

有限要素解析에서 彈性 및 非彈性 기둥에 對한
有效길이 係數의 自動算定
Automatic Generation of Effective Length Factor of
Elastic and Inelastic Column in the Finite Element Analysis

李 成 雨* ◦ 李 善 玖** 李 亨 雨***
Lee, Sung Woo Lee, Sun Goo Lee, Hyung Woo

ABSTRACT

In the design of column, computation of effective length factor for calculation of allowable compressive stress is inevitable. In this study, computer code which automatically generates effective length factor in the finite element analysis is developed. The program is developed to be used for orthogonal and nonorthogonal frame structure. Some illustrative examples verify that the computation results are correct for various cases.

1. 序 論

有限要素프로그램을 利用한 構造設計時 기둥요소의 許容應力計算에 필수적으로 따르는 기둥의 有效挫掘 길이계수를 유한요소 프로그램에서 自動算定할수 있는 모듈을 開發하였다.

일반적으로 기둥의 挫掘問題는 單純支持, 固定端 또는 自由端등 매우 確實한 境界條件을 가진 單一 壓縮材를 대상으로 하고있다. 그러나 橋梁, 高層骨造와 같은 실제 구조물의 일부를 이루는 기둥과 같은 壓縮材에서는 境界條件이 不確實하고 端部에 연결된 다른 기둥이나 보 등의 剛性和 節點의 水平移動(Sidesway) 可能性에 따라 압축재의 有效 좌굴길이 가 달라진다. 골조 구조물에서 강재기둥 또는 콘크리트 기둥에 대한 有效좌굴 길이계수를 구하는 일반적인 방법은 보통 有效 좌굴길이 圖表(Alignment Chart)를 이용하고 있다.(1, 6, 7) 그러나 구조물을 유한요소해석 프로그램으로 해석하고 설계할 경우 각 기둥에 대한 有效좌굴길이계수를 일일이 도표를 이용하여 계산하는 것은 매우 번거로운 작업이 되므로, 이 計算을 自動化할 필요가 있다.

이를 위하여 골조구조물의 水平移動이 許容되는가 與否에 따라 Braced frame 과 Unbraced frame 으로 區分하여 계수를 구해야 하지만, 實際 3次元 構造物에서는 어느 방향 골조에만 브레이싱이 되어 있거나 골조의 일부에만 브레이싱이 되어 있는 경우가 있어 靛別이 曖昧한 경우가 많다. 따라서, 프로그램을 이용할 때 이 점은 使用者가 미리 判斷하여 Braced frame으로 할 것인지 Unbraced frame으로 할 것인지를 결정하여야 한다. 참고로 SAP90(2)같은 프로그램에서는 모든 경우를 Unbraced frame으로 간주하고 有效길이 계수를 계산하고있다.

* 국민대학교 공과대학 토목공학과 부교수, 정회원, 공학박사
** (주) 동명기술공단 구조부 이사, 정회원, 토목구조 기술사
*** 제철 엔지니어링 (주) CAD/CAE 개발실 과장, 정회원

本 研究에서는 이러한 要求에 부응하여 유한요소 프로그램의 要素網 데이터를 이용하여 보의 剛性計算에 필요한 데이터를 抽出하고 이들을 이용하여 Braced 및 Unbraced frame에 대한 Stability方程式의 解를 求한 後 기둥요소의 有效挫掘 길이係數를 自動算定하는 프로그램을 개발하였다. 프로그램이 취급할 수 있는 골조의 종류는 2차원 및 3차원 直交 또는 非直交骨造이고 기둥요소의 強軸 및 弱軸에 대한 有效좌굴 길이계수를 自動산정할수 있도록 하였다.

2. 기둥의 有效길이 계수산정

2.1 許容應力 계산에서 有效挫掘길이

設計를 위한 許容應力을 算定하기 위해서는 有效좌굴길이를 算定해야 하며 이를 위해 各種 示方書는 표 1. 과 같은 數値로서 概略的인 有效길이계수(K)를 推薦하고 있다. 그러나 材端條件은 正確하게 規定지을수 없으며 構造係의 剛性에 따라 多樣한 條件에 따른 有效길이 계數를 算定해서 許容壓縮應力을 求해야 한다. 그림 1에서 보듯이 許容壓縮應力의 계산에서 有效좌굴 길이의 산정은 필수적이며 다양한 모델과 境界조건을 취급할 수 있는 유한요소 해석에서 이러한 有效좌굴길이 계수를 自動으로 산정하여 설계효율을 제고 시킬 필요가 있다.

표 1. 기둥의 有效좌굴 길이계수(1, 6)

Buckled shape of column is shown by dashed line	a.	b.	(c)	(d)	(e)	(f)
Theoretical K value	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Recommended design value when ideal conditions are approximated	0.65	0.60	1.2	1.0	2.10	2.0
End condition code						
			Rotation fixed and translation fixed Rotation free and translation fixed Rotation fixed and translation free Rotation free and translation free			

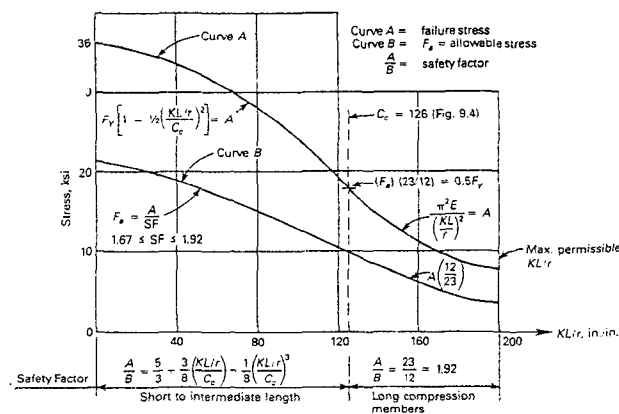


그림 1. A36 鋼의 降伏應力 및 許容應力 曲線(8)

2.2 유효길이 계수산정 알고리즘

Stability 방정식의 유도과정은 參考文獻(3) 등에 잘 나와 있으므로 여기서는 프로그램에 適用한 最終式만 記述하기로 한다. 유효길이 계수를 K 라 두고 $\Phi = \pi/K$ 라고 했을 때 Stability 방정식은 다음과 같이 된다.

1) Braced frame :

$$F(\Phi) = \frac{G_A G_B}{4} \Phi^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2} \right) \left(1 - \frac{\Phi}{\tan \Phi} \right) + \frac{2}{\Phi} \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) - 1 = 0 \quad (1)$$

2) Unbraced frame :

$$F(\Phi) = \frac{G_A G_B \Phi^2 - 36}{6(G_A + G_B)} - \frac{\Phi}{\tan \Phi} = 0 \quad (2)$$

이 式들을 誘導하는 過程에서 다음과 같은 假定에 基礎하였다.

- ① 모든 舉動은 彈性 範圍內에서 한다.
- ② 部材는 等斷面을 維持한다.
- ③ 모든 기둥은 各自의 座掘荷重을 同時에 받는다.
- ④ 構造物은 對稱 直交骨造로 이루어져 있다.
- ⑤ 節點에서 들보에 의한 拘束모멘트는 각 기둥의 剛性에 比例해서 기둥에 分配된다.
- ⑥ 들보는 兩端에서 기둥에 의해 彈性的으로 拘束되어 있고, 座掘이 일어나는 瞬間 들보 兩端의 回轉變位의 크기는 같고 方向은 反對이다.
- ⑦ 들보는 軸荷重을 받지 않는다.

여기서, G_A, G_B 는 各各 기둥의 A端과 B端에서의 剛性係數比 G로써 다음과 같이 表示된다.

$$G = \frac{\sum \frac{E_c I_c}{L_c}}{\sum \frac{E_g I_g}{L_g}} \quad (3)$$

여기서, I_g / L_g 는 A 또는 B단으로 接合되는 보(Girder)에 대한 剛性比를 나타내고 I_c / L_c 는 기둥(Column)에 대한 剛性比를 나타낸다. 式 (1), (2)의 非線形 方程式에 대한 解는 Newton - Raphson 方法에 의해서 구하며 反復解에 대한 式은 다음과 같다.

$$\Phi_2 = \Phi_1 - \frac{F(\Phi)}{F'(\Phi)} \quad (4)$$

방정식의 해를 구하는 과정에서 $F(\Phi)$ 및 $F'(\Phi)$ 의 式에서 $\tan \Phi$ 또는 $\tan(\Phi/2)$ 에 대한 값이 무한대 또는 영으로 되는 값이 발생하므로 프로그램에서는 이에 대한 適切한 考慮를 하여서 恒常 安定된 해를 구할 수 있도록 하였다. 한편 해는 어떤 部分에서 初期值에 대단히 敏感하므로 여러번의 施行錯誤를 거쳐 알맞은 初期值를 選定하였다.

2.3 有限要素 프로그램 Interface

유한요소 프로그램과의 Interface는 각 기둥요소에 대해 식(1), (2)의 G_A , G_B 에 해당하는 G_I , G_J 를 要素網 데이터와 断面性質 데이터 등을 이용하여 구하는 프로그램으로 구성된다. 일단, G_I , G_J 가 구해지면 Stability방정식 해의 모듈에서 각 기둥 요소의 유효길이 계수를 계산하게 된다. 그 節次를 段階別로 要約하면 다음과 같다.

1) 유한요소의 각 절점에서 이 절점에 연결되는 모든 보 및 기둥요소에 대해 국부좌표계에서 강성 $S(=EI/L)$ 를 각각 계산한다. 이 때 보의 원단에 구속조건이 있으면 다음과 같이 S 값을 수정한다.

- ① Braced frame : 원단 고정($2.0 \times S$), 원단 힌지($1.5 \times S$)
- ② Unbraced frame : 원단 고정($1/1.5 \times S$), 원단 힌지($1/2.0 \times S$)

2) 1 단계에서 계산된 剛性 S 값을 全體座標係로 變換시킨다.

- ① 全體座標係에서 局部座標係로 變換하는 式은 다음과 같다.

$$\left\{ x \right\}_l = \left[T \right] \left\{ X \right\}_g \quad (4)$$

이를 이용하여 강성값을 변환시키면 다음과 같이 된다.

$$\text{強軸 剛性} : S_x = | T_{31} S_T + T_{32} S_Y + T_{33} S_X | \quad (5)$$

$$\text{弱軸 剛性} : S_y = | T_{21} S_T + T_{22} S_Y + T_{23} S_X | \quad (6)$$

- ② 국부좌표계에서 전체좌표계로 변환

변환매트릭스의 直交性을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X\text{방향 강성} : S_x = | T_{23} S_y + T_{33} S_x | \quad (7)$$

$$Y\text{방향 강성} : S_y = | T_{22} S_y + T_{32} S_x | \quad (8)$$

$$\text{비틀림 강성} : S_T = | T_{21} S_y + T_{31} S_x | \quad (9)$$

境界條件에 대한 변환도 類似한 방법으로 변환시킬 수 있다. 6개의 自由度에 대한 전체좌표계의 拘束條件을 나타내는 1 또는 0 으로 構成된 벡터 $\{ID\}_g$ 를 국부좌표계 $\{ID\}_l$ 로 변환시킨다.

$$\left\{ ID \right\}_l = \left[T \right] \left\{ ID \right\}_g \quad (10)$$

變換을 遂行한후 絶對值를 취하고 정수로 置換시켜 기둥端部の 境界條件이 힌지인지 고정인지 결정한다.

3) 각 절점에서 전체좌표계로 변환시킨 강성 S 값은 그 절점에 連結된 모든 보요소 또는 기둥요소에 대해 合算시켜 그 節點에 대한 보요소의 강성과 기둥요소의 강성을 各各 구한다.

4) 각 기둥요소에 대하여 3단계에서 合算된 보요소 및 기둥요소의 강성 값들은 그 기둥의 국부좌표계로 다시 변환시킨다. 이 강성들을 이용하여 기둥요소의 절점 I와 절점 J에 대하여 G_I 와 G_J 를 구한다. 이를 强축(x축)과 弱축(y축)에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$\text{强축} : G_{x,i} = (S_{cx}/S_{gx}), i \quad G_{x,j} = (S_{cx}/S_{gx}), j$$

$$\text{弱축} : G_{y,i} = (S_{cy}/S_{gy}), i \quad G_{y,j} = (S_{cy}/S_{gy}), j$$

5) 4단계에서 결정된 $G_{x,i}$ 와 $G_{x,j}$ 를 이용하여 Stability 방정식의 해를 구해서 강축에 대한 기둥의 유효길이 계수를 구한다. 약축에 대해서는 $G_{y,i}$ 와 $G_{y,j}$ 를 이용하여 구한다. 그 다음은 Braced frame 또는 Unbraced frame에 대해 相應하는 Stability 方程式을 各各 適用한다.

2.4 非彈性 기둥에 대한 有效挫掘 길이계수

실제 구조물에서 大部分의 기둥은 細長比 (KL/r) 가 임계세장비 $C_c(= \sqrt{2\pi^2E/F_y})$ 보다 작으며 기둥은 비탄성 거동을 하게 된다. 식 (1), (2)의 G 값들은 탄성좌굴 가정하에서 구한값들이므로 이경우 G 값들을 수정해 주어야 보다 현실적인 유효길이 계수가 산정된다. 보는 彈性舉動(E)을하고 기둥은 非彈性 舉動(E_t)을 하게 된다고 가정하면 剛度係數比는 다음과 같이 補整할 수 있다.⁽³⁾

$$G_{inelastic} = \frac{\sum (E_t I/L)_{column}}{\sum (EI/L)_{girder}} = G_{elastic} \left(\frac{E_t}{E} \right) \quad (11)$$

위의 補正係數는 Yura⁽⁹⁾의 제안에 의하면 다음과 같이 約算할 수 있다.

$$\frac{E_t}{E} = \frac{F_a \text{ (中間柱의 許用應力)}}{F_e' \text{ (長柱의 許用應力)}} \quad (12)$$

여기서,

$$F_a = \frac{[1 - (KL/r)^2 / (2C_c^2)] F_y}{5/3 + 3(KL/r)/8C_c - (KL/r)^3 / 8C_c^3}$$

$$F_e' = \frac{12 \pi^2 E}{23 (KL/r)^2}$$

Disque⁽¹⁰⁾는 식 (12)를 다소 수정하여 다음과 같이 F_a 대신 실압축응력 f_a 를 사용할것을 제안하였다.

$$\frac{E_t}{E} = \frac{f_a}{F_e'} \quad (13)$$

따라서 本 研究에서는 구해진 세장비가 임계세장비 C_c 보다 작은 경우($C_c < KL/r$)에 대해서는 유한요소 해석결과로 구해진 軸應力(f_a)을 이용하여 그 기둥의 剛性係數를 補正한후 有效挫掘 길이계수를 구할 수도 있도록 하였다.

3. 檢證 例題

3.1 Alignment Chart 檢證例

Stability 方程式의 解를 Alignment Chart와 比較檢證한 結果의 一部를 圖 2에서 보여주고 있다. 計算結果가 Chart와 잘 일치하여 해가 正確함을 確認할수 있었다.

표 2. 계산된 기둥의 유효길이계수 (K) : ($G_A=0.10$, $G_B=0.10 - 90.0$)

G_B	Braced	Unbraced	G_B	Braced	Unbraced	G_B	Braced	Unbraced	G_B	Braced	Unbraced	G_B	Braced	Unbraced
.10	.55	1.03	.60	.63	1.11	1.20	.66	1.20	5.00	.71	1.52	30.00	.73	1.89
.20	.57	1.05	.70	.63	1.13	1.40	.67	1.23	10.00	.72	1.70	40.00	.73	1.92
.30	.59	1.07	.80	.64	1.14	1.60	.68	1.25	15.00	.72	1.78	50.00	.73	1.94
.40	.60	1.08	.90	.65	1.16	1.80	.68	1.27	20.00	.73	1.83	70.00	.73	1.97
.50	.62	1.10	1.00	.65	1.17	2.00	.68	1.30	25.00	.73	1.87	90.00	.73	1.98

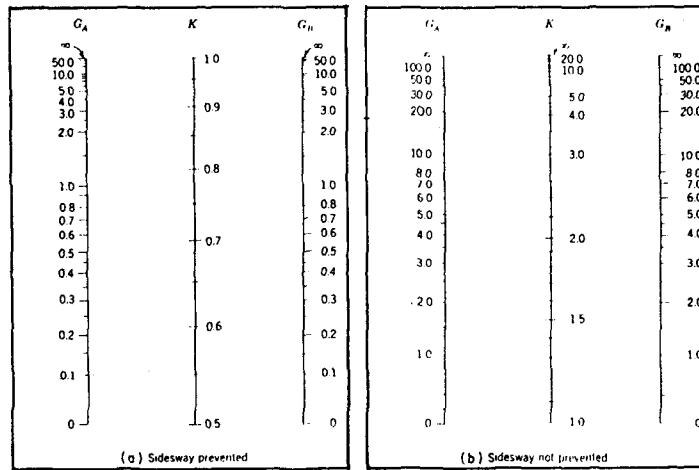


그림 2. 유효길이 계수 Alignment Chart(1)

3.2 2次元 骨造 檢證例

2次元 骨造모델에 대한 有效 길이계수 計算의 檢證은 參考文獻 (5)에 나오는 EX. 7-1의 計算結果와 比較하였다. 예제 모델은 그림 3과 같고 계산 결과는 표 3에서 보여주듯이 強軸에 대한 결과는

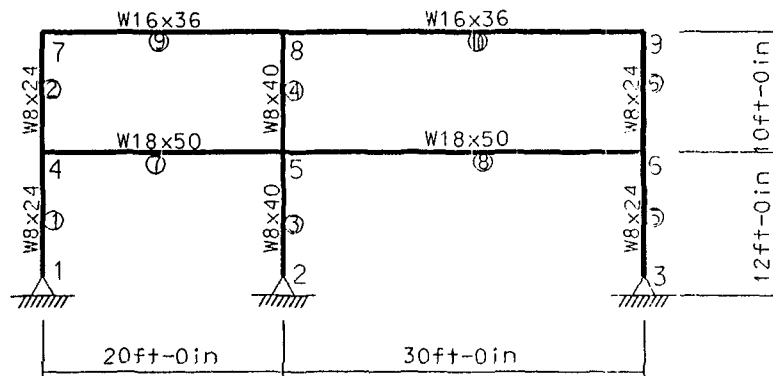


그림 3. McCormac의 예제모델 (5)

참고문헌 (5)와 그대로 一致하였으며 弱軸에 대한 계산도 약축方向의 境界條件을 勘案하여 올바르게 계산되었다. 그밖에 비직교 골조와 경계조건을 달리한 경우등의 예는 참고문헌 (4)를 참조하기 바라며, 이러한 경우에도 유효길이 계수가 적절히 계산되었음을 알 수 있었다.

표 3. McCormac예제의 K값 計算 比較表

Column (要素)	Axis (軸)	기둥端에 서의 K값		K 값		Column (要素)	Axis (軸)	기둥端에 서의 K값		K 값	
		G _A	G _B	例題의 圖表利用	FEM의 計算結果			G _A	G _B	例題의 圖表利用	FEM의 計算結果
A B	STRG	10.0	0.38	1.72	1.76	B C	STRG	0.38	0.37	1.12	1.12
(1)	WEAK	1.0	10.0		1.90	(2)	WEAK	10.0	10.0		3.01
D E	STRG	10.0	0.27	1.70	1.74	E F	STRG	0.27	0.31	1.09	1.10
(3)	WEAK	1.0	10.0		1.90	(4)	WEAK	10.0	10.0		3.01
G H	STRG	10.0	0.26	1.70	1.73	H I	STRG	0.26	0.33	1.10	1.10
(5)	WEAK	1.0	10.0		1.90	(6)	WEAK	10.0	10.0		3.01

3.3 3次元 骨造 檢證例

3차원 골조모델에 대한 유효길이 계수를 검증하기 위해 3.2항의 모델을 3차원으로 擴張한 모델을 考慮하였다. 계산결과 X-Z 平面에 平行인 骨造에 대한 강축의 K값들은 3.2항 계산결과와 그대로 一致하였고, 弱軸에 대해서는 Y방향 보의 影響을 제대로 反映하여 計算하고 있음을 알수있었다. 또한 Y-Z 平면의 골조에 대한 強軸의 K값들은 X-Z평면에 平行인 骨造에 비해 豫想대로 적게 計算되어 (기둥이 弱軸으로 놓였으므로) 合理的으로 計算되고 있음을 確認할수 있었다.⁽⁴⁾

4. 結 論

有限要素解析을 利用한 기둥設計時 許容壓縮 應力計算에 필수적인 有效挫掘 길이係數를 자동적으로 계산하는 프로그램을 개발하였다. 要素網 데이터를 利用하여 기둥과 보의 剛性計算에 필요한 자료를 抽出하고 座標變換을 거쳐 Braced/Unbraced Frame에 對한 Stability方程式을 擘後 直交/非直交 기둥요소 强軸/弱軸에 대한 유효좌굴길이를 自動으로 算定할수 있게 하였으며, 중간주나 단주에 대해서는 기둥의 비탄성 거동에 따라 유효길이계수를 보정(Yura-Disque Procedure)하여 계산할 수도 있도록 하였다. 여러가지 檢證例를 통해 計算結果가 正確함을 確認하였으며 本 研究에서 開發된 프로그램을 利用할 경우 構造設計自動化에 一翼을 擔當할수 있을 것으로 豫想되어 生産性を 向上시킬 것으로 豫想된다.

5. 감사의 글

이 논문은 제철 엔지니어링 (주)의 연구비 지원으로 이루어졌다. 저자들은 이 지원에 깊은 감사의 뜻을 표한다.

參考 文獻

1. AISC Manual of Steel Construction, ASD, Chicago, Illinois: 9th Ed., AISC, 1989.
2. Wilson and Habibulah, SAP90-Structural Analysis Program, Computer and Structure, Sanfransisco, California, 1991.
3. Salmon, C.G. and Johnson, J.E., Steel Structures, Design and Behavior, 2nd Ed., Harper & Row, 1990.
4. 이성우, 유한요소 프로그램의 기둥요소 유효길이 계수산정 소프트웨어 개발에 관한 연구보고서, 국민대학교 연구보고서, 제철엔지니어링(주), 1992.
5. McCormac, J.C., Structural Steel Design, 4th Ed., Harper & Row, 1992.
6. 도로교 표준시방서, 건설부, 1992. 12.
7. 콘크리트 표준시방서, 건설부, 1988. 12.
8. Sol E. Cooper and Andrew C. Chen, Designing Steel Structures Methods and Cases, Prentice-Hall, 1985.
9. Joseph A. Yura, "The Effective Length of Columns in Unbraced Frames," Engineering Journal AISC, 8, 2 (1971), 37-42.
10. Robert O. Disque, "Inelastic K-factor for Column Design," Engineering Journal, AISC, 10, 2 (1973), 33-35.