한국전산구조공학회
1993년도 봄학술발표회 논문집

선형화 알고리듬을 이용한 재료적 비선형 구조물의 동적해석
Dynamic analysis of structures using linearized alogrithm for material nonlinearity

심 재 수*　　　　　임선묵**
Shim, jae-Soo　　　　Lim, Seon-Mook

ABSTRACT

Nonlinear equation of motion due to material nonlinearity of structure is transformed to linear equation of motion by treating the nonlinear elastic force term as an applied force. The solution in a time step is carried out by iterative linear dynamic anaiysis.The present simple algorithm is varidated by several examples.
The results show that this algorithm is satisfactory and efficient.

1. 서 론

구조물의 동적해석법인 Mode Superposion method 는 연성(coupled) 운동방정식을 비연성(uncoupled) 운동방정식으로 변환시키는 방법이나 비선형 동적해석에는 비경제적이므로 적용되지 않는다.
비선형 운동방정식의 경제적인 해석은 주로 직접적분법에 의한다.직접적분법은 계산하는 시점에서의 미지의 속도와 가속도를 계산 시작 시점에서의 기지의 변위,속도,가속도를 이용하여 적절히 대체하여 비선형 운동방정식을 증분변위에 대한 비선형 정적 평형방정식으로 표현하고 Newton - Raphson 법이나 Modlfied Newton - Raphson 법을 적용하여 이식을 반복적으로 해석한다.
본 연구에서는 비선형 운동방정식을 선형화하여 선형운동방정식으로 변환시켜 선형 동적 해석법을 반복적으로 적용하여 비선형 동적 문제를 해석할 수있는 알고리듬을 형성 하는 것이 목적이다.

2. 알고리듬의 형성

자유도가 n 인 구조물의 관성력,감쇠력 및 내력(탄성력)벡터와 외력벡터의

관계는 다음과 같다.

$$\underset{\sim}{F_I} + \underset{\sim}{F_D} + \underset{\sim}{F_E} = \underset{\sim}{P}(t) \tag{1}$$

* 경희대학교 교수
** 경희대학원 졸, 현대중공업 근무

재료적 비선형 문제는 내력벡터($\utilde{F}_E$)가 변위에 대한 비선형 함수로 표현된다

시간 t_{i+1}에서 비선형 운동방정식을 행렬로 표시하면 다음과 같다.

$$\utilde{M}\,\ddot{\utilde{U}}_{i+1} + \utilde{C}\,\dot{\utilde{U}}_{i+1} + \utilde{F}_{Ei} + \utilde{K}_T\,\Delta\utilde{U} = \utilde{P}_{i+1} \qquad (2)$$

여기서 $\utilde{M}$, $\utilde{C}$ 및 $\utilde{K}_T$ 는 각각 질량,감쇠및 접선강성 행렬이다.

$\utilde{U}$, $\dot{\utilde{U}}$ 및 $\utilde{P}$ 는 각각 변위,속도 및 외력벡터이다.

$\Delta\utilde{U}$는 증분 변위벡터이고

초기 조건은

$$\left.\begin{aligned} \utilde{U}^{(0)}_{i+1} &= \utilde{U}^{(\infty)}_{i} \\ \dot{\utilde{U}}^{(0)}_{i+1} &= \dot{\utilde{U}}^{(\infty)}_{i} \\ \ddot{\utilde{U}}^{(0)}_{i+1} &= \ddot{\utilde{U}}^{(\infty)}_{i} \end{aligned}\right] \qquad (3)$$

여기서 $\utilde{U}^{(\infty)}_i$, $\dot{\utilde{U}}^{(\infty)}_i$ 및 $\ddot{\utilde{U}}^{(\infty)}_i$ 는 각각 시간 t_i에서의 최종변위,속도 및 가속도 벡터이다.상첨자 (0)와 (∞)는 반복회수(iterative number) 이고 하첨자 i,i+1 은 시간단계 t_i ,t_{i+1}의 약자이다.

시간 t_{i+1} 단계의 첫 계산시점에서의 운동 방정식은 다음과같다.

$$\utilde{M}\,\ddot{\utilde{U}}^{(1)}_{i+1} + \utilde{C}\,\dot{\utilde{U}}^{(1)}_{i+1} + \utilde{F}^{(\infty)}_{Ei} + \utilde{K}^{(\infty)}_{Ti}\,\Delta\utilde{U}^{(1)}_{i+1} = \utilde{P}_{i+1} \qquad (4)$$

여기서

$\ddot{U}^{(1)}_{i+1}$ 과 $\dot{\utilde{U}}^{(1)}_{i}$ 을 다음과 같이 놓으면

$$\ddot{\utilde{U}}^{(1)}_{=i+1} = \dot{\utilde{U}}^{(\infty)}_{i} + \Delta\ddot{\utilde{U}}^{(1)}_{i+1} \qquad (5)$$

$$\dot{\utilde{U}}^{(1)}_{=i+1} = \dot{\utilde{U}}^{(\infty)}_{i} + \Delta\dot{\utilde{U}}^{(1)}_{i+1} \qquad (6)$$

식 (4) 는

$$\utilde{M}\,\Delta\ddot{\utilde{U}}^{(1)}_{i+1} + \utilde{C}\,\Delta\dot{\utilde{U}}^{(1)}_{i+1} + \utilde{K}^{(\infty)}_{Ti}\,\Delta\utilde{U}^{(1)}_{i+1} = \utilde{P}_{i+1} - \utilde{F}^{(\infty)}_{Ei} \qquad (7)$$

로되고 이 식의 초기조건은 다음과 같이 변경된다.

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta \ddot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(0)} &= \ddot{\underset{\sim}{U}}{}_{i}^{(\infty)} \\
\Delta \dot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(0)} &= \dot{\underset{\sim}{U}}{}_{i}^{(\infty)} \\
\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(0)} &= \underset{\sim}{0}
\end{aligned}\right] \tag{8}
$$

식(7)의 양변에 선형항 $K\Delta U_{i+1}^{(1)}$ 을 더하고 정리하면

$$
\underset{\sim}{M}\Delta \ddot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(1)} + \underset{\sim}{C}\Delta \dot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(1)} + K\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(1)} = \underset{\sim}{P}_{i+1} - \underset{\sim}{F}{}_{Ei}^{(\infty)} + \underset{\sim}{K}\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(1)} - \underset{\sim}{K}{}_{Ti}^{(\infty)}\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(1)} \tag{9}
$$

여기서 잔차하중 벡터 $\underset{\sim}{R}{}_{i+1}^{(1)}$ 를 다음과 같이 정의하면

$$
\underset{\sim}{R}{}_{i+1}^{(1)} = \underset{\sim}{K}\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(1)} - \underset{\sim}{K}{}_{Ti}^{(\infty)}\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(1)} \tag{10}
$$

식(9)는

$$
\underset{\sim}{M}\Delta \ddot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(1)} + \underset{\sim}{C}\Delta \dot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(1)} + \underset{\sim}{K}\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(1)} = \underset{\sim}{P}_{i+1} - \underset{\sim}{F}{}_{Ei}^{(\infty)} + \underset{\sim}{R}{}_{i+1}^{(1)} \tag{11}
$$

윗식은 다음과 같은 선형 운동방정식의 형태이다.

$$
\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{W}} + \underset{\sim}{C}\dot{\underset{\sim}{W}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{R} \tag{12}
$$

하중 $\underset{\sim}{P}_{i+1}$, $\underset{\sim}{F}{}_{Ei}^{(\infty)}$ 는 기지벡터이고 잔차 $\underset{\sim}{R}{}_{i+1}^{(1)}$ 은 미지 벡터이다.

그러므로, 식(8)의 초기조건 을 갖는 다음 운동방정식을 해석하면

$$
\underset{\sim}{M}\Delta \ddot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(1)} + C\Delta \dot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(1)} + \underset{\sim}{K}\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(1)} = \underset{\sim}{P}_{i+1} - \underset{\sim}{F}{}_{i}^{(\infty)} \tag{13}
$$

첫번째 증분벡터 $\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(1)}$ 이 결정된다.

식 (10)에 의하여 잔차벡터 $\underset{\sim}{R}{}_{i+1}^{(1)}$ 를 계산하여, 잔차의 Norm 을 구하고

수렴여부를 허용오차로서 비교한다.

수렴하면 다음시간 단계로 진행하고 (i=i+1),수렴하지 않으면

다음 운동방정식을 반복계산한다.

$$
\underset{\sim}{M}\Delta \ddot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(2)} + C\Delta \dot{\underset{\sim}{U}}{}_{i+1}^{(2)} + \underset{\sim}{K}\Delta \underset{\sim}{U}{}_{i+1}^{(2)} = \underset{\sim}{R}{}_{i+1}^{(1)} \tag{14}
$$

윗식의 초기 조건은 정지 조건(At rest initial condition)이다.

윗식의 일반형태는 다음과같다.

$$\underset{\sim}{M}\Delta\ddot{\underset{\sim}{U}}_{i+1}^{(k+1)} + \underset{\sim}{C}\Delta\dot{\underset{\sim}{U}}_{i+1}^{(k+1)} + \underset{\sim}{K}\Delta\underset{\sim}{U}_{i+1}^{(k+1)} = \underset{\sim}{R}_{i+1}^{(k)} \tag{15}$$

$$\underset{\sim}{R}_{i+1}^{(K)} = \underset{\sim}{K}\Delta\underset{\sim}{U}_{i+1}^{(K)} - \underset{\sim}{K}_T^{(\infty)}\Delta\underset{\sim}{U}_{i+1}^{(K)} \tag{16}$$

잔차가 허용 범위에 들때까지 식 (15)와(16)을 반복(k=k+1) 계산하여

시간 t_{i+1} 에서의 최종 변위벡터는 다음과 같다.

$$\underset{\sim}{U}_{i+1}^{(\infty)} = \underset{\sim}{U}_{i}^{(\infty)} + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\underset{\sim}{U}_{i+1}^{(K)} \tag{17}$$

변위벡터가 결정되었으므로 속도 및 가속도벡터 $\dot{\underset{\sim}{U}}_{i+1}^{(\infty)}$ 및 $\ddot{\underset{\sim}{U}}_{i+1}^{(\infty)}$ 을

앞 시간단계 (t_i) 에서의 변위, 속도, 가속도벡터 $\underset{\sim}{U}_{i}^{(\infty)}$, $\dot{\underset{\sim}{U}}_{i}^{(\infty)}$, 및 $\ddot{\underset{\sim}{U}}_{i}^{(\infty)}$ 와 $\underset{\sim}{U}_{i+1}^{(\infty)}$ 을 이용하여 Newmark β method등을 적용하여 구한다. 시간증분 (Time increment)와 잔차반복(Residual iterative)계산과정은 그림(1)에 있다.

비선형동적문제에 직접적분법을 적용하면 시간단계 내에서 증분변위벡터를 정적해석을 통하여 반복적으로 구하나 본연구에서 제안한 방법은 시간단계 내에서 선형동적 해석을하여 증분변위를 반복적으로 구한다.

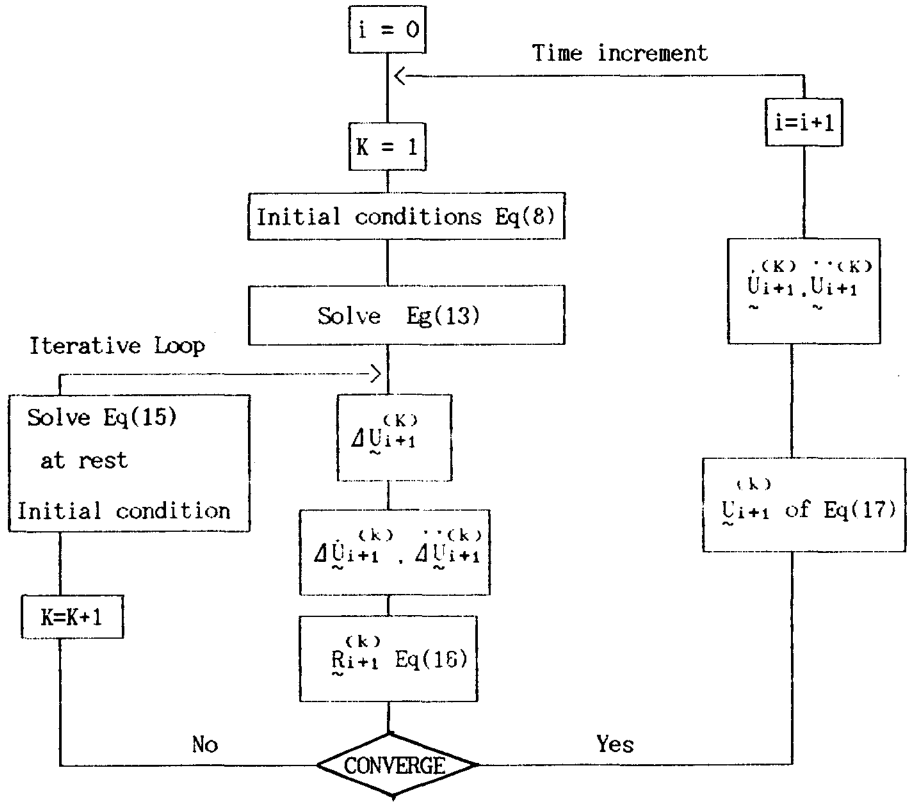
3. 예 제 해 석

첫째 예제는 단자유도 문제의 구조물(그림(2))에 그림(3)의 횡 하중이 작용하고 변위와 내력의 관계는 그림(4)에 있다. (Reference)
해석결과인 시간에 대한 변위,속도,가속도와 내력은 각각 그림 (5),(6),(7)과 (8)에 있다.
둘째 예제는 그림(9)에 보이는 구조물에 그림(10)의 하중이 작용하고,그림(11)의 내력과 변위 관계도를 이용하여 해석 하였다.결과인 변위,속도,가속도및 내력은 각각 그림 (12),(13),(14)및 (15)에 있다.
선형 운동방정식의 해석은 γ, β는 1/2,1/6인 Newmark β 방법을 적용하였으며 잔차의 허용오차를 10^{-4}로 정하였고,최대 반복회수는 5회였다.

4. 결 론

예제들의 해석결과가 만족하므로,본 연구에서 제안한 비선형 운동방정식의 선형알고리즘은 이론적으로 타당하고,개발한 콤퓨터 프로그램은 적합한 신뢰도가 있다. 따라서 본 알고리듬은 다자유도문제의 비선형 동적해석 문제를선형 동적해석 문제로 변환시키므로,Mode Superposition method와 함께 사용하면 구조물의 재료적 동적 비선형 문제는 경제적으로 해석될 수 있다고 생각된다.

Figure.1 Increment-iterative scheme



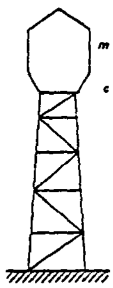


FIG.2 탑

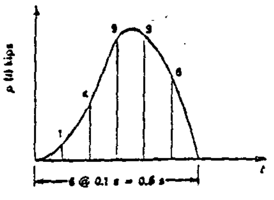


FIG.3 하중

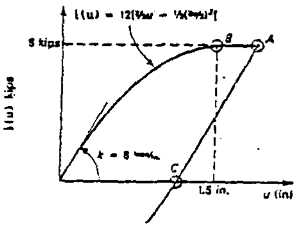


FIG.4 변위-내력 관계

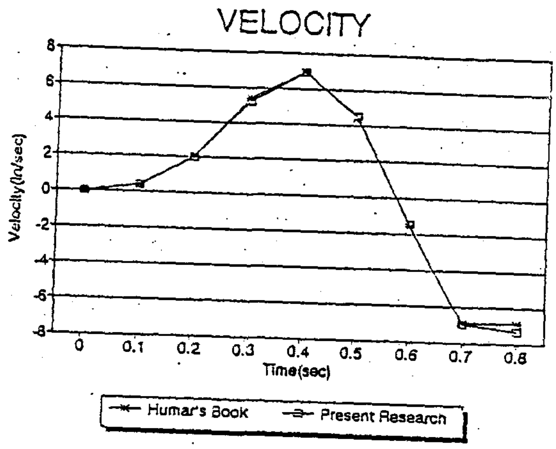


FIG.6

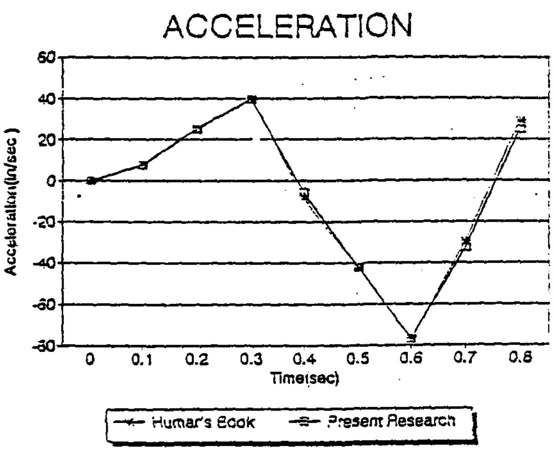


FIG.5

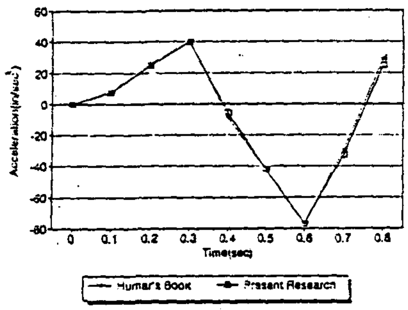


FIG.7 가속도

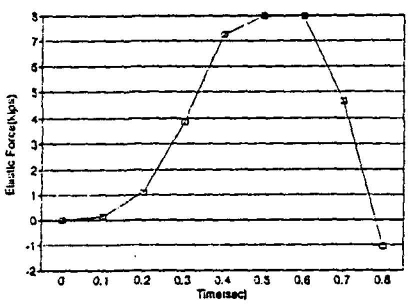


FIG.8 내력

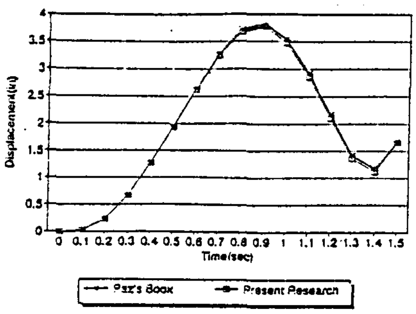


FIG.12 변위

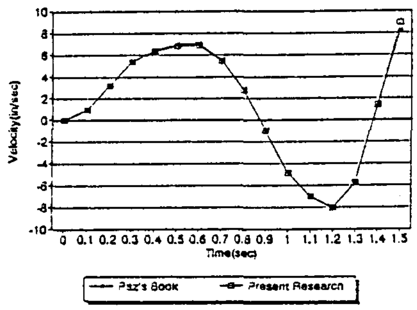


FIG.13 속도

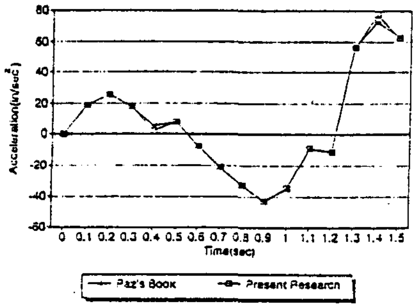


FIG.14 가속도

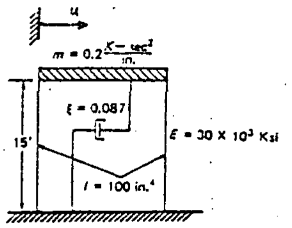


FIG.9시스템

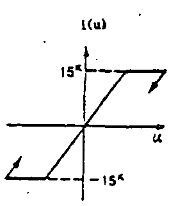


FIG.11 변위-내력 관계

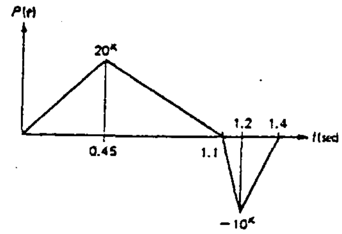


FIG.10 하중

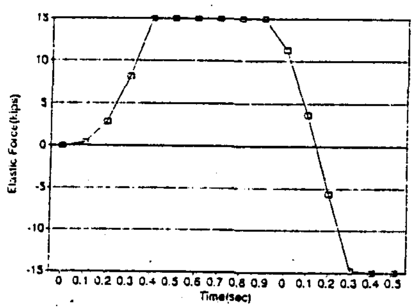


FIG.15 내력

참고 문헌

1. MORIS N.F-The Use of Mode Superposition in Nonlinear Dynamics. Comp. Meth.inAppl.Mech.and Eng.,Vol.7,pp 65-72, 1977.
2. NICKEL R.E-Nonlinear DynamicsBY Node Superposition. Comp.Meth. in Appl. Mech.and Eng.,Vol.7,ppa.107-129,1976.
3. BIEBER R.E., HOVLAND H.J-Seismic Dynamic Response by Approximate methods.Earth Eng.Struct.Dyn., Vol. 8,pp 41-53,1980.
4. STRICKLIN J.a., HAISLER W.E.-Formulation and Solution Procedures for Non-linear Structural Analysis.Comp.Struct.,Vol. 7, pp.125-136, 1977
5. CELLA A., CAZZULO R.,giovagnoni m.- An Incremental Duhamel Operator for Linear Dynamic Problem. ISC Report SERIE iv, 1979, M18,University of Genova, school of Engineering, Genova (It).
6. FRIED J. - Gradient Methods for Finite Element Eigen-Problem. AIAA J., Vol.7, pp.739-741, 1969
7. CELLA A. - Vibration and Model Dynamic Analysis in theFinite element method ICCAD Lecture Series n. 1/74, 1974, University of Genova, School of Engineering, Genova (It)
8. J.L.HUMAR -Dynamics of Structures, Printice-hall., 1990.
9. MARIO PAZ -Structural Dynamics, Van Nonstrand Reinhold., 1985.
10. DAVID S., BURNETT. Finite Element Analysis, Addision wesley.,1988.
11. LEONARD MEIROVITCH. - Computational Methods in structural Dynamics, Sijthoff & Noordhoff.,1980.
12. RAY W. CLOUGH, JOSEPH PENZIEN.-Dynamics of Structures, McGRAW-HiLL Book Company.,1975.