

Mixed 형태의 정식화에 기초한 회전자유도를 가진 변이 평면요소 Transition membrane elements with drilling freedom based on mixed-type formulation

최창근*, 이완훈**
C-K, Choi, W-H Lee

ABSTRACT

The transition membrane elements with drilling freedom have been developed. The functionals for the linear problem, in which the drilling rotations are introduced as independent variables, have been presented by Hughes & Bressi. And 4-node membrane elements with drilling degrees of freedom were developed by Ibrahimbegovic. The transition elements can be efficiently used in modelling the in-plane structures, in particular, where the stress concentration exists. A modified Gaussian quadrature adopted to evaluate the stiffness matrices of these transition elements which have slope discontinuity of displacement within the elements. Detailed numerical studies show the excellent performance of the transition elements.

1. 서론

수치해석에서 오차를 발생시키는 요인이되는 응력집중현상은 구조물의 기하학적 형상이 갑자기 변하거나 집중하중이 가해지는 부위에 발생하게 된다. 따라서, 유한요소를 이용한 수치해석에서는 응력경사가 완만한 부분에는 상대적으로 조립한 요소를 이용하고 응력경사가 급격히 변하는 부분에는 상대적으로 세립한 요소를 이용하여 구조물을 모델링하게 된다. 사각형 유한요소를 사용하여 부분적으로 체눈을 세분화하는 기법에는 다음의 대표적인 몇가지 방법이 가능하다.

Bathe[1]와 Hughes[2]는 사각형 요소를 이용하여 세분화된 요소와 세분화 되지 않은 이질체 눈 사이를 연결함으로써 국부체눈을 세분화 하였다. 이 경우는 한가지 형태의 사각형요소를 사용함으로써 불규칙절점(irregular node)이 발생하므로 적합성을 만족시키기 위해 변위제한조건을 가해야 한다. 이 제한 조건의 부여는 힘-변위 방정식에서 미지수 간에 1차 종속관계를 초래한다.

Zienkiewicz et al.[3]은 이질체눈의 연결을 위해 사각형요소를 사용하였으나 불규칙 절점의 발생없이 교묘한 모델링에 의한 체눈변이를 하였다. 일반적으로 등매개변수요소(isoparametric element)는 비틀림없이 정사각형에 가까운 상태일수록 정확한 결과를 얻을 수 있으므로 체눈변이를 위한 이와같은 모델링은 바람직하지 않다.

사각형요소의 체눈변이를 위해 삼각형요소를 사용하는 경우와 같이, 체눈변이를 위해 이질요소를 사용하는 것도 한 방법[4]이다. 이 방법은 실무에서 많이 사용되어 왔으나 일반적으로 삼각형 요소는 사각형요소에 비해 정확도가 떨어지므로 전체구조물의 해석결과를 떨어뜨릴 가능성이 있다.

Choi 와 Park[5]은 이질체눈층을 연결하기 위해 변이요소를 이용하였다. 이 경우에는 적절한 변이요소의 개발에 어려움이 따르겠지만 잘 개발된 변이요소를 이용 한다면, 변위제한조건의 부여, 비틀린 요소로 인한 나쁜 결과 및 정확도가 떨어지는 삼각형요소의 사용 등으로 인한 문제점들을 해결할 수 있다.

회전자유도에 대한 필요성은 실무에서 많이 접하게 된다. 여기서, 회전자유도란 요소의 평면에 수직인 축에 대한 평면 회전자유도를 의미한다. 이러한 종류의 요소를 개발하고자하는 Allman[6] 이나 Bergan과 Fellipa[7]등의 초기의 노력은 큰 성과는 거두지 못하였지만 그 가능성을 제시하였다. 이 결과, 회전자유도에 대한 새로운 관심은 일련의 발표된 논문[8,9,10,11,12]들에서 찾아볼 수 있다.

회전자유도를 가진 평면요소를 개발하는 동기는 다음과 같이 요약할 수 있다.

- 1) 요소의 변에 절점을 부여하지 않으면서 요소의 거동을 개선한다. 요소의 변에 절점이 존재하는 경우, 체눈의 형성이나 자동 발생시 구석절점만 있는 요소보다 더 많은 노력이 요구된다.
- 2) 셸이나 접혀진(folded) 평판의 연결부분 처리나 평판, 셸 혹은 빔요소와의 접합부분 모델링이 쉽다.
- 3) 편평한 형상의 셸 구조물의 수직축방향 회전 문제를 절점당 6개의 자유도를 가진 요소를 이용하여 쉽게 해결할 수 있다.

* 한국과학기술원 토목공학과 교수
** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

회전변위와 직선변위의 상관관계를 고려하여 순수한 회전강성을 산정하기 위한 지금까지의 많은 노력은 접근방법에 따라 크게 다음의 세가지로 분류할 수 있다 : (1) 독립 자유도인 구석절점의 회전 자유도를 포함하는 변위장을 구성하는 방법[6-23]. (2) 독립변수인 회전 자유도를 가진 범함수를 구성하는 방법[15,16,17,18,19]. (3) 고차이론을 이용하는 방법[20].

Ressiner[16]는 변위경사의 skew-symmetric 부분과 독립회전 변위에 대한 동일성을 부여하기 위하여 Lagrange multiplier로 응력텐서의 skew-symmetric 부분을 이용하는 변분원리에 의한 정식화 (variational formulation)를 처음으로 제시하였다. de Veubeke[17]에 의해서도 이와 유사한 정식화가 제시된 바 있다. Hughes 와 Brezzi[21]는 Reissner의 정식화를 그대로 분할 근사법에 적용할 경우 불안정성(instability)을 가지게 되는 약점을 보완하여 분할 근사법에 적용할 경우에도 안정성을 가지도록 하는 수정된 식을 제안하였다. 이들은 직선과 회전변위를 각각 분리된 운동변수(seperate kinematics variables)로 처리하여, 독립회전변위장을 수용할 수 있는 정식화를 제안하였다. Ibrahimbegovic et al.[22,23]은 Hughes와 Brezzi[21]의 정식화에 Allman이 제시한 형태의 변위장을 적용하여 4 절점 평면요소를 개발한 바가 있다. 본 연구에서는 Hughes 와 Brezzi의 정식화에 Allman 형태의 변위장을 확대 적용하여 변이영역에서 이질 체층 사이의 연결에 이용할 수 있는 변절점요소를 개발하였다. 사용된 mixed 형태의 정식화에서 응력텐서의 Skew-symmetric 부분은 요소 전체에 걸쳐서 균일한 것으로 가정한다. 개발된 변이 평면요소는 사각형 변이 평면요소와 쉽게 결합되어 변절점 평면(flat) 셀 요소를 구성할 수 있다. 이렇게 구성된 셀요소는 절점당 6개의 자유도를 가지며, 회전 자유도를 가지는 여타 요소와 손쉽게 연결 될 수 있을 뿐만아니라 복잡한 셀구조물을 쉽게 모델링 할 수 있다.

2. 변분법에 의한 정식화

이 장에서 논의될 사항은 Hughes와 Brezzi[21] 그리고 Ibrahimbegovic et al.[22] 등의 연구와 밀접한 관련을 가진다. 간략함을 위하여, homogeneous한 경계조건을 가지는 등가정적 Dirichlet 경계치 문제에 국한하며, 또한 선형탄성 문제로 제한한다.

대상 공간 Ω 에서, $x \in \Omega$ 인 영역내에서 고려되는 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{div } \sigma + \mathbf{f} = 0; \text{ skew } \sigma = 0; \psi = \text{skew } \nabla \mathbf{u}; \text{symm } \sigma = \mathbf{C} \cdot \text{symm } \nabla \mathbf{u} \quad (1)$$

여기서, 식 (1)의 항들은 각각 평형방정식, 응력 σ 의 symmetric 조건, 변위경사로 $\nabla \mathbf{u}$ 표현되는 회전 ψ 의 정의 및 구성방정식을 의미한다.

2계 텐서의 Euclidian 조합(decompositions)은 다음과 같다.

$$\sigma = \text{symm } \sigma + \text{skew } \sigma, \quad (2)$$

여기서

$$\text{symm } \sigma = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^T); \text{skew } \sigma = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma^T). \quad (3)$$

Ressiner[16]는 식(1)의 경계치 문제를 위한 변분원리에 의한 정식화를 제시하였다. 제시된 정식화는 그대로 수치적 적용에는 적절하지 않았다. Hughes와 Brezzi[21]는 Reissner의 이론을 분할근사법에 적용할 경우 안정성(stability)를 보장하기 위해서 $\frac{1}{2}\gamma^{-1} \int_{\Omega} |\text{skew } \tau|^2 d\Omega$ 의 항을 공제하였다. 수정된 정식화는 Euler-Lagrange 방정식에 의해 경계치 조건식(1)을 만족한다. 구성방정식 (1)₄를 이용하여 응력의 symmetrical 요소를 제거하면 Hughes와 Brezzi[21]의 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma}(\mathbf{v}, \omega, \text{skew } \tau) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{symm } \nabla \mathbf{v}) \cdot (\text{symm } \nabla \mathbf{v}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \text{skew } \tau^T \cdot (\text{skew } \nabla \mathbf{v} - \omega) d\Omega \\ & - \frac{1}{2}\gamma^{-1} \int_{\Omega} |\text{skew } \tau|^2 d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\omega \in \mathbf{W}$, $\tau \in \mathbf{T}$ 는 각각 직선변위, 회전변위 그리고 응력의 공간을 의미한다. 이 변분원리에 의한 정식화에서 회전변위 ω 와 응력 τ 은 직선변위의 기울기(displacement gradient)와 함께 적분영역 Ω 에 걸쳐 제공하여 적분가능한 공간에 속해야만 한다.

식 (4)의 변분원리에 의한 정식화로부터 변분 방정식(variational equation)을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
0 &= D\Pi_\gamma(\mathbf{u}, \psi, \text{skew } \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \text{skew } \boldsymbol{\tau}) \\
&= \int_{\Omega} (\text{symm } \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\text{symm } \nabla \mathbf{u}) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} \text{skew } \boldsymbol{\tau}^T \cdot (\text{skew } \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}) d\Omega + \int_{\Omega} (\text{skew } \nabla \mathbf{v}^T - \boldsymbol{\omega}^T) \cdot \text{skew } \boldsymbol{\sigma} d\Omega \\
&\quad - \gamma^{-1} \int_{\Omega} \text{skew } \boldsymbol{\tau}^T \cdot \text{skew } \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega.
\end{aligned} \tag{5}$$

변분방정식 (5)는 mixed 형태의 분할근사를 위한 정식화에 이용된다.

식(4)와 (5)의 매개변수 γ 는 문제에 따라 좌우되는 변수이며, 등방성재료의 탄성영역에서 Dirichlet 경계치 문제에서 γ 는 전단계수와 동일한 값을 가진다. 그러나, γ 값은 결과에 큰 영향을 주지 않는다.

응력의 skew-symmetric 값은 임의의 한 요소 내에서는 상수로 가정한다.

$$\text{skew } \boldsymbol{\tau} = \sum_e \boldsymbol{\tau}_0^e \tag{6}$$

변위 변형률의 symmetric 항은 다음과 같이 표현된다.

$$\text{symm } \nabla \mathbf{u} = \mathbf{B}'_I \mathbf{u}_I + \mathbf{G}'_I \psi_I \tag{7}$$

또는

$$\text{symm } \nabla \mathbf{u} = \mathbf{B}'_I \mathbf{u}_I + \mathbf{G}'_I \psi_I + \mathbf{R}'_I \Delta \mathbf{u}_{II} \tag{8}$$

여기서 \mathbf{u}_I, ψ_I 그리고 $\Delta \mathbf{u}_{II}$ 는 직선 변위장, 회전변위장과 요소변의 접선방향의 거동에 추가되는 비적합 변위를 나타내는 매개변수를 의미한다.

요소의 조각시험에 있어 수렴성을 보장하기 위해서는 회전자유도와 관련된 변위모드가 일정 변형률장(constant strain field)에 미치는 영향이 제거하기 위하여 제거되어야 한다. 이를 위하여 B-bar 방법[24]으로 알려져 있는 수정 방법에 따라 변위 변형률행렬은 다음과 같이 수정된다.

$$\bar{\mathbf{G}}^e = \mathbf{G}^e - \frac{1}{\Omega^e} \int \mathbf{G}^e d\Omega \tag{9}$$

$$\bar{\mathbf{R}}^e = \mathbf{R}^e - \frac{1}{\Omega^e} \int \mathbf{R}^e d\Omega \tag{10}$$

변위 변형률의 skew-symmetric 항은 다음과 같이 표현된다.

$$\text{skew } \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi} = \mathbf{b}'_I \mathbf{u}_I + \mathbf{g}'_I \psi_I \tag{11}$$

또는

$$\text{skew } \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi} = \mathbf{b}'_I \mathbf{u}_I + \mathbf{g}'_I \psi_I + \mathbf{r}'_I \Delta \mathbf{u}_{II} \tag{12}$$

분할근사를 위한 식 (5)의 첫번째 항은 다음과 같이 표기할 수 있는 요소의 강성행렬을 의미한다.

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}'^e \bar{\mathbf{G}}^e]^T \mathbf{C} [\mathbf{B}'^e \bar{\mathbf{G}}^e] d\Omega \tag{13}$$

또는

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}'^e \bar{\mathbf{G}}^e \bar{\mathbf{R}}^e]^T \mathbf{C} [\mathbf{B}'^e \bar{\mathbf{G}}^e \bar{\mathbf{R}}^e] d\Omega \tag{14}$$

식(5)의 두번째 항은 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\mathbf{h}^e = \int_{\Omega^e} \langle \mathbf{b}^e; \mathbf{g}^e \rangle^T d\Omega \tag{15}$$

또는

$$\mathbf{h}^e = \int_{\Omega^e} \langle \mathbf{b}^e; \mathbf{g}^e; \mathbf{r}^e \rangle^T d\Omega \tag{16}$$

앞에서 나타낸 표기 방법을 이용하여, 분할근사를 위한 mixed 형태의 정식화는 행렬의 형태로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & \mathbf{h}^e \\ \mathbf{h}^{eT} & -\gamma^{-1}\Omega^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \tau_0^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \Psi \\ \Delta\mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

응력의 skew-symmetric 부분은 각요소에서 독립적으로 보간되기 때문에 식 (17)에서 이에 해당하는 부분은 요소의 차원에서 제거되면 요소의 강성행렬은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{K}}^e \mathbf{a} = \mathbf{f}; \quad \hat{\mathbf{K}}^e = \mathbf{K}^e + \frac{\gamma}{\Omega^e} \mathbf{h}^e \mathbf{h}^{eT} \quad (18)$$

식(18)의 강성행렬은 요소의 차원에서 비적합 매개변수 $\Delta\mathbf{u}$ 를 소거하기 위하여 정적응축(static condensation)을 행한다.

식(17)의 요소의 강성행렬 \mathbf{K}^e 과 \mathbf{h}^e 를 수치적분을 통하여 산정하기 위하여 사용된 변위장은 다음장에서 논의할 Allman 형태의 변위장을 이용하였으며, 틀 이용하며 3×3 가우스 적분을 행하였다.

3. 형상함수

본 연구에서 개발하고자 하는 사각형 변이요소는 그림 1에서 살펴볼 수 있듯이 요소의 변에 변절점을 가진다.

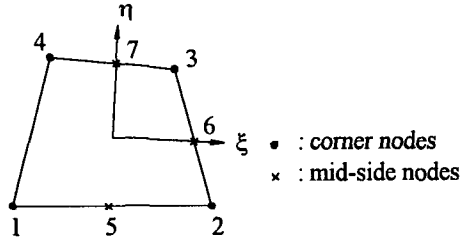


Fig. 1 Configuration of transition element

회전자유도를 가진 변이요소의 기본적인 거동을 규정하는 형상함수는 Allman 형태의 형상함수를 선정하였다. 평면요소의 직선변위의 형상을 규정하는 Allman 형태의 형상함수는 회전변위에 해당하는 매개변수를 포함하고 있다. 제시된 형상함수는 Type1과 Type2이다. 두가지 형상함수에서 Type2는 식 (19)의 두번째항으로 나타나 있는 요소변의 접선방향으로의 비적합모드가 추가된다.

1) Type 1

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) \mathbf{u}_I + N_0 \Delta\mathbf{u}_0 + \sum_{I=1}^4 \frac{1}{8} (l_{KI} NIS_I \mathbf{n}_{KI} - l_{IJ} NFS_I \mathbf{n}_{IJ}) \Psi_I + \sum_{I=5}^n \frac{1}{8} l_{OP}^I NS_I \mathbf{n}_{OP} \Psi_I \quad (18)$$

2) Type 2

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) \mathbf{u}_I + \sum_{I=1}^n NIS_I \Delta\mathbf{u}_{II} \mathbf{t}_{KI} + N_0 \Delta\mathbf{u}_0 + \sum_{I=1}^4 \frac{1}{8} (l_{KI} NIS_I \mathbf{n}_{KI} - l_{IJ} NFS_I \mathbf{n}_{IJ}) \Psi_I + \sum_{I=5}^n \frac{1}{8} l_{OP}^I NS_I \mathbf{n}_{OP} \Psi_I \quad (19)$$

여기서 l_{IJ} 와 \mathbf{n}_{IJ} 은 절점 I와 J 사이에 위치하는 요소변의 길이와 요소 외부방향의 수직 단위벡터이며 다음식(20)과 같이 계산된다.

$$\mathbf{n}_{IJ} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_{IJ} \\ \sin \alpha_{IJ} \end{Bmatrix}, \mathbf{t}_{IJ} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha_{IJ} \\ \cos \alpha_{IJ} \end{Bmatrix}, l_{IJ} = ((x_{J1} - x_{I1})^2 + (x_{J2} - x_{I2})^2)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

그리고 식 (18),(19),(20)에서 사용된 첨자는 포트란 언어의 표현방식을 이용하면 식 (21)과 같다.

$$J = \text{mod}(I, 4) + 1; K = I - 1 + 4 \times \text{aint}(I/I); O = I - 4; P = I - 3; 0 \leq n \leq 7 \quad (21)$$

식(18)와 (19)에서 형상함수 N_I 는 요소의 불연속성을 고려하여 식 (22),(23) 과같이 정의된다.

$$N_I = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta) - \frac{1}{2}(N_J + N_K), \quad (22)$$

$$N_K = \frac{1}{2}(1 + \xi_K |\xi_K \xi - |\eta_K ||\xi|)(1 + |\eta_K | \eta_K \eta - |\xi_K ||\eta|), \quad (23)$$

$$I = 1, 2, 3, 4; \quad J = \text{aint}(I/I) * 4 + I + 3; \quad K = I + 4 \quad (24)$$

만일 요소의 변에 절점이 존재하지 않을 경우, 존재하지 않는 절점에 대한 형상함수는 영의 값을 가진다($N_5 = 0$ 또는 $N_6 = 0$ 또는 $N_7 = 0$). 그리고 식 (22)와 (23)에서의 첨자는 포트란 언어의 표현방식을 사용할 경우 식 (24)와 같이 표현된다. 식 (18)과 (19)에 나타난 serendipity 형상함수는 다음과 같이 정의한다.

1) 4 - 절점 요소

$$NIS_I = NFS_I = \frac{1}{2}(1 + \xi_I \xi)(1 - \eta^2); \quad I = 1, 3$$

$$NIS_I = NFS_I = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta_I \eta); \quad I = 2, 4 \quad (25)$$

$$NS_5 = NS_6 = NS_7 = 0$$

2) 5 - 절점 요소 : 4 - 절점 요소의 경우에서 NFS_1, NLS_2 그리고 NS_5 의 형상함수가 대체된다.

$$NFS_1 = \frac{1}{2}(|\xi| - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$NLS_2 = \frac{1}{2}(|\xi| + \xi)(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (26)$$

$$NS_5 = -\xi(1 - |\xi|)(1 - \eta)$$

3) 6 - 절점 요소 : 5 - 절점 요소 경우에서 NFS_2, NLS_3 그리고 NS_6 의 형상함수가 대체된다.

$$NFS_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(|\eta| - \eta)(1 + \eta)$$

$$NLS_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(|\eta| + \eta)(1 - \eta) \quad (27)$$

$$NS_6 = -(1 + \xi)\eta(1 - |\eta|)$$

4) 7 - 절점 요소 : 6 - 절점 요소 경우에서 NFS_3, NLS_4 그리고 NS_7 의 형상함수가 대체된다.

$$NFS_3 = \frac{1}{2}(|\xi| + \xi)(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$NLS_4 = \frac{1}{2}(|\xi| - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (28)$$

$$NS_7 = \xi(1 - |\xi|)(1 + \eta)$$

식(18)과 (19)에 추가된 hierarchical bubble 방정식은 다음과 같다.

$$N_0 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (29)$$

요소의 강성행렬에서 bubble 모드의 추가로 증가된 항들은 요소의 차원에서 정적응축을 통해 소거된다.

4. 요소행렬의 수치적분

등매개변수요소에 의한 요소 강성행렬은 자연좌표계 상으로 사상된 요소 영역($-1 \leq \xi, \eta \leq +1$)에서 가우스 적분법에 의해 계산되지만, 변이요소는 변절점이 존재하는 점을 중심으로 변위장의 미분치가

불연속을 이루므로 특이적분(singular integral)이 된다. 따라서 수치적분은 연속인 부영역별로 수행해야 한다. 수정된 가우스 수치적분을 위한 자연좌표계 상의 적분점 및 가중치는 표 1과 같다.

표 1. 수정된 가우스 적분점 및 가중치.

Point	ξ_i, η_i	Weight
1	-0.887298335	0.277777778
2	-0.500000000	0.444444444
3	-0.112701665	0.277777778
4	+0.112701665	0.277777778
5	+0.500000000	0.444444444
6	+0.887298335	0.277777778

4. 예제해석

개발된 평면 변이요소들의 타당성을 검증하기 위해 몇가지 기본적인 예제를 해석하였다. 고유치해석의 결과 변이요소는 Spurious zero-energy mode가 발생하지 않았다.

4.1 조각시험(Patch test)

개발된 변이요소들이 일정변형률상태(constant strain state)를 표현할 수 있는가를 검증하기 위해 조각시험을 수행하였다. 조각시험은 그림 2와 같이 요소를 배치하여 수행하였다. 해석을 수행한 결과 모든 변이요소는 순수변형률상태에 대해 조각시험을 통과하였다.

경계조건 ; $u = 10^{-3}(x + y/2), \quad v = 10^{-3}(y + x/2)$

이론해 ; $\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma = 10^{-3}; \sigma_x = \sigma_y = 1333; \tau_{xy} = 400$

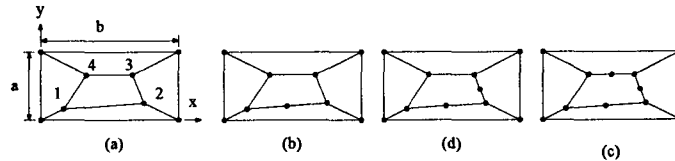


그림 2. 조각시험 모델. a=0.12; b=0.24; E=1.0 × 10⁶; ν=0.25; Location of inner nodes:

	x	y
1	0.04	0.02
2	0.18	0.03
3	0.16	0.08
4	0.08	0.08

4.2 단순보 테스트

순수휨 상태에서의 요소의 거동을 살펴보기 위하여 길이/높이의 비율이 10인 단순보를 해석하였다. 모델은 6개의 평면요소로 모델링하며, 최소한의 구속조건을 가진다. 재료의 성질은 탄성계수 E=100 그리고 포아슨비 ν=0 이다. 표 2에 나타난 해석결과를 살펴보면 개발한 평면요소 Type 1과 Type 2는 Ibrahimbegovic[23]과 Iura[26]에 의해 개발된 회전자유도를 가진 4절점 요소와 함께 빔 이론에 의해 계산되는 최대 수직변위 1.5 와 단부 최대 회전변위 0.6의 값과 일치된 결과를 보인다.

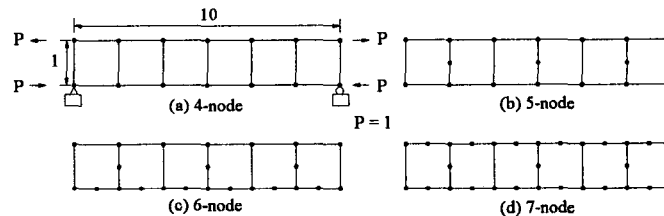


그림 3 단순 빔 모델

표 2. 단순빔의 해석결과 (빔 중앙의 최대 수직변위 및 단부의 최대회전변위)

Node num.	Exact	Ibrahimbegovic [23]	Iura [26]	Type1				Type2			
				4	5	6	7	4	5	6	7
Vert. displ	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
End. rot.	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6

4.3 캔틸레버 빔 테스트

전단하중이 가해지는 그림 4의 캔틸레버 빔 모델은 요소거동의 타당성을 확인하는 대표적인 모델이다. 모델의 탄성해석의 이론적인 해[27]는 0.3553이다. 단부의 구속조건은 직선변위만을 구속하였다. 회전자유도를 가진 Ibrahimbegovic[23] 과 Iura[26]의 평면요소와 비교하면 Type 2가 가장 좋은 결과를 보인다. 변이요소의 절점수에 따른 결과를 살펴보면 6절점요소의 경우 Type 1과 Type 2에서 4×1으로 체눈을 형성하였을 때 5절점의 경우보다 다소 나쁜 결과를 보인다. 이는 변이요소를 이용하여 모델링할 경우, 5절점 및 7절점과는 달리 6절점으로 해석한 경우에는 그림 4(c)에서 살펴볼 수 있듯이 모델의 중심에 대하여 상부와 하부에 변절점이 대칭으로 존재하지 않기 때문이다. 즉, 변절점의 위치에 따라서 해석결과에 다소 차이가 나타낼 수 있음을 의미한다.

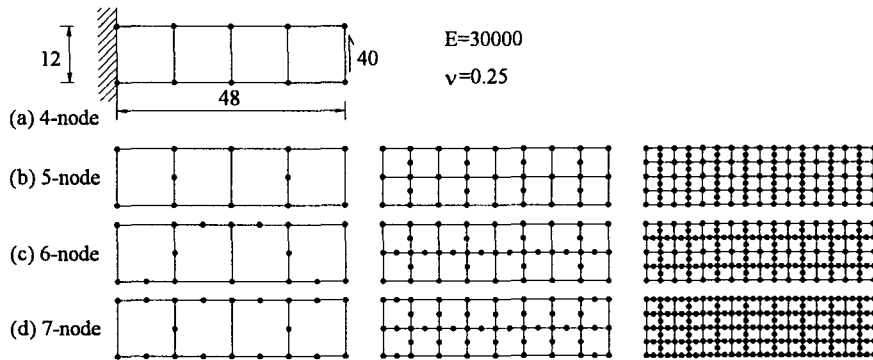


그림 4. 캔틸레버 빔 모델

표 3. 캔틸레버 빔 단부중심의 수직처짐

Mesh	Ibrahimbegovic [23]	Iura [26]	Type1				Type2			
			4	5	6	7	4	5	6	7
4×1	0.3445	0.3494	0.3415	0.3453	0.3428	0.3502	0.3493	0.3507	0.3462	0.3547
8×2	0.3504	0.3515	0.3495	0.3519	0.3533	0.3534	0.3516	0.3536	0.3548	0.3549
16×4	0.3543	0.3543	0.3538	0.3548	0.3548	0.3550	0.3543	0.3550	0.3552	0.3554

5. 결론

본 연구에서는 변위경사의 skew-symmetric 부분과 독립회전 변위에 대한 동일성을 부여하기 위하여 Lagrange multiplier로 응력텐서의 skew-symmetric 부분을 이용하는 mixed 형태의 변분원리에 의한 정식화에 기초한 회전 자유도를 가지는 평면요소를 개발하였다. 사용된 변위장은 Allman 형태의 변위장이며, 요소변의 접선방향에 대한 비적합모드의 추가 여부에 따라 Type 1과 Type 2로 요소의 명칭을 부여하였다. 또한 변분원리에 의한 정식화를 전개함에 있어서 추가된 모드 항의 여부에 따라 구분하였다. 개발된 Type 1과 Type 2의 변이요소는 요소의 거동특성을 검증하기 위한 몇가지 기본적인 예제해석을 통하여 요소의 타당성이 입증되었으며, Type 2 요소가 Type 1에 비하여 좋은 거동을 보였다. 개발된 변이 평면요소는 변이 평판요소와 결합되어 절점당 6개의 자유도를 가지는 평판 셸 요소를 구성할 수 있으며, 빔 요소 등의 여타 요소와 쉽게 연결될 수 있고 접혀진 평판 (folded plate)나 이와 유사한 구조물의 모델링에 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
2. Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method - Linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
3. Zhu, J.Z., Zienkiewicz, O.C. and Wu, J., 'A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation', *int. j. numer. methods eng.*, 32, 849-866, 1991.
4. Evans, A., Marchant, M.J., Szmelter, J. and Weatherill, N.P., 'Adaptivity for compressible flow computations using point embedding on 2-D structured multiblock meshes', *int. j. numer. methods eng.*, 32, 895-919, 1991.
5. Choi, C.K. and Park, Y.M., 'Transition plate bending elements for compatible mesh gradation', *J. Eng. Mech. ASCE*, 118, No. 2, 1992.
6. Allman, D.J., 'A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity problems', *Comp. Struct.*, 19, 1-8, 1984.
7. Bergan, P.G. and Fellipa, C.A., 'A trinagular membrane element with rotational degrees of freedom', *Comp. Methods Appl. Mech.*, 50, 25-60, 1985.
8. Allman, D.J., 'A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity problems', *Int. j. numer. methods eng.*, 26, 717-739, 1988.
9. Cook, R.D., 'On the Allman triangle and a related quadrilateral element', *Comput. Struct.*, 22, 1065-1067, 1986.
10. Cook, R.D., 'A plane hybrid element with rotational D.O.F. and adjustable stiffness', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24, 1499-1508, 1987.
11. Lee, S.C. and Yoo, C.H., 'A novel shell element including in-plane torque effect', *Comput. Struct.*, 28, 505-522, 1988.
12. MacNeal, R.H. and Harder, R.L., 'A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom', *Comput. Struct.*, 28, 75-84, 1988.
13. Yunus, S.M., 'A study of different hybrid elements with and without rotational D.O.F. for plane stress/plane strain problem', *Comput. Struct.*, 30, 1127-1133, 1988.
14. Yunus, S.M., Saigal, S. and Cook, R.D., 'On improved hybrid finite elements with rotational degrees of freedom', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 28, 785-800, 1989.
15. Naghdi, P.M., 'On a variational theorem in elasticity and its application to shell theory', *J. Appl. Mech.*, 31, 647-653, 1964.
16. Reissner, E., 'A note on variational principles in elasticity', *Int. J. Solids Struct.*, 1, 93-95, 1965.
17. de Veubeke, F.B., 'A new variational principle for finite elastic displacements', *Int. J. Eng. Sci.*, 10, 745-763, 1972.
18. Amara, M. and Thomas, J.M., 'Equilibrium finite element for the linear elastic problem', *Numer. Math.*, 33, 367-383, 1979.
19. Atluri, S.N., 'On some new general and complementary energy principles for the rate problems of finite strain, classical elastoplasticity', *J. Struct. Mech.*, 8, 61-92, 1980.
20. Aminpour, M.A., 'An assumed-stress Hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom.', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33, 19-38, 1992.
21. Hughes, T.J.R. and Brezzi, F., 'On drilling degrees of freedom', *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 72, 105-121, 1989.
22. Ibrahimbegovic, A., Taylor, R.L. and Wilson, E.L., 'A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 30, 445-457, 1990.
23. Ibrahimbegovic, 'A novel membrane finite element with an enhanced displacement interpolation', *Finite Elements in Analysis and Design*, 7, 167-179, 1990.
24. Gupta, A.K., 'A finite element for transition from a fine to a coarse grid', *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 12, 35-45, 1978.
25. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*, Vol. I, McGraw-Hill, London, 1989.
26. Iura, M. and Atluri, S.N., 'Formulation of a membrane finite element with drilling degrees of freedom', *Comput. Mech.*, 9, 417-428, 1992.
27. Timoshenko, S. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.