간트러스의 스냅스루거동 해석

Snap-Through Behavior Analysis of Space Truss using Arc-Length Method

권택진*

서일교**

이상환***

Kwon, Taek Jin

Suh, Ill Gyo

Lee, Sang Hoan

Abstract

This paper is concerned with the geometrically nonlinear behavior of elastic systems under conservative loading conditions. In particular, the topic are snap through problems and the arc-length method to pass limit points of space trusses is used. And numerical examples are presented to trace nonlinear equilibrium paths.

1. 서론

인장과 압축의 축력만을 저항하도록 설계된 트러스구조물은 사용되는 개개 부재들이 일반적으로 세장하게 설계되므로, 재료적 비선형을 나타내기 전에 탄성불안정에 의한 좌굴로 파괴되는 경향이 있다. 특히, 절점이 큰 힘을 받고 있다면 변형된 형상에서의 절점에서는 힘의 전달능력이 없기 때문에 절점의 안정(node stability)이 상실되어 인접한 부재에 좌굴이 발생된다. 따라서, 구조물의 일부분에 하중전달능력이 감소되어 국소영역에서의 안정(local stability)이 상실되고, 전체구조물의 안정(global stability)에 크게 영향을 미친다. 이러한 구조물의 연속적 붕괴(progressive collapse)는 힘의 재분배(force redistribution)가 발생하며 이러한 재분배 현상은 인접부재의 파괴원인이 된다. 특히 동적효과(dynamics effect)가 있는 스냅스루(snap-through) 현상은 힘의 재분배를 빨리 증가시킨다. 그러나 하중증분법을 이용한 트러스구조물의 대변위이론에 관한 연구는 극한점 이후의 평형경로를 추적하는데 어려움이 있기 때문에 대개 좌굴전(pre-buckling) 거동에 관한 연구로 한정되어 왔다. 따라서 본 연구에서는 임의의 형상과 하중상태를 가진 공간트러스구조의 스냅스루 불안정을 평가하기 위하여 Riks와 Crisfield의 수정된 호장법(modified Arc-Length Method)을 이용하였고 Updated Lagrangian formulation을 이용하여 기하학적 비선형을 수행하였다.

2. 기하학적 비선형의 유한요소해석

공간트러스구조의 스냅스루 거동을 해석하기 위해 절점의 변위는 크지만 변형이 미소하고 재료의 특성은 선형의 구성법칙에 따른다는 가정하에 있는

* 정회원, 성균관대 교수

** 정회원, 성균관대 강사

*** 정회원 동아건설기술연구소 사원

대변위 유한요소식을 기초로 전개한다. 기하학적 비선형의 유한요소해석에 Lagrangian Coordinates에 의해서 전체포텐셜을 나타내고 평형방정식을 얻기 위해서 포텐셜을 미분하고, 그 평형방정식에서 선형의 증분적 평형방정식을 미분의 형태로 만든다.

트러스요소에 대해서, Fig.1은 절점의 좌표축에 의한 부재력 벡터와 변위 벡터를 나타내며, Fig.2는 현재의 형상과 변형된 형상에서의 증분된 변위 벡터를 나타낸 것이다.

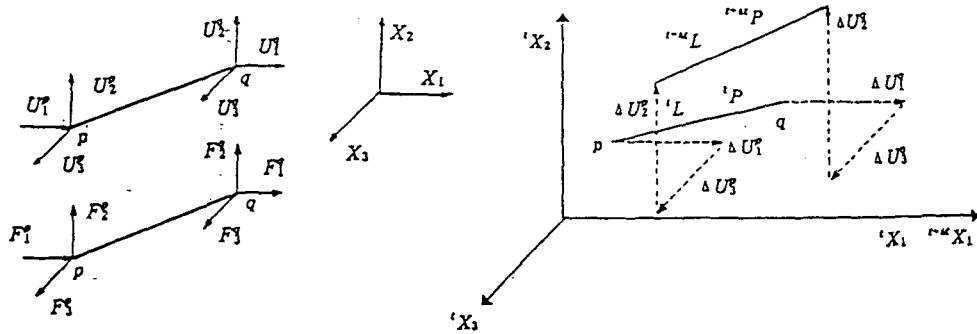


Fig.1 Member displacement vector and force vector Fig.2 Configuration of truss element in current and deformed state

두 절점 사이에 놓인 부재의 길이와 방향여현은 다음과 같다.

$$L = \sqrt{(x_1^q - x_1^p) \cdot (x_1^q - x_1^p) + (x_2^q - x_2^p) \cdot (x_2^q - x_2^p) + (x_3^q - x_3^p) \cdot (x_3^q - x_3^p)} \quad (1)$$

$$C_i = \frac{1}{L} (x_i^q - x_i^p) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

단면적 \$A\$에 작용하는 축력과 변형되지않은 길이 그리고 탄성계수를 각각 \$P, L, E\$ 라 놓으면, 이때 접선강성매트릭스는 다음과 같은 방정식으로 정식화할 수 있다.

$$[K_e] = \frac{EA}{L} C \cdot C^t, \quad [K_g] = \frac{P}{L} [I - C \cdot C^t] \quad (3)$$

국소좌표계에서 강성매트릭스는 다음과 같다.

$$[{}^tK] = [{}^tK_e] + [{}^tK_g] \quad (4)$$

여기서

[{}^tK] : 국소좌표계에서의 강성매트릭스

[{}^tK_e] : 탄성강성매트릭스

[{}^tK_g] : 기하학적강성매트릭스

따라서, 증분에 대한 힘-변위 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\Delta F] = [{}^t K] \cdot [\Delta U] \quad (5)$$

여기서

$[\Delta F]$: 증분된 힘

$[\Delta U]$: 증분된 변위

3. 공간트러스의 스냅스루거동 해석

극한점 이후의 거동을 추적하기 위해 호장법이 이용된다. 본 연구에서는 구조물의 정적해석만을 고려하며, 시간 t 의 개념을 사용하여 하중의 변화상태를 표시하고 참고문헌 8의 기호를 이용하면 비선형구조물의 정적해석에서 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F = 0 \quad (6)$$

여기서,

${}^{t+\Delta t} R$ 과 ${}^{t+\Delta t} F$ 은 각각 시간 $t+\Delta t$ 에서 계산된 외부에서 절점에 가해지는 하중벡터이고, ${}^{t+\Delta t} F$ 은 부재의 내력에 기인한 절점력 벡터이다.

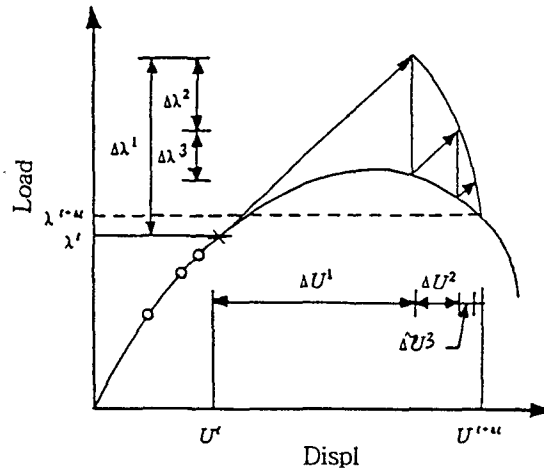


Fig.3 Arc-length algorithm

각 하중단계에서 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson) 반복법이 이용되며 구조물이 비례하중을 받는다고 가정하면 증분방정식은 다음과 같다.

$${}^t K^{(i)} \cdot \Delta U^{(i)} = \Delta \lambda^{(i)} \cdot P + R^{(i)} \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (7)$$

$$R^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} \cdot P - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (8)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + U^{(i)} \quad (9)$$

$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} = {}^t\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)} \quad (10)$$

여기서

${}^tK^{(i)}$: i 번째 반복 계산시 구조물의 접선강성매트릭스

P : 하중성분의 비율만을 나타내는 하중벡터

λ : 하중인자

${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$: 시간 t 에서 i 번째 증분된 변위벡터

R : 불평형하중벡터

F : 부재내력에서 기인하는 절점력 벡터

초기조건: ${}^{t+\Delta t}U^{(0)} = {}^tU$, ${}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^tF$, ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(0)} = {}^t\lambda$

방정식의 대칭성파괴를 피하기 위해 Batoz와 Dhatt의 기법을 이용하면 증분 t 의 i 번째 반복에서 하중증분 $\Delta\lambda^{(i)}$ 와 변위증분 $\Delta U^{(i)}$ 의 계산은 다음과 같다.

1) 불평형하중벡터 ($\Delta R^{(i)}$)로 인한 증분변위벡터 ($\Delta U_R^{(i)}$)는 방정식 (11)으로써 계산된다.

$${}^tK^{(i)} \cdot \Delta U_R^{(i)} = R^{(i)} \quad (11)$$

2) 비례하중벡터 P 로 인한 증분변위벡터 $\Delta U_P^{(i)}$ 는 방정식 (12)로써 계산된다.

$${}^tK^{(i)} \cdot \Delta U^{(i)} = P \quad (12)$$

3) N 개의 자유도를 가진 문제에서는 변위벡터 $\Delta U^{(i)}$ 와 하중변수 $\Delta\lambda^{(i)}$ 에 대한 $N+1$ 개의 미지수를 포함하며 구속조건이 추가되며 구속방정식은 다음과 같다.

$$U^{(i)} \cdot U^{(i)} = \Delta L \cdot \Delta L \quad (13)$$

여기서

$$\begin{aligned} U^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}U^{(i)} - {}^tU \\ &= U^{(i-1)} + \Delta U_R^{(i)} + \Delta\lambda^{(i)} \cdot \Delta U_P^{(i)} \end{aligned} \quad (14)$$

4) 방정식 (14)에 방정식 (13)을 대입하면 하중변수 $\Delta\lambda^{(i)}$ 에 대한 다음과 같은 2차 방정식을 구할 수 있다.

$$A \cdot \Delta\lambda^{(i)} \cdot \Delta\lambda^{(i)} + B \cdot \Delta\lambda^{(i)} + C = 0.0 \quad (15)$$

여기서

$$A = \Delta U^{(i)} \cdot \Delta U^{(i)}$$

$$B = 2.0 \cdot \Delta U^{(i)} \cdot (U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)})$$

$$C = (U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)}) \cdot (U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)}) - \Delta L \cdot \Delta L$$

5) 첫번째 반복에서, $\Delta \lambda^{(1)}$ 을 결정한다.

6) i 번째 반복에서, 방정식 (16)으로 부터 $\Delta \lambda^{(i)}$ 을 결정한다.

$$\delta = U^{(i-1)} \cdot U^{(i)} \quad (16)$$

a) 방정식 (15)로 부터 허근을 얻었다면 호의 길이 ΔL 이 1/2로 줄어들고 이전에 결정된 마지막의 평형형상에서 다시 계산된다.

b) 방정식 (15)에서 두 개의 실근을 얻는다면 δ 의 값이 가장 큰 것을 근으로 이용한다. 두 근이 부(negative)이면, 선형에 보다 가까운 값을 ($\Delta \lambda = -C/B$) 근으로 선정한다.

7) 단계 5)와 6)에서 $\Delta \lambda^{(i)}$ 이 결정되면 $\Delta U^{(i)}$ 을 결정한다.

구조물의 거동이 거의 선형일 때는 호의 크기가 크게 그리고 비선형성이 심한 영역에서는 그 크기를 작게 조절하며 최대 반복수 내에서 수렴에 실패하면 호의 크개를 감소시키고 이전 단계에서 확립된 평형상태에서 다시 반복을 수행하는 등의 효율적이고 자동화된 컴퓨터 프로그램이 필요하다. 본 연구에서, 호의 크기를 자동적으로 생성하기 위해 방정식 (17)을 이용한다.

$$\Delta L_{new} = \sqrt{(N_1/N_2)} \Delta L_{old} \quad (17)$$

여기서

N_1 은 규정된 반복의 최적횟수이고 N_2 는 규정된 반복의 최적횟수이다.

ΔL 이 결정되면 $(\Delta \lambda^{(i)})^2 = (\Delta L)^2 / (U^{(i)} \cdot U^{(i)})$ 로 부터 절대값은 같고 부호가 다른 두 개의 $\Delta \lambda^{(i)}$ 를 얻을 수 있다. 본 논문에서는 2개의 $\Delta \lambda^{(i)}$ 을 방정식 (15)에 대입하여 δ 의 값이 큰 값을 선택한다.

$$\delta = U^{(0)} \cdot U^{(i)} \quad (18)$$

여기서

$$U^{(0)} = {}^t U - {}^{t-\Delta t} U$$

$$U^{(i)} = \Delta U_R^{(i)} + \Delta \lambda^{(i)} \cdot \Delta U_F^{(i)}$$

4. 수치해석 예제

2개의 해석예제가 현재의 해석결과의 타당성을 증명하기 위해 제시된다. Fig. 4는 해석결과의 비교목적으로 선정된 star dome truss 의 기하형상과 하중상태를 나타낸 것이다. Fig. 5는 절점 1에 집중하중을 받을 때의 하중-처짐 곡선을 나타낸 것이다. Fig. 5에 나타낸 것과 같이 현재의 해석결과와 M. Papadrakakis (참고문헌. 1)가 the vector iteration methods 으로 수행한 해석결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

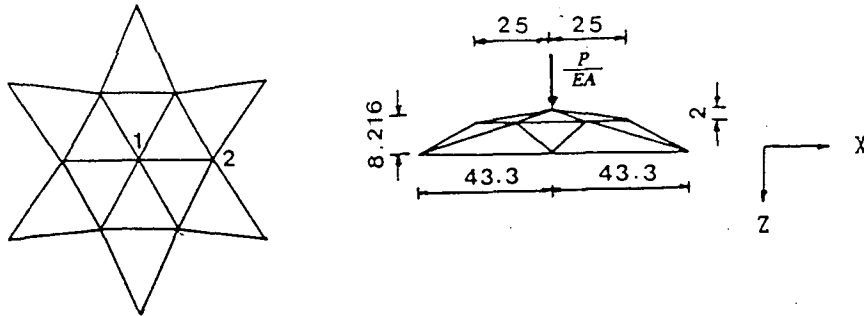


Fig.4 Geometry and Loading for Star Dome Truss

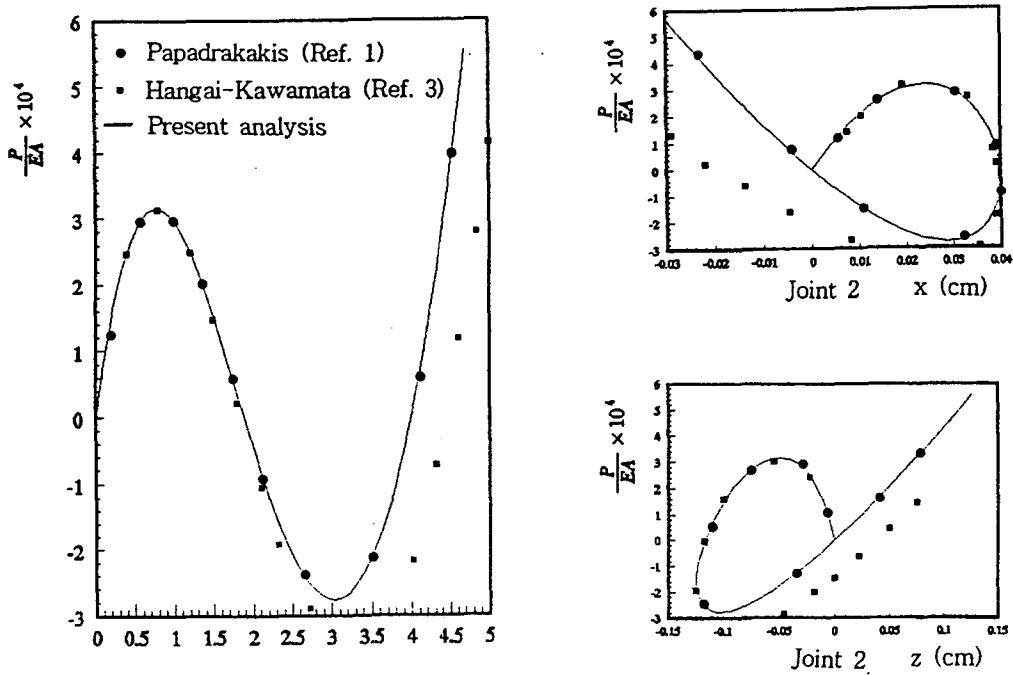


Fig.5 Load-deflection Curves

스팬이 10m, 높이 2m인 돔트러스를 대칭하중, 비대칭하중, 집중하중을 가한 3가지 경우로 분류하여 좌굴 이후의 거동을 조사하였다. Fig. 6과 같이 똑같은 단면적을 가진 128개의 부재와 49개의 힌지절점으로 구성되어 있는 트러스 구조물에서 축방향의 강성 EA 는 10^4 kg 이고 하중을 가한 절점은 평면상에서 검은 점으로 나타내었다.

정점에 집중하중을 가한 경우에, Fig. 7(a)에 나타난 것과 같이 하중인자 $\lambda = 20.598$ 에서 스냅스루거동을 나타내었다. Fig. 7(b)와 7(c)는 대칭하중과 비대칭하중을 가한 경우에서 하중인자와 수직방향의 최대변위와의 곡선을 나타낸 것이다.

대칭하중과 비대칭하중 가한 경우에서도 집중하중을 가한 경우와 유사한 형태의 비선형거동을 나타내었고 각각 90.42와 90.50의 극한하중점에서 스냅스루좌굴로 인한 불안정이 발생했다. 그러나 집중하중을 받는 경우는 위의 두가지 조건에서 보다 현저하게 낮은 하중상태에서 불안정이 발생되었다. 따라서 큰 공간을 구성하는 트러스구조물의 설계에서 집중하중을 고려하는 것은 실질적이지 못하지만 구조물의 전반적인 안정을 위해서는 충분한 안정요소를 고려해서 설계되어야 한다.

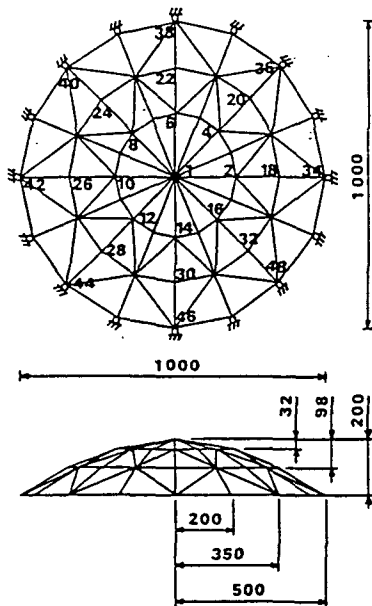
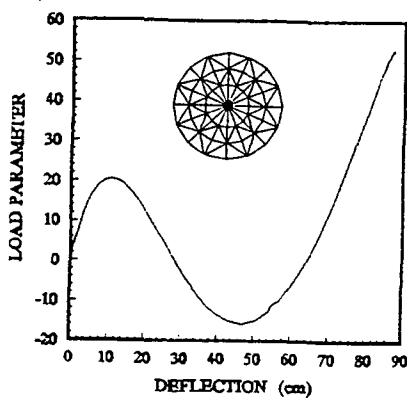


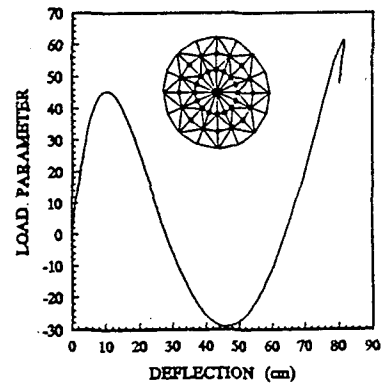
Fig.6 Geometry for Shallow Dome Truss

Table 1 Load Modes (kg)

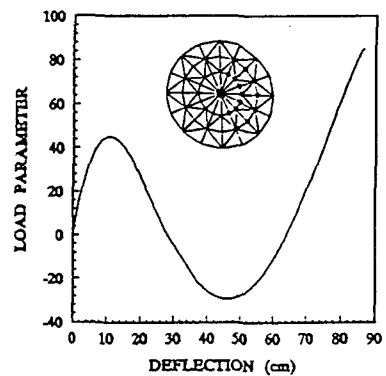
Joint Number	Concentrated Load	Symmetric Load	Nonsymmetric Load
1	2.0	1.0	1.0
2 - 5	0.0	0.0313	0.0715
6 - 14	0.0	0.0313	0.0
15 - 21	0.0	0.0313	0.0715
22 - 30	0.0	0.0313	0.0
31 - 33	0.0	0.0313	0.0715



(a) Concentrated Loading Case



(b) Symmetric Loading Case



(c) Nonsymmetric Loading Case

Fig.7 Load-Deflection Curves at Joint 1

5. 결론

본 논문에서 유도된 식은 재료가 선형의 탄성으로 거동하는 대변위 유한요소식을 기초로 하여 전개하였다. 공간트러스구조의 스냅스루좌굴현상을 연구하기 위해 Riks and Crisfield의 호장법(modified Arc-length method)을 이용하였다. 또한, 효율적인 해석의 수행을 위해 호장법에 자동화 기법을 이용하였다.

해석결과로 부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 대칭, 비대칭 하중과 집중하중을 가한 모든 경우에 대해서, 하중증분법에서 구할 수 없는 스냅스루등의 임계영역에서 수치적인 어려움없이 하중-변위 곡선을 구할 수 있었다.
2. 비선형성이 심한 부분에서는 호의 크기를 작게 그리고 선형적인 거동을 나타내는 부분에서는 호의 크기를 크게 하는 등의 자동화로써 효율적인 해석을 할 수 있었다.
3. 한 하중단계 내에서 최적반복수를 2회 또는 3회를 주어 효과적인 해석을 할 수 있었다.
4. 대칭하중이나 비대칭하중에 의한 영향보다 집중하중을 가한 조건에서 임계 하중이 약 50% 낮은 하중점에서 불안정이 발생하였다.

참고문헌

1. Papadrakakis, M., " Post-Buckling analysis of spatial structures by Vector iteration methods," Computer & Structure., Vol.14, 1981, pp.393-402.
2. Hangai, Y., Guan, F.L., Magara, H. and Okamura, K., "Elasto-Plastic Buckling Analysis of Structural by Generalized Incremental Method," "Proceedings of the Third Summer Colloquium on Shell and Spatial Structures, August 7-10, 1990.
3. Ramm, E., "Strategies for Tracing Non-linear responses near limit points," Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (Eds. Wunderlich, W., Stein, E. and Bathe, K.J.), Springer-Verlag, New York, 1981, pp.63-89.
4. Crisfield, M.A., " A Fast Incremental/iterative procedure that handles 'Snap-Through'," Computer & Structures, Vol.13, pp.55-62.
5. Rothert, H., Dickel, T. and Renner, D., " Snap-Through of Reticulated Space Trusses," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.107, 1981, pp.129-143.
6. Bellini, P.X. and Chulya, A, " An Improved Automatic Incremental Algorithm for The Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations," Computer & Structures., Vol.26, 1987, pp.99-110.
7. Meek, J.L., Tan, H.S. "Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by An Incremental Iterative Technique," Computer Methods applied Mechanics Engineering., Vol.47., 1984, pp.261-282.
8. Bathe, K.J., " Finite Element procedures in Engineering Analysis," PRENTICE-HALL, 1982.
9. Jagannathan, D.S., Epstein, H.I., and Christiano, P., "Nonlinear Analysis of Reticulated Space Trusses," J. Struct. Div. ASCE 101(ST12), 1975, pp.2641-2658.