

# 빗살무늬동압베어링의 부하특성에 관한 연구

강 경 필\* · 임 윤 철\*\*

\* 연세대학교 대학원    \*\* 연세대학교 기계공학과

## A Study on the Load Characteristics of Herringbone-Grooved Journal Bearing

Kyung Phil Kang\*, Yoon Chul Rhim\*\*

\* Yonsei Univ. Graduate school

\*\* Yonsei Univ. Dept. of Mech. Eng.

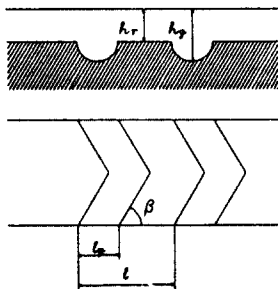
### 1. 서 론

최근 회전계의 고속화, 소형화 및 정속운전에 대한 요구가 엄격해짐에 따라 볼베어링을 저어널베어링으로 대체하는 흐름이 증가하고 있으나, 저어널베어링의 기본 구조상 운전시 여러 종류의 진동모드가 발생되며 이에따라 엄밀한 설계가 요구된다.

이러한 요구에 따라 본 연구에서는 불안정성을 억제할 수 있는 것으로 알려진 빗살무늬저어널베어링을 대상으로 하여 보다 정확한 설계를 위한 수치해석 프로그램을 개발하였다.

빗살무늬저어널베어링의 해석법으로는 간극의 비선형성을 단순화 시키기 위하여 무한홈을 가정한 협곡이론[1-3]을 시초로 하여 최근에는 컴퓨터계산속도의 발달로 실제 형상에 대해 해석한 직접계산법[4] 등이 알려져 있다. 직접계산법은 협곡이론에 의한 계산법에 비해 많은 시간이 걸리는 단점이 있으나, 베어링이 소형화되어 실제 많은 홈을 가공하기 힘들거나 Fig. 1과 같이 홈이 원호형으로서 직각홈으로 가정하기가 곤란한 요소에서는 협곡이론을 적용하는데 무리가 있을 것으로 사료된다.

따라서 본 연구에서는 직접계산법을 채택하여 Fig. 2의 소형 베어링 모델에 대한 부하특성을 수치해석하고, 이를 협곡이론과의 비교를 통하여 그 차이점을 검토하였다. 이를위해 압축성을 고려한 레이놀즈 방정식에 대한 베어링 주위의 압력분포를 계산하는 프로그램을 제작하였으며, 주어진 설계조건하에서 빗살무늬 형상을 결정하는 파라미터들의 최적값을 산출하고, 아울러 플레인저어널베어링과의 비교를 통하여 설계조건에 따른 빗살무늬저어널베어링의 기존 볼베어링의 대체 가능성을 평가하였다.



$$\alpha = \frac{h_p}{l} \quad \Gamma = \left( \frac{h_p}{h_r} \right)$$

Fig. 1 베어링 단면과 주요 치수

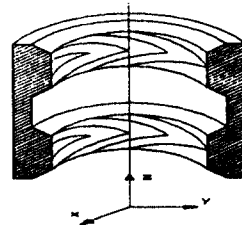


Fig. 2 베어링부 절개도

## 2. 이론해석

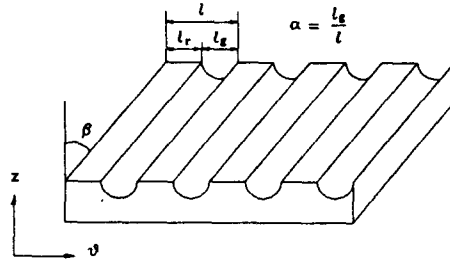


Fig. 3 베어링 전개도

Fig. 3은 전절의 Fig. 2에서의 좌표계(x, y, z)와 원주방향  $\theta$  를 평면으로 도시한 것이다. 해석은 베어링의 축방향으로의 대칭성을 고려하여 반만을 대상으로 하며 식의 유도를 용이하게 하기 위해 꺾임각을 따르는 새로운 좌표계( $\zeta, \eta$ )를 도입하였다. 좌표계( $\zeta, \eta$ )와 좌표계(z,  $\theta$ )와의 관계는 다음과 같다.

$$z = \zeta \sin \beta, \quad R\theta = \eta + \zeta \cos \beta \quad (1)$$

$$0 \leq z \leq L/2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\sin \beta} - \cot \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{R \partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2)$$

그리고, z방향 질량유량과  $\theta$ 방향 질량유량  $M_z, M_\theta$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} M_z &= - \frac{\rho h^3}{12\mu} \left( - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \\ M_\theta &= - \frac{\rho h^3}{12\mu R} \left( - \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{R\omega}{2} \rho h \end{aligned} \quad (3)$$

Fig. 4의 검사체적에 표시한  $\zeta$ 축에 직각방향 질량유량과  $\eta$ 축과 직각방향으로의 질량유량  $M_{\zeta_n}, M_{\eta_n}$  을 구하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} M_{\zeta_n} &= - M_z \cos \beta + M_\theta \sin \beta \\ M_{\eta_n} &= M_z \end{aligned} \quad (4)$$

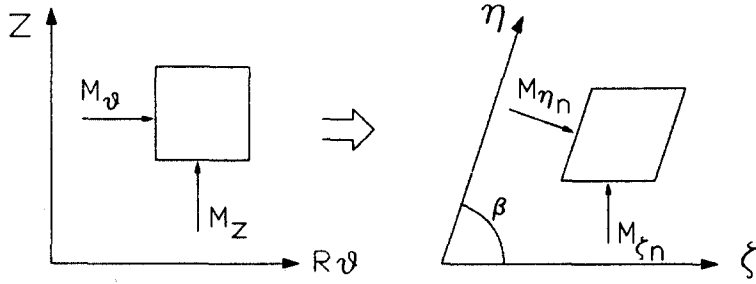


Fig. 4 검사체적의 좌표변환

식(3)에 식(2)의 관계를 대입하고 식(4)를 다시 정리하면 좌표계(ζ, η)에 대한 다음과 같은 질량유량식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 M_{\zeta\eta} &= \frac{\cot\beta}{12\mu} \rho h^3 \frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{1}{12\mu \sin\beta} \rho h^3 \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{R\omega \sin\beta}{2} \rho h \\
 M_{\eta\eta} &= -\frac{1}{12\mu \sin\beta} \rho h^3 \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\cot\beta}{12\mu} \rho h^3 \frac{\partial P}{\partial \eta}
 \end{aligned} \quad (5)$$

Fig. 4에 제시한 검사체적에 대하여 정상상태에서의 질량보존법칙을 적용하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 (M_{\zeta\eta} - (M_{\zeta\eta} + \frac{\partial M_{\zeta\eta}}{\partial \eta} \Delta\eta)) \Delta\zeta + (M_{\eta\eta} - (M_{\eta\eta} + \frac{\partial M_{\eta\eta}}{\partial \eta} \Delta\zeta)) \Delta\eta &= 0 \\
 \frac{\partial M_{\zeta\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial M_{\eta\eta}}{\partial \zeta} &= 0
 \end{aligned} \quad (6)$$

위식에서는 검사체적에 유입되는 질량을 양, 유출되는 질량을 음으로 표시하였다. 최종적으로 식(6)에 식(5)를 대입하면, 다음과 같은 무차원화된 레이놀즈방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} (ph^3 \frac{\partial p}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (ph^3 \frac{\partial p}{\partial \zeta}) - \cos\beta \left( \frac{\partial}{\partial \eta} (ph^3 \frac{\partial p}{\partial \zeta}) \right. \\
 \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} (ph^3 \frac{\partial p}{\partial \eta}) \right) - \Omega \sin^2\beta \frac{\partial}{\partial \eta} (ph) &= 0
 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$$\zeta = \zeta/R, \quad \eta = \eta/R, \quad p = p/p_s, \quad h = h/C$$

로 무차원화되었으며, 표현을 간략화하기 위해 무차원화 변수를 따로 구분하지 않았다.

### 3. 수치해석

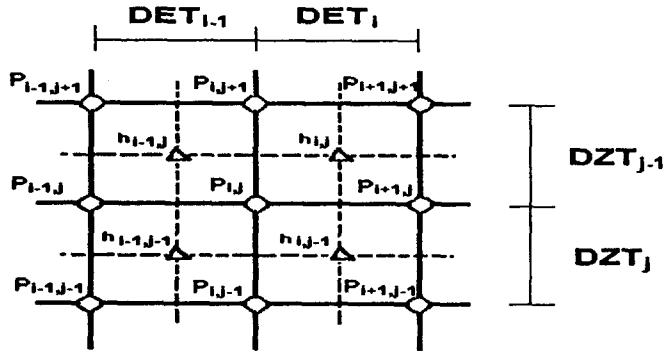


Fig. 5 좌표계( $\zeta, \eta$ )에서의 격자계

식(7)의 레이놀즈방정식은 비선형성이 심하여 Newton-Raphson 반복계산법을 사용하여 계산하였으며 식의 차분화는 유한차분법을 적용하였다. 차분화에 있어서 Fig. 5에서와 같이 간극  $h$ 의 node는 압력 node에 대해 staggered 되어 있으며, 주위 네점에서의 값들의 평균을 취하여 대표값으로 표시하였다. 차분식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 f_{i,j} = & \bar{h}^3 \frac{1}{DXS} [ P_{i+1,j}^2 - 2P_{i+1,j} P_{i-1,j} + P_{i-1,j}^2 ] + 3\bar{h}^2 h_x P_{i,j} \frac{1}{DX1} [ P_{i+1,j} - P_{i-1,j} ] \\
 & + \bar{h}^3 P_{i,j} \left[ \frac{P_{i+1,j}}{DXH \cdot DX2} - DXX P_{i,j} + \frac{P_{i-1,j}}{DXH \cdot DX3} \right] \\
 & + \bar{h}^3 \frac{1}{DYS} [ P_{i,j+1}^2 - 2P_{i,j+1} P_{i,j-1} + P_{i,j-1}^2 ] + 3\bar{h}^2 h_y P_{i,j} \frac{1}{DY1} [ P_{i,j+1} - P_{i,j-1} ] \\
 & + \bar{h}^3 P_{i,j} \left[ \frac{P_{i,j+1}}{DYH \cdot DY2} - DYY P_{i,j} + \frac{P_{i,j-1}}{DYH \cdot DY3} \right] \\
 & - \cos\beta \left\{ 2\bar{h}^3 \frac{1}{DX1 \cdot DY1} (P_{i+1,j} - P_{i-1,j})(P_{i,j+1} - P_{i,j-1}) \right. \\
 & \left. + 3\bar{h}^3 P_{i,j} \left[ h_x \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j-1}}{DY1} + h_y \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{DX1} \right] \right. \\
 & \left. + 2\bar{h}^3 P_{i,j} \frac{P_{i+1,j+1} - P_{i-1,j+1} - P_{i+1,j-1} + P_{i-1,j-1}}{\Delta X1 \cdot \Delta Y1} \right\} \\
 & - \Omega \sin^2\beta \left[ \bar{h} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{\Delta X1} + P_{i,j} h_x \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DX1 &= DET_{i-1} + DET_i & DY1 &= DZT_{j-1} + DZT_j \\
 DX2 &= DET_i & DY2 &= DZT_j \\
 DX3 &= DET_{i-1} & DY3 &= DZT_{j-1} \\
 DXH &= 0.5 \times DX1 & DYH &= 0.5 \times DY1 \\
 DXX &= \left( \frac{1}{DXH \cdot DX2} + \frac{1}{DXH \cdot DX3} \right) \\
 DYY &= \left( \frac{1}{DYH \cdot DY2} + \frac{1}{DYH \cdot DY3} \right)
 \end{aligned}$$

$$DXS = DX1^2$$

$$DYS = DY1^2$$

그리고, 수렴속도를 높이기 위해 ADI method를 사용하였으며 두단계의 계산에서 각각 Newton-Raphson 방법을 적용하여 수식화하였다.

먼저 x sweep 단계는  $i = 2, NET$ 에 대해서  $j$ 방향으로의 압력변화만을 미지수로 하여  $k-1$ 번째에서 구해진 압력값으로부터 매트릭스  $J$ 와  $F$ 를 구하여 다음과 같은 관계식에 의해  $k$ '번째 압력을 구했다.

$$J(P_i^{(k-1)})\Delta P = -F(P_i^{(k-1)})$$

$$P_i^{(k)} = P_i^{(k-1)} + \Delta P$$

여기서  $J$ 는

$$J(P_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{i2}}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial f_{i2}}{\partial p_{i3}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_{i3}}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial f_{i3}}{\partial p_{i3}} & \frac{\partial f_{i3}}{\partial p_{i4}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_{iNZT}}{\partial p_{iN}} & \frac{\partial f_{iNZT}}{\partial p_{iNZT}} \end{bmatrix}$$

으로 표현되며, 고정된  $i$ 에 대해  $f_{ij}$ 를 압력으로 편미분된 항들을 가진 tridiagonal matrix 꼴로 표시된다.

y sweep 단계에서는  $j = 1, NZT$ 에 대해서  $i$ 방향으로의 압력변화만을 미지수로 하여  $k-1$ 번째에서 구해진 압력값으로부터 매트릭스  $J$ 와  $F$ 를 구하여 다음과 같은 관계식에 의해  $k$ 번째 압력을 구했다.

$$J(P_j^{(k-1)})\Delta P = -F(P_j^{(k-1)})$$

$$P_j^{(k)} = P_j^{(k-1)} + \Delta P$$

여기서, 매트릭스  $J$ 는

$$J(P_j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{2j}}{\partial p_{2j}} & \frac{\partial f_{2j}}{\partial p_{3j}} & 0 & 0 & \frac{\partial f_{2j}}{\partial p_{NETj}} \\ \frac{\partial f_{3j}}{\partial p_{2j}} & \frac{\partial f_{3j}}{\partial p_{3j}} & \frac{\partial f_{3j}}{\partial p_{4j}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_{NETj}}{\partial p_{2j}} & 0 & 0 & \frac{\partial f_{NETj}}{\partial p_{mj}} & \frac{\partial f_{NETj}}{\partial p_{NETj}} \end{bmatrix}$$

로 표현되며 주기조건에 의해 periodic tridiagonal matrix 꼴이 된다.

이러한 반복계산 과정을 거쳐 수렴조건을 만족하면 베어링부의 압력을 적분하여 무차원화된 반경방향힘과 접선방향힘 그리고 자세각을 구했으며 이들 관계식은 각각 다음과 같다.

$$F_r^* = 2 \sum \Sigma P_{ij} \cos \theta_{ij} DET_{ij} DZT$$

$$F_t^* = 2 \sum \Sigma P_{ij} \sin \theta_{ij} DET_{ij} DZT$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{F_t^*}{F_r^*} \right)$$

#### 4. 결 과

Fig. 6과 Fig. 7은 각각 빗살무늬베어링과 플레인베어링의 압력분포를 나타낸다. Fig. 6은 홈수가 8개, 편심율 0.1인 경우이며 홈과 마루에 따라 8개의 톱니형상의 압력분포를 보인다.

Fig. 8부터 Fig.10까지는 8개의 홈이 가공된 빗살무늬동압베어링에 대해 베어링수  $\Lambda = 0.2$ 로 회전하는 경우를 대상으로 하여 편심율이 0.1인 경우를 수치해석 하였으며, 이로부터 구한 최적값을 이용하여 Fig. 11에서는 베어링수  $\Lambda = 1.0$ 에 대해서 편심율에 대한 부하계산을 하여 비교해 보았다.

Fig. 8은 홈폭비에 대한 반경방향힘의 변화를 나타내었다. 꺾임각이 커짐에 따라 홈폭비 변화에 따른 최대값은 증가후 감소하여 꺾임각  $\beta = 24^\circ$ , 홈폭비  $\alpha = 0.22$ 에서 최대반경방향힘이 나타난다.

Fig. 9는 홈폭비에 대한 자세각을 나타내었다. 홈폭비와 꺾임각이 각각 커질수록 자세각은 하향곡선을 그리며 작아지는 경향이다. 일반적으로 플레인저어널베어링에서는 작은 편심율에서 반경방향힘보다 접선방향힘이 커서 불안정 현상이 발생하게 되는데 빗살무늬홈을 가공하게 되면 접선방향힘이 감소하게 되어 불안정 현상을 개선시킬 수 있음을 이 그림으로 부터 예측할 수 있다.

Fig. 10은 Fig. 8에서 구한 최적조건으로 베어링수  $\Lambda = 0.2$ 에 대해 편심율을 변화시켜가며 반경방향힘과 자세각을 나타내었으며, Fig. 11은 Fig. 10의 조건에서 베어링수를 1.0으로 증가시켰을 때의 반경방향힘과 자세각을 나타내었다.

Fig. 12에서는 Fig. 8에서 구한 최적조건을 사용한 빗살무늬베어링과 플레인저어널베어링을 베어링수  $\Lambda = 0.2$ 인 경우에 대하여 반경방향힘과 자세각을 비교하였다. 편심율이 0.5이하에서는 빗살무늬동압베어링의 반경방향힘이 더 크게 나타나며 자세각은 전 영역에서 플레인베어링보다 작다. Fig. 13에서는  $\Lambda = 1.0$ 인 경우를 비교하였는데 전영역에서 빗살무늬베어링의 반경방향힘과 자세각이 플레인베어링에 비해 작게 계산되었다.

Fig. 14와 Fig. 15는 불안정 현상의 요인이 되는 접선방향힘을 나타내었다. 빗살무늬홈에 의해 플레인저어널베어링에서 발생하는 접선방향힘이 크게 줄며, 편심율 0.5이상에서는 플레인저어널베어링의 경우 접선방향힘이 계속 증가하는 반면 빗살무늬베어링의 경우는 감소하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 16에서 Fig. 19까지는 직접계산법과 협곡이론법에 의한 계산결과를 비교하였다.

Fig. 16은  $\Lambda = 0.2$ 에서 꺾임각  $\beta = 24^\circ$ 에 대한 홈폭비  $\alpha$ 의 변화를 각각 비교한 것으로 협곡이론을 사용할 경우 직접계산법과 비교하여 최대값의 위치가 홈폭비  $\alpha = 0.18$ 로 홈의 형상을 고려한 값에 비해 작게 평가되었다.

Fig. 17은 자세각의 변화를 나타내었는데 협곡이론을 사용할 경우 자세각의 변화폭이 좁게 계산되었으며 이는 협곡이론을 사용하면 직접계산법에 비해 접선방향힘이 보다 크게 평가되기 때문이다.

Fig. 18은 베어링수  $\Lambda = 0.2$ , 꺾임각  $\beta = 24^\circ$ , 홈폭비  $\alpha = 0.22$ 의 조건에 대해 편심율 변화에 대한 계산을 비교하였다. 홈의 형상을 고려한 경우 반경방향힘은 협곡이론에 비해 더 크게 평가되며 반면 접선방향힘은 작게 계산되었다. 따라서 전반적으로 홈의 형상을 고려한 경우 자세각은 상당히 작게 된다. Fig. 19는 베어링수  $\Lambda = 1.0$ 인 경우이며 경향은 베어링수  $\Lambda = 0.2$ 일 때와 동일하다.

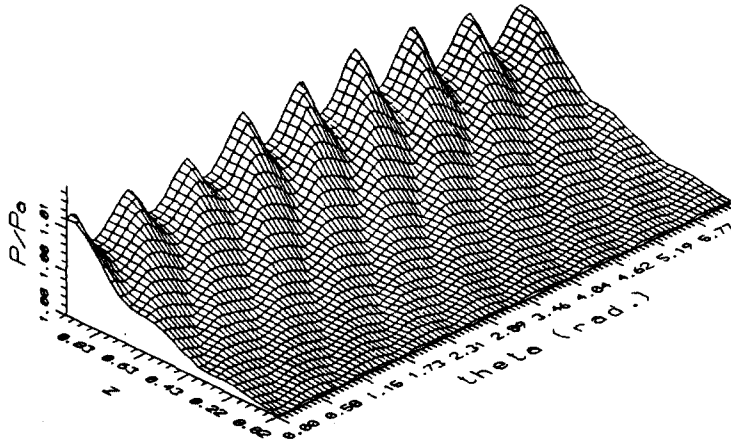


Fig. 6  $\lambda = 0.2$ ,  $\Lambda = 0.2$ ,  $\text{흡폭비} = 0.32$ ,  $\text{꺾임각} = 24^\circ$  조건에서의  
 빗살무늬동압베어링의 압력분포  
 ( $0 \leq z \leq (L/R)/2$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )

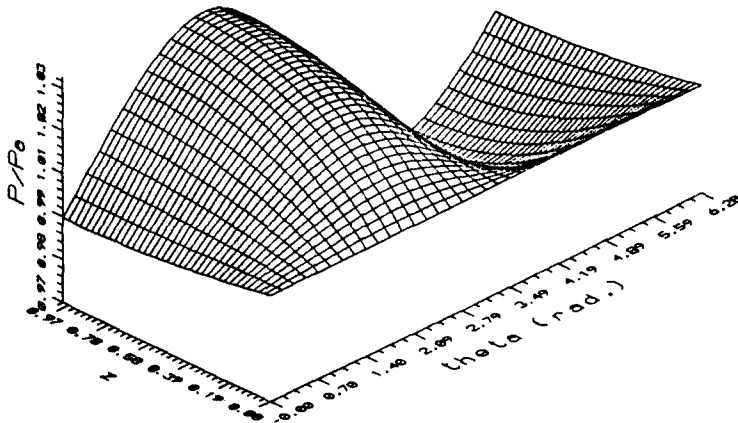


Fig. 7  $\lambda = 0.2$ ,  $\text{편심율} = 0.1$  조건의 플레인저어널베어링 압력분포  
 ( $0 \leq z \leq (L/R)/2$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )

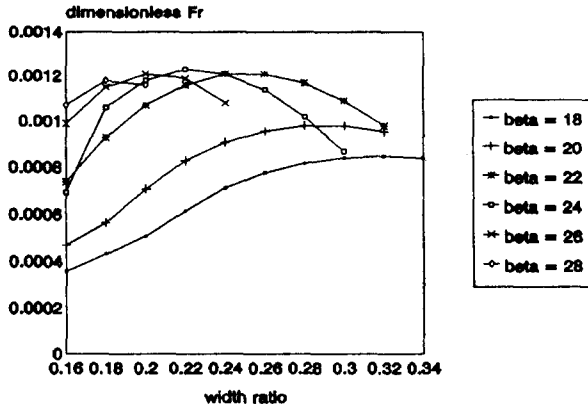


Fig. 8 편심율 = 0.1,  $\Lambda = 0.2$  조건에서의 흠폭비에 대한 반경방향힘

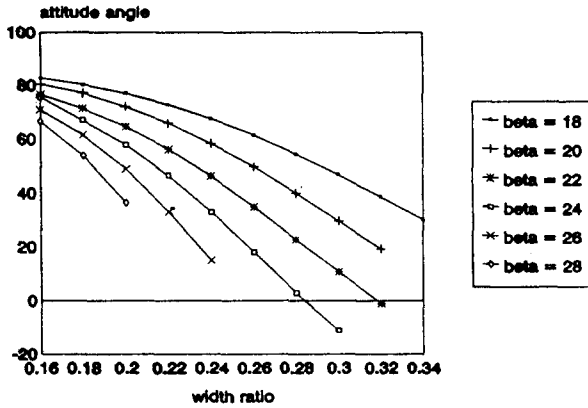


Fig. 9 편심율 = 0.1,  $\Lambda = 0.2$  조건에서의 흠폭비에 대한 자세각

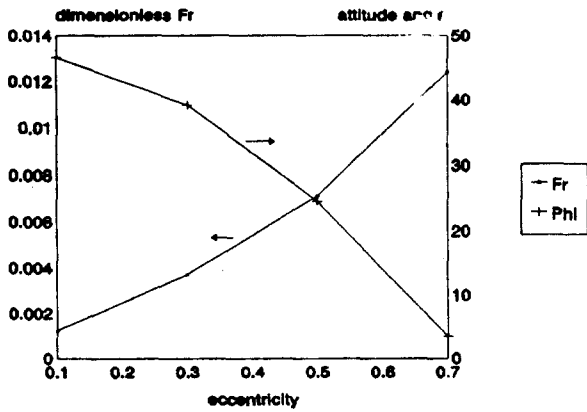


Fig. 10  $\Lambda = 0.2$ , 흠폭비 = 0.22, 꺾임각 =  $24^\circ$  에서의 편심율에 대한 반경방향힘과 자세각



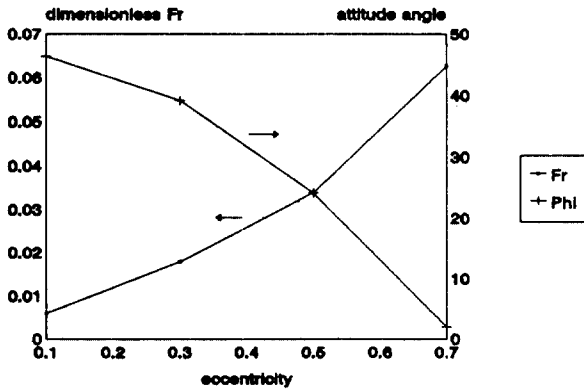


Fig. 11  $\Lambda = 1.0$ , 흡폭비 = 0.22, 꺾임각 =  $24^\circ$ 에서의 편심율에 대한 반경방향힘과 자세각

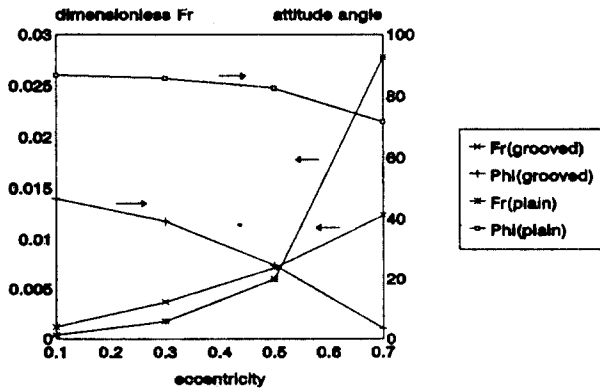


Fig. 12  $\Lambda = 0.2$ 에서의 빗살무늬동압베어링( 흡폭비 = 0.22, 꺾임각 =  $24^\circ$  )과 플레인저어널베어링의 반경방향힘과 자세각비교

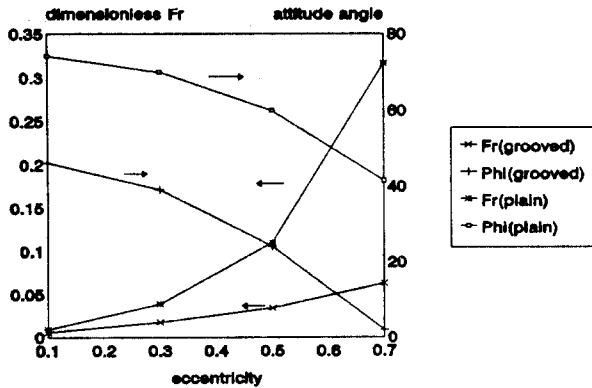


Fig. 13  $\Lambda = 1.0$ 에서의 빗살무늬동압베어링( 흡폭비 = 0.22, 꺾임각 =  $24^\circ$  )과 플레인저어널베어링의 반경방향힘과 자세각 비교

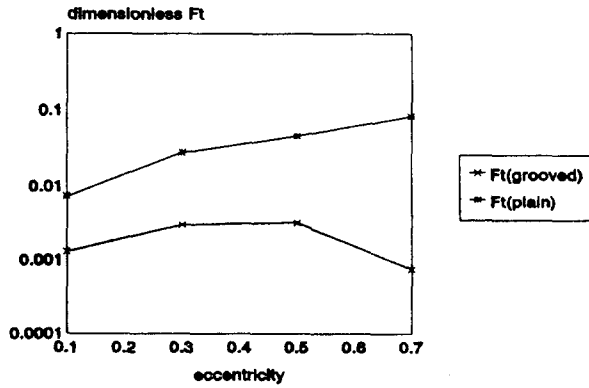


그림 14  $\Lambda = 0.2$ 에서의 빗살무늬동압베어링( 흠폭비 = 0.22,  $\theta = 24^\circ$ )과 플레인저어널베어링의 접선방향힘 비교

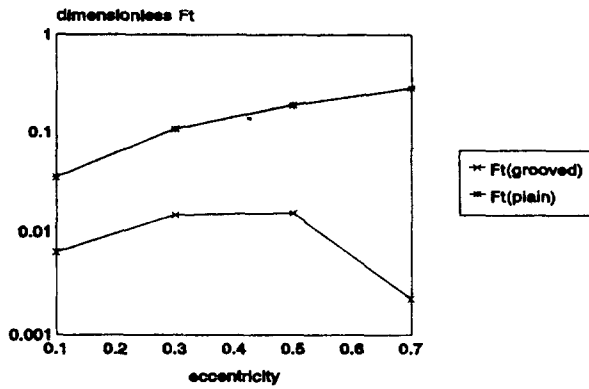


그림 15  $\Lambda = 1.0$ 에서의 빗살무늬동압베어링( 흠폭비 = 0.22,  $\theta = 24^\circ$ )과 플레인저어널베어링의 접선방향힘 비교

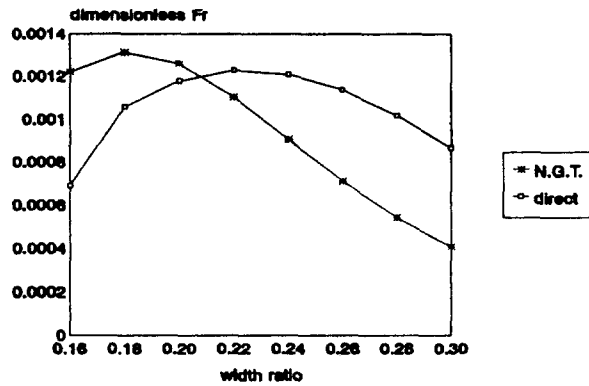


Fig. 16  $\Lambda = 0.2$ ,  $\theta = 24^\circ$  조건에서 험폭이론과 직접계산법의 흠폭비에 대한 반경방향힘 비교

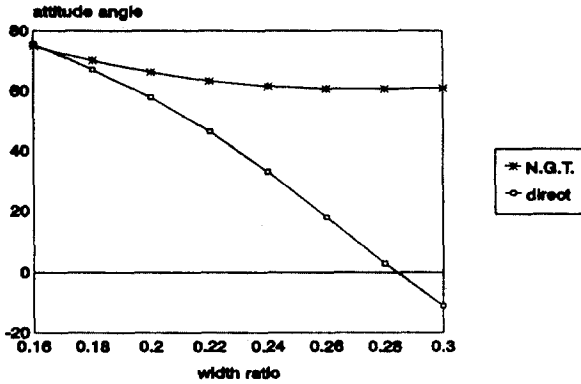


Fig. 17  $\Lambda = 1.0$ , 꺾임각 =  $24^\circ$  조건에서 협곡이론과 직접계산법의 흠폭비에 대한 반경방향힘 비교

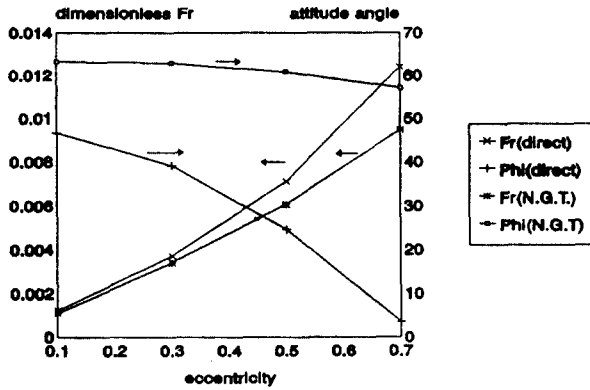


Fig. 18  $\Lambda = 0.2$ , 흠폭비 = 0.22, 꺾임각 =  $24^\circ$  조건에서의 협곡이론과 직접계산법의 편심율에 대한 반경방향힘과 자세각의 비교

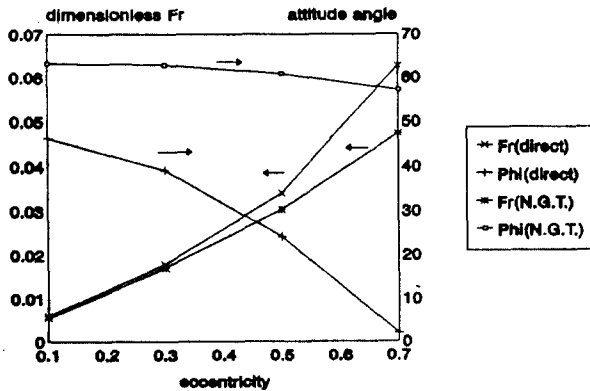


Fig. 19  $\Lambda = 1.0$ , 흠폭비 = 0.22, 꺾임각 =  $24^\circ$  조건에서의 협곡이론과 직접계산법의 편심율에 대한 반경방향힘과 자세각의 비교

## 5. 결 론

흡수 8개인 빗살무늬동압베어링에 대해 부하특성을 수치해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1.  $\Lambda = 0.2$ , 편심율 0.1에서 형상변수가  $\alpha = 0.22$ ,  $\beta = 24^\circ$ 일때최대의 반경방향힘을 얻을 수 있다.
2. 빗살무늬베어링을 사용하면 불안정 현상의 요인이 되는 접선방향힘을 크게 감소시킬 수 있다.
3. 원호형 흡 형상을 고려하여 직접계산법을 이용하면 협곡이론에 비해 반경방향힘이 크게, 접선방향힘은 보다 작게 평가된다.

### 기호및 약어 설명

- C** : 동심간극  
**e** : 편심량  
 **$F_r^*$**  : 무차원화된 반경방향 힘  
 **$F_t^*$**  : 무차원화된 접선방향 힘  
**h** : 간극  
**M** : 질량유량  
**P** : 압력  
 **$P_s$**  : 주위압력  
**R** : 반경  
 **$\alpha$**  : 흡폭비  
 **$\beta$**  : 흡꺾임각  
 **$\Gamma$**  : 흡깊이비  $\Gamma = \left(\frac{h_g}{h_r}\right)_0$   
 **$\varepsilon$**  : 편심율  $\varepsilon = \frac{e}{C}$   
 **$\mu$**  : 점성계수  
 **$\rho$**  : 유체밀도  
 **$\Lambda$**  : 베어링수  $\Lambda = 6\mu \frac{\omega}{Pa} \left(\frac{R}{C}\right)^2$   
 **$\phi$**  : 자세각  $\tan\phi = \frac{F_t}{F_r}$   
 **$\Omega$**  : 회전수  
 **$\zeta, \eta$**  : 변환 좌표계

### 하첨자

- g** : 흡 (groove)  
**r** : 마루 (ridge)  
**z** : 축방향  
 **$\theta$**  : 원주방향  
**n** : 수직인 방향  
**i, j** : 2차원 차분식에서의 node번호

### 참 고 문 헌

- [1] Vohr, Chow, "Charateristics of Herringbone-Grooved Gas Lubricated Journal Bearings", Journal of Basic Eng., Trans. ASME, Series D, Vol.87, Sept.1965, pp568-578  
 [2] F.C.Hsing, "Formulation of a generalized Narrow Groove Theory for Spiral Grooved Viscous Pumps", Journal of Lub. Tech., Jan. 1972, pp81-85  
 [3] A.J.Smalley, "The Narrow Groove Theory of Spiral Grooved Gas Bearings : Development and Application of a Generalized Formulation for Numerical Solution", Journal of Lub. Tech., Jan. 1972, pp86-92  
 [4] 市原順一, "ヘリングボン溝付動壓氣體軸受の研究", 博士論文, 京都大學, 1989