

# 상태 벡터 및 전달 매트릭스를 이용한 원통형 물수체의 강제 진동 해석

오정우진\*, 신구균\*, 함일배\*, 이헌곤\*

(The Forced Vibration Analysis of Immersed Circular Cylindrical Shell  
using State Vector and Transfer Matrix)

(Woo-Jin Jung, Ku-Kyun Shin, Il-Bae Ham, Hun-Gon Lee)

## 1. 서론

원통형 구조물은 원통형 쉘로 모델링이 가능하며, 원통형 쉘의 공기중 진동 해석은 Rayleigh의 Membrane Model 이후 Love, Flugge, Vlasov, Donnell, Sanders<sup>(1)</sup> 등에 의해서 제안된 여러가지 Thin shell 이론을 바탕으로 이루어지고 있다. 특히 Avallet와 Patrot<sup>(2)</sup>는 보강 원통형 쉘에 대하여 전달 행렬(Transfer matrix)방법을 이용하여 해석하였고, Borgiotti와 Rosen<sup>(3)</sup>은 Thick shell 이론과 상태 벡터(State vector)해석법을 이용하여 공기중 무한 원통형 쉘에 대한 진동 및 Power Flow에 대해서 해석을 하였다. Von Flotow<sup>(4)</sup> 등에 의하여 구조물의 진동해석에 사용되기 시작한, 상태 벡터(State vector)해석법은 원통형 쉘의 운동 방정식의 정형화(Formulation)와 해석(Analysis)을 용이하게 할 수 있는 장점이 있다.

수중 진동 해석은 Lyons<sup>(5)</sup>, Burroughs<sup>(6)</sup>, Harari와 Sandman<sup>(7)</sup> 등이 Thin Shell 이론 및 Hankel 함수를 이용하여 수중 방사 소음을 해석하는 과정에서 연구하였는데, 이들이 유체 거동 해석시 사용한 Hankel 함수는 해석적인 적분 계산시 어려움이 따른다. C.Avallet<sup>(8)</sup>는 전달 매트릭스법을 이용하여 보강 원통형 물수체의 진동 및 수중 방사 소음 해석이 가능하다는 것을 제시하였다.

따라서 본 연구에서는 원통형 쉘을 Donnell-Mushitari의 Thin Shell로 모델링하고, 유체의 거동은 Hankel 함수를 배제하고 유한차분법(Finite Difference Method)으로 모델링하여, 상태 벡터(State Vector)해석법, 전달 행렬 및 푸리에 변환(Fourier Transform)을 사용, 무한 원통형 물수체의 강제 진동을 해석 하였다.

## 2. 이론

### 2.1 원통형 쉘의 운동 방정식

(그림 1)에서 보여 주는 바와 같이  $x, \theta, r$  를 반지름  $R$  인

\*정회원, 국방과학연구소

원통형 쉘의 길이, 곡면, 반경방향의 좌표로 하고 이들 좌표축에 따른 변위를  $u, v, w$  라 하면, 쉘의 미소 요소에 대한 변위와 각 단면에 작용하는 힘들과의 상관 관계는 (그림 2)와 같고 쉘의 두께가 반경에 비해서 작다고 가정하면 Donnell-Mushitari<sup>(1)</sup>에 의한 원통형 쉘의 운동 방정식 및 힘-변위 관계식은 다음과 같다.

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - R \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R \frac{\partial N_x}{\partial x} - R \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + R \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + N - R (-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P_o) = 0 \quad (3)$$

$$R \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - R Q_x = 0 \quad (4)$$

$$R \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - R Q = 0 \quad (5)$$

$$N_x = \frac{E h}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{w}{R} \right] \quad (6)$$

$$N_\theta = \frac{E h}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (7)$$

$$M_x = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

여기에서  $E = E'(1+\eta)$   $E'$  = Young's Modulus

$\eta$  = 구조 감쇠 계수  $\rho$  = 쉘 밀도  $h$  = 쉘 두께

$R$  = 쉘 반경  $\nu$  = 포아손 비

$n$  = 원주 방향의  $n$  차 모드

$P_o$  = 쉘에 작용하는 음압

이때  $\theta$  는 비틀림 변위이며,  $N_x$   $N_x$   $Q_x$   $M_x$  는 변위  $u$   $v$   $w$  및  $\theta$ 에 대응하는 전단력 및 모멘트이다. 원통형 쉘의 거동을 조화운동이라 가정하고 원주 방향의 거동을 푸리에 급수전개를 이용하여 변수 분리하면 한 단면에서의 변위들과 힘들은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z_s(x, z, \theta, t) = \sum_{-M}^M Z_n(x, z) \exp(jn\theta) \exp(j\omega t) \quad (10)$$

단,  $Z_s^t = \{ u \ v \ w \ \theta \ N_x \ N_y \ Q_x \ M_x \}$  이며 이를 상태 벡터(State Vector)이라고 한다. 식(10)을 이용하여 식(1) - 식(9) 까지를 상태 벡터를 이용하여 나타내면 다음과 같은 일차 미분 방정식(First Order Differential Equation)으로 표시할 수 있다.

$$\frac{d\{Z_s\}}{dx} = [S] \{Z_s\} + \{Y\} \quad (11)$$

## 2.2 유체의 운동 방정식

원통형 셸이 몰수되어 있을 경우 셸의 동적 거동은 주변 유체에 의해 영향을 받게 된다. 따라서 셸의 동적 거동을 해석하기 위해서는 이들 유체의 효과를 고려한 운동 방정식이 필요하다. 이를 위하여 원통형 셸 내부는 진공으로, 외부는 유체로 둘러싸여 있다고 가정하면 외부 유체 입자의 거동은 식(12)와 같은 Helmholtz 방정식을 만족하여야 한다.

$$\nabla^2 P + k_0^2 P = 0 \quad (12)$$

이때  $P$  는 유체 압력을,  $k_0$  는 유체의 파수 (Wave Number) 이다. 식(12)는 식(10)의 푸리에 급수전개를 이용하여 원주 방향의 거동을 변수 분리하면 아래의 식(14) 형태로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = (n^2/R^2 - k_0^2)P - \frac{\partial P}{R\partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \quad (13)$$

이때  $U$  는 길이 방향으로의 유체 입자의 변위를 의미한다. 한편 식(13)을 셸에서와 같이 길이 방향으로 일차 미분 방정식의 형태로 표현하기 위하여 아래와 같은 유체의 연속 방정식을 이용한다.

$$\vec{\nabla} \cdot P + \rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

이때  $\vec{V}$  는 유체의 속도 벡터를,  $\rho_0$  는 유체의 밀도이다. 식(14)로부터 길이 방향으로의 유체 변위와 압력 변동의 관계식을 구하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \omega^2 U \quad (15)$$

식(15)를 식(13)에 대입하고 정리하면 아래와 같다.

$$\rho_0 \omega^2 \frac{\partial U}{\partial x} = (n^2/R^2 - k_0^2)P - \frac{\partial P}{R\partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \quad (16)$$

식(15)과 식(16)으로 부터 유체 입자의 운동 방정식을 셸의 운동 방정식 같이 길이 방향으로의 일차 미분 방정식의 형태로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 식(16)의 반경 방향으로의 편도함수  $\partial/\partial r$  와  $\partial^2/\partial r^2$  을 (그림 3)에서와 같이 반경 방향으로 유체를  $N$  개의 요소로 나누어 유한 차분법을 이용하여 셸의 중심으로부터 임의의 거리  $r_m$  에 위치한 유체에 대한 길이 방향으로의 유체의 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dP_m}{dx} = \rho_0 \omega^2 U_m \quad (17)$$

$$\frac{dU_m}{dx} = \phi_m P_{m-1} + \xi_m P_m + \psi_m P_{m+1} \quad (18)$$

이때  $\delta_r$  는 유체 요소의 간격이며,  $\phi_m$ ,  $\xi_m$ ,  $\psi_m$  은 원주 방향의 모우드 수  $n$  과  $\delta_r$ ,  $r_m$ ,  $k_0$  등의 함수이다. 한편 원통형 셸 주위의 유체 영역을 무한으로 하였을 때 이를  $N$  개의 유한 요소로 표현하기 위하여 마지막  $N$  번째 요소의 압력  $P_N$  은 원통형 셸의 저차의 길이 방향 파수 (Low Axial Wave Number)  $k$  에 대한 무한 원통형 셸의 엄밀해의 근사식 ( $k_0 r_N \gg 1$ )을 이용하여 표시하면 다음과 같다.<sup>(8)</sup>

$$P_N = (r_{N-1}/r_N)^{(1/2)} \exp(-j(r_N - r_{N-1})k_0) P_{N-1} \quad (19)$$

## 2.3 무한 원통형 셸 + 유체 의 운동 방정식

식(11)의 원통형 셸의 운동 방정식과 식(17),식(18)의 유체의 운동 방정식 및 원음장(Far Field)에서의 음압을 나타내는 식(19)와 원통형 셸과 유체와의 경계조건을 이용하면 (무한 원통형 셸 + 유체) 의 운동 방정식을 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d\{Z\}}{dx} = [A] \{Z\} \quad (20)$$

이때  $\{Z\}$  는  $(2N+8)$  개의 (무한 원통형 셸 + 유체) 의 상태 벡터이다. 식(20)은 원주 방향  $n$  번째 모우드 상태 벡터들의 길이 방향 전파(Propagation)를 나타내는 방정식이며, 전형적인 고유치 문제(Eigenvalue Problem)이다. 이들의 고유치와 고유벡터 행렬들을 이용하면 길이방향으로 임의의 점  $x$  에서  $x + L$  까지의 전달 행렬  $[M_s]$  를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \{Z(x+L, n)\} = \\ & [\varphi(n, i)] \text{diag}\{e^{-j\gamma(n, i)L}\} [\varphi(n, i)]^{-1} \{Z(x, n)\} \\ & = [M_s] \{Z(x, n)\} \end{aligned} \quad (21)$$

따라서 원통형 물수체의 Natural Wave Set 는 전달 행렬  $[M_s]$  의 고유치와 고유벡터 행렬로 구성된다는 것을 알 수 있다. 이들을 이용하여 원통형 물수체에 대한 강제 진동 해석을 할 수 있다. 또한 보강 원통형 셀에서도 보강재 (Stiffener)의 전달 행렬  $[M_R]$  을 계산하여 보강 원통형 셀의 전달 행렬을  $[M_R] [M_s]$  로 계산한 후 고유치와 고유벡터 행렬을 구하면 보강 원통형 물수체에 대한 강제 진동 해석을 할 수 있다는 것을 알 수 있다.

### 3. 수치 계산 결과 및 토의

본 해석방법의 타당성을 살펴보기 위하여 이중 공간 푸리에 변환(Double Spatial Fourier Transform, x방향과  $\theta$ 방향)과 고속 푸리에 변환(Fast Fourier Transform) 알고리즘을 이용한 무한 원통형 물수체의 강제 진동해석 결과<sup>(6)</sup>(9)와 비교하였다. 이때 비교된 결과는 반경방향의 변위만 고려하였다. 수치계산의 예로 택한 원통형 물수체의 제원은 Table.1과 같다.

(Table.1) Shell Properties

반경	0.62 (m)
두께	0.02 (m)
Young의 계수	$2.1 \times 10^{11}$ (N/m <sup>2</sup> )
밀도	7,800 (kg/m <sup>3</sup> )
Poisson 비	0.28
구조감쇠계수	0.04

수치계산시 사용한 외력의 크기는 1N 이며, 가진 지점은 좌표의 원점( $x_0=0$ ,  $\theta_0=0$ )을 택하였다. 가진 주파수로는 650.0(Hz)와 3000.0(Hz)의 두가지 경우에 대하여 수행하였으며 원주방향 모우드는 16 차까지 고려하였다. (그림 4)에 원주 방향  $\theta = 0$  인 지점에서 축 길이 방향으로의 반경방향의 변위에 대한 원통형 물수체의 강제 진동 해석결과를 비교 수록하였다. 이 결과 본 연구에서 제시한 해석결과와 참고문헌 (6) 과 (9) 의 해석결과와 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 이때 해석결과에서 나타난 차이는 유체의 모델링 기법의 차이 때문에 생긴 것으로 생각된다.

(그림 5)에는 구조물의 감쇠효과와 유체의 감쇠효과를 살펴보기 위해서 수행한 계산결과를 수록하였다. (그림 5)의 (a)에는 비감쇠 원통형 구조물이 공기중에 있는 경우를, (그림 5)의 (b)에는 비감쇠 원통형 구조물이 유체에 잠겨 있는 경우를, (그림 5)의 (c)에는 구조 감쇠 계수  $\eta = 0.1$  인 원통형

구조물이 유체에 잠겨 있는 경우에 대한 계산결과를 나타내었다. 이 결과 외력이 작용하는 부근에서는 구조물이나 유체에 의한 감쇠효과가 나타나지 않고 있음을 알 수 있으며, (그림 5)의 (a) 와 (b) 로 부터 유체가 구조물의 진동에 대해서 감쇠 작용을 하고 있음도 알 수 있다. 또한 (그림 5)의 (c) 는 구조물의 감쇠효과를 고려한 경우의 진동 수준이 가장 낮게 나타난다는 것을 보여주고 있으며 이로부터 구조물의 감쇠효과가 유체의 감쇠효과보다 크다는 사실을 알 수 있다.

(그림 6)과 (그림 7)에는 근음장(Near Field)에서의 원통형 물수체 표면의 유체 음압을 외력이 작용하는 단면에서 외력이 작용하는 점을  $0^\circ$  로 하여 원주 방향으로  $360^\circ$  까지의 계산결과를 각각 파스칼(N/m<sup>2</sup>)과 데시벨(dB)단위로 나타내었으며, 이결과 한 단면에서의 유체의 음압은 외력이 작용하는 점에서 가장 높게 나타나고 있음을 알 수 있다.

### 4. 결론 및 발전방향

원통형 물수체는 Donnell-Mushitari의 Thin Shell 이론을, 유체는 유한 차분법을 사용하고, 상태 벡터 및 전달 행렬을 이용하여 원통형 물수체의 운동 방정식을 정식화 하였으며, 원주방향으로의 변화율인 ( $\partial/\partial\theta$ )를 푸리에 급수전개를 이용하여 원주 방향으로 n 차 모우드인  $j_n$  항으로 변환시키고, 길이 방향으로는 푸리에 변환을 이용한 무한 원통형 물수체의 강제 진동 해석방법을 제시하였다. 수치 계산을 통하여 본 연구에서 제시한 방법이 무한 원통형 물수체의 강제 진동 해석에 효과적으로 적용될 수 있음을 확인하였다. 또한 유체를 유한 차분법을 이용하여 요소화 함으로써 근음장 압력(Near Field Pressure)을 계산할 수 있음도 알 수 있었다.

본 연구는 추후 다음과 같은 해석에 발전, 활용될 수 있을 것으로 생각된다.

- 1) 보강 원통형 물수체의 진동 및 방사소음해석
- 2) 원통형 물수체에 내부 구조물이 있는 경우의 진동 및 방사소음해석
- 3) 유한한 길이의 원통형 물수체의 진동 및 방사소음해석

### 참고문헌

1. A.W.Leissa, "Vibration of Shells", NASA SP-288, Washington DC, 1973. Chap.1
2. C.Avallet and J.M.Parot, "Recherche D'ondes Naturelles De Coque Cylindriques Radies Periodiquement", Revue De Cethedec 19, 1982, p159-173

3. Giorgio.V.Borgiotti and Erik M.Rosen, "The State Vector Approach To The Wave And Power Flow Analysis Of The Forced Vibrations Of A Cylindrical Shell. Part 1 : Infinite Cylinders In Vacuum", J.Of The Acoust.Soc.Am,Vol.91, No.2, 1992, p911-925
4. A.H.Von Flotow, "Disturbance Propagation In Structural Networks", J.Of Sound and Vibration,1986,Vol.106,No.3, p433-450
5. W.C.Lyons, J.E.Russell and G.Herrman, "Dynamics of Submerged Reinforced Cylindrical Shells", Proceedings Of the ASCE, 1968, p397-420
6. Courtney B.Burroughs, "Acoustic Radiation From Fluid-Loaded Infinite Circular Cylinders With Doubly Periodic Ring Supports", J.Of Acoust. Soc. Am. 1984, Vol. 75, No.3, p715-722
7. A.Harari and B.E. Sandman, "Radiation and Vibrational Properties Of Submerged Stiffened Cylindrical Shells", J.of Acoust.Soc.Am. 1990, Vol. 88, No.4, p1817-1830
8. C.Avallet, "Vibration and Sound Ratiation of Immersed Stiffened Shell", Proceedings Of The 12th Int. Congress on Acoustics, 1986, Toronto, Canada
9. 배수룡외, "보강 원통형 물수체의 음향방사 해석과 FFT에 의한 진동 해석", 소음진동 공학회, 1993, '93 춘계학술대회 논문집

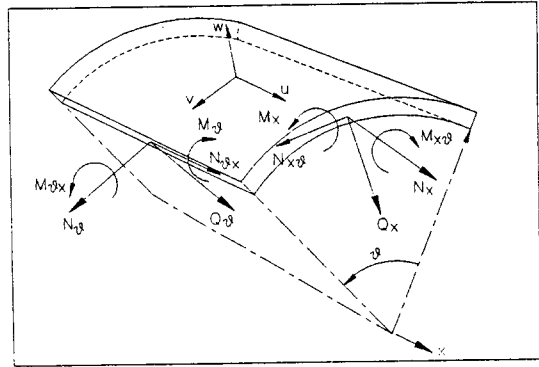


Fig.2 Cylindrical Shell Element

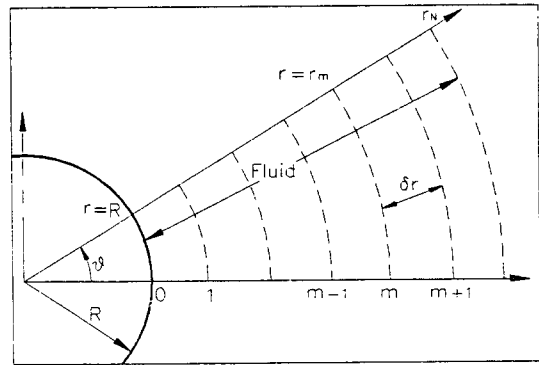


Fig.3 Finite Difference Approximation for the Fluid Surrounding the Shell

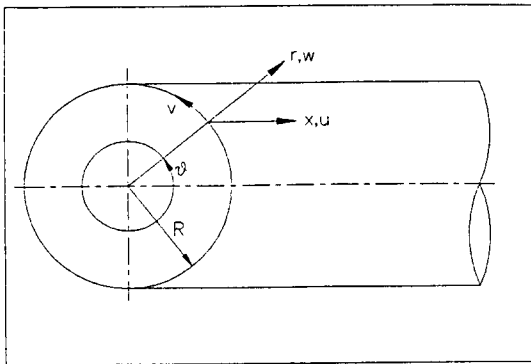


Fig.1 Coordinate System of the Circular Cylindrical Shell

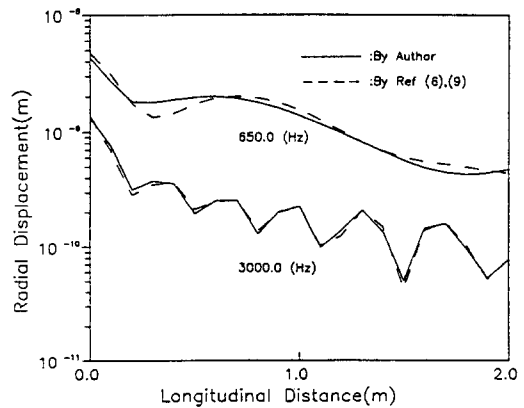


Fig.4 Comparison of Results Between the Author And Ref.(6),(9) in Radial Displacement

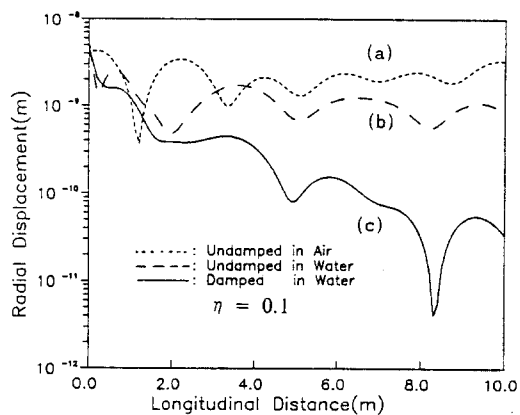


Fig.5 Calculation of the Damping Effects of the Structure And Fluid

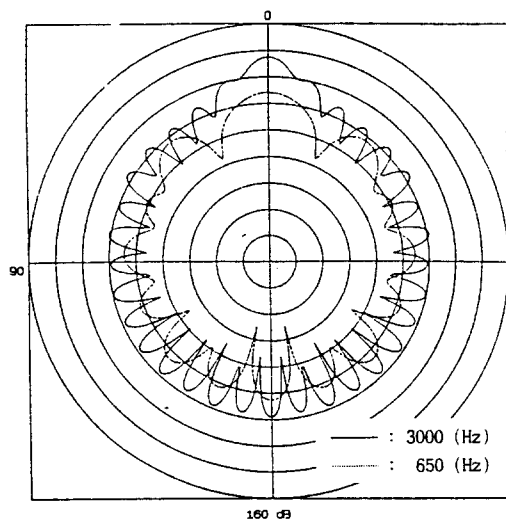


Fig.7 Calculation of the Near Field Pressure at the Shell Surface in Decibel Unit(dB)

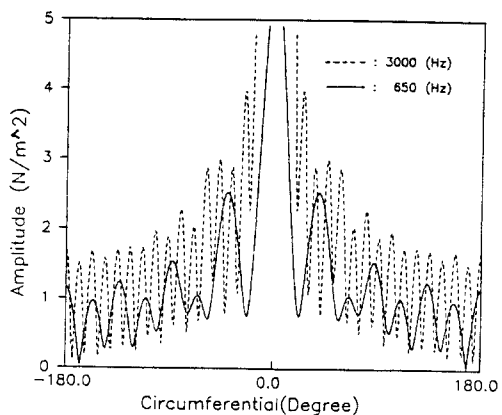


Fig.6 Calculation of the Near Field Pressure at the Shell Surface in Pascal Unit ( $N/m^2$ )