

부분구조의 상태방정식을 이용한 국부 비선형계의 과도응답해석

(Transient Response Analysis of Locally Nonlinear Structures Using Substructure-Based State Equations)

김형근* (삼성중공업), 박윤식 (한국과학기술원)
H. K. Kim* (Samsung Heavy Industries Co. Ltd.), Y. S. Park (KAIST)

Keywords: Substructure(부분구조), Modal Synthesis Method(모우드합성법), State Equation(상태방정식), Lagrange Multiplier(라그랑지 승수)

ABSTRACT: An efficient method is presented for determining transient responses of locally nonlinear structures using substructure eigenproperties and Lagrange multiplier technique. The method is based upon the mode synthesis formulation procedure, but does not construct the equations of motion of the combined whole structure compared with the conventional methods. For modal bases of each linear substructure, either fixed or free interface modes can be employed. The transient analysis is based upon the recurrence discrete-time state equations and offers the simplicity of the Euler integration method without requiring small time increment and iterative solution procedure. Numerical examples reveal that the method is very accurate and efficient in calculating transient responses compared with the direct numerical integration method.

1. 서론

비선형계의 동적해석을 위해서는 직접적분법 [1], 모우드중첩법 [2] 그리고 모우드합성법 [3-7]이 주로 사용된다. 직접적분법에서는 유한요소법을 이용하여 전체계에 대한 질량, 감쇠 및 강성행렬을 구성한 후 구조물의 접선강성행렬을 매 시간마다 구하여 증분식의 형태로 표현되는 운동방정식을 이용하여 시간영역에서 동적응답을 구한다. 이 방법은 임의의 비선형계에도 적용이 가능하나 계산시간이 많이 소요되는 단점이 있다.

모우드중첩법은 선형계의 해석을 위해서는 매우 효과적인 것으로 밝혀졌으며 다소 변형된 형태로 비선형계의 해석을 위해 적용되었다. Nickell은 [2] 시간에 따른 구조물의 강성변화를 자유진동 모우드행렬을 매 시간 새로 계산하여 고려하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 자유도가 많은 유한요소모델의 경우 고유치해석을 반복적으로 수행해야하므로 그 효율성은 문제에 따라 달라질 수 있다.

국부 비선형계의 동적해석을 위해서도 모우드합성법이 널리 사용되었으나 이 경우 선형 부분구조를 나타내기 위해서는 콘볼루션 적분(convolution integral formulation)이 주로 사용되었다 [3-7]. 이 방법은 비선형 요소가 국부적으로 존재하며 선형 및 비선형 부분구조로 구분하여 모델을 수립할 수 있는 대형 구조물의 모델수립 및 동적해석에 효과적이거나 수식전개가 매우 복잡한 단점이 있다.

본 연구에서는 상태방정식을 이용한 시간영역해석법을 국부적으로 비선형 요소를 갖는 유한요소모델의 과도응답해석을 위해 적용하며 부분구조의 모우드로는 자유경계모우드 뿐만 아니라 고정경계모우드도 비선형계의 해석을 위해 효과적으로 사용될 수 있음을 보인다. 제시한 방법을 비선형 강성을 갖는 유한요소모델의 과도응답해석에 적용하여 그 결과를 Newmark의 수치적분법으로 구한 엄밀해와 비교하며 제시한 방법의 수치해석시 효율성과 해의 정확도를 검증한다.

2. 상태방정식을 이용한 시간영역해석

2.1 부분구조의 운동방정식

해석의 편의를 위해 구조물은 Fig. 1과 같이 두개의 선형 부분구조와 한개의 비선형 부분구조로 구성되는 것으로 가정한다. 비선형 부분구조 r은 J개의 비선형 강성으로 구성되며 선형 부분구조는 유한요소법을 이용하여 모형화하며 비례감쇠를 가정한다.

선형 부분구조 s의 운동에너지 T, 탄성에너지 V, 그리고 소산합수 D는 다음과 같이 표현된다.

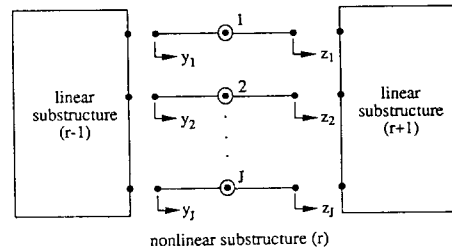


Fig. 1 A structural system with localized nonlinearities.

$$T_s = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}_s^T [m]_s \{\dot{x}\}_s, \quad V_s = \frac{1}{2} \{x\}_s^T [k]_s \{x\}_s, \\ D_s = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}_s^T [c]_s \{\dot{x}\}_s \quad (1)$$

여기서 $\{x\}_s$ 는 부분구조 s의 변위벡터이며 $[m]_s$, $[c]_s$ 그리고 $[k]_s$ 는 각각 부분구조의 질량, 감쇠 및 강성행렬이다. 비선형 부분구조 r의 j번째 강성요소에 대한 탄성에너지 V_{rj} 는 다음과 같이 표현된다.

$$V_{rj} = \frac{\kappa_{rj}}{n_{rj} + 1} |y_j - z_j|^{n_{rj} + 1} \quad (2)$$

여기서 κ_{rj} 는 j번째 강성의 비선형 강성계수이며 n_{rj} 는 비선형의 차수(order)이다.

기하학적 적합조건은 다음과 같다.

$$[\beta]_r^T \{x\}_r = \{0\} \quad (3)$$

여기서

$$\{x\}_r = \{ \{x\}_{r-1}^T \{x\}_r^T \{x\}_{r+1}^T \}^T \\ \{x\}_r = \{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_J \ z_1 \ z_2 \ \dots \ z_J\}^T$$

이며 $\{x\}_r$ 는 차원이 $N_r \times 1$ 인 좌표계벡터 그리고 $[\beta]_r$ 는

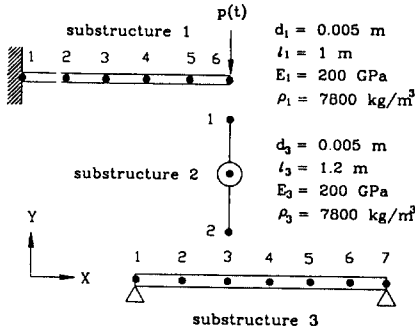


Fig. 2 An example finite element model.

차원이 $N_s^r \times N_s^r$ 인 계수행렬이다. N_s^r 은 모든 독립적인 부분구조를 나타내기 위해 사용되는 자유도의 수이며 N_s^r 은 구조조건 수로써 $2J$ 이다.

식 (3)을 각각의 부분구조로 분리하여 나타내면 다음과 같다.

$$\sum_{s=r-1}^{r+1} [\beta]_s^T \{x\}_s = \{0\} \quad (4)$$

여기서 $[\beta]_s$ 는 차원이 $N_s^r \times N_s^r$ 인 계수행렬이며 N_s^r 은 부분구조 s 의 자유도 수이다.

라그랑지 방정식을 적용하면 부분구조에 대한 운동방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[m]_s \{\ddot{x}\}_s + [c]_s \{\dot{x}\}_s + [k]_s \{x\}_s = [\beta]_s \{\lambda\} + \{p\}_s \quad (5)$$

for $s = r-1$ and $r+1$

$$\{g\}_r = [\beta]_r \{\lambda\} \quad (6)$$

여기서 $\{\lambda\}$ 는 라그랑지 승수벡터로 경계면에 작용하는 비선형힘을 의미하며 $\{p\}_s$ 는 외력이다. $\{g\}_j$ 의 j 번째 성분 ($j = 1, 2, \dots, 2J$)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_j = \kappa_{rj} (y_j - z_j) |y_j - z_j|^{n_{rj}-1} \quad (7)$$

비선형 부분구조에서는 경계자유도만 정의되므로 식 (7)과 같이 표현되는 1개의 강성요소 양단에는 2개의 구속조건이 부가된다. 따라서 부분구조 r 에는 $2J$ 개의 라그랑지 승수가 존재하나 1개의 강성요소 양단에 작용하는 2개의 내력은 그 크기가 서로 같으므로 이를 독립적인 1개의 내력으로 표현할 수가 있다. $\{\lambda_1\}$ 를 독립적인 라그랑지 승수벡터라고 하면 $\{\lambda\}$ 는 $\{\lambda_1\}$ 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{\lambda\} = [\gamma] \{\lambda_1\} \quad (8)$$

여기서 $[\gamma]$ 는 차원이 $N_s^r \times N_s^r/2$ 인 계수행렬이다.

식 (8)을 식 (5)와 (6)에 대입하면 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[m]_s \{\ddot{x}\}_s + [c]_s \{\dot{x}\}_s + [k]_s \{x\}_s = [\beta]_s \{\lambda_1\} + \{p\}_s \quad (9)$$

for $s = r-1$ and $r+1$

$$\{g\}_r = [\beta]_r \{\lambda_1\} \quad (10)$$

Table 1 Comparison of solution accuracies.

Response type	Number of substructure modes							
	2 modes		4 modes		6 modes		8 modes	
	Fix	Free	Fix	Free	Fix	Free	Fix	Free
Displacement	1.33	0.57	0.17	0.03	0.02	0.01	0.004	0.002
Velocity	11.07	19.04	11.25	7.78	0.77	1.60	0.10	0.57
Acceleration	26.69	33.47	18.66	9.41	10.09	9.77	6.12	5.91

여기서

$$[\beta]_s = [\beta]_s [\gamma] \quad \text{for } s = r-1, r, r+1$$

식 (7)에서 보듯이 비선형 부분구조 r 에서는 경계자유도의 상대적인 변위가 사용되며 간단한 조작에 의해 이를 선형 부분구조의 경계자유도를 이용하여 일반적인 형태로 나타낼 수가 있다. 이는 행렬 $[\beta]_s$ 를 통해 이루어지며 먼저 $[\beta]_s$ 를 이용하면 기하학적 적합조건은 $[\beta]_s$ 에 의해서도 식 (4)와 같은 형태로 표현된다.

$$\sum_{s=r-1}^{r+1} [\beta]_s^T \{x\}_s = \{0\} \quad (11)$$

비선형 부분구조의 상대적인 변위는 선형 부분구조의 경계자유도에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{y\} - \{z\} = [\beta]_r^T \{x\}_r = - \left(\sum_{s=r-1, r+1} [\beta]_s^T \{x\}_s \right) \quad (12)$$

여기서

$$\{y\} = \{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_J\}^T, \quad \{z\} = \{z_1 \ z_2 \ \dots \ z_J\}^T$$

식 (10)은 다음과 같이 분리되며,

$$\begin{Bmatrix} \{g_1\}_r \\ \{g_D\}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\beta_{II}]_r \\ [\beta_{ID}]_r \end{Bmatrix} \{\lambda_1\} \quad (13)$$

여기서 $[\beta_{DI}]_r = -[\beta_{II}]_r$ 그리고 $\{g_0\}_r = -\{g_1\}_r$

따라서 내력 $\{\lambda_1\}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\lambda_1\} = [\beta_{II}]_r^{-1} \{g_1\}_r \quad \text{or} \quad \{\lambda_1\} = [\beta_{ID}]_r^{-1} \{g_D\}_r \quad (14)$$

2.2 모우드변환식

2.2.1 자유경계모우드

선형 부분구조에서 자유경계모우드행렬 $[\Phi]_s$ 를 이용하면 다음과 같은 모우드변환식이 만족된다.

$$\{x\}_s = [\Phi]_s \{q\}_s \quad (15)$$

여기서 $\{q\}_s$ 는 모우드좌표 벡터이다.

식 (15)를 이용하면 비연성된 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$[M]_s \{\ddot{q}\}_s + [C]_s \{\dot{q}\}_s + [K]_s \{q\}_s = [\Phi]_s^T [\beta]_s \{\lambda_1\} + [\Phi]_s^T \{p\}_s, \quad s = r-1, r+1 \quad (16)$$

여기서

$$[M]_s = [\Phi]_s^T [m]_s [\Phi]_s, [C]_s = [\Phi]_s^T [c]_s [\Phi]_s, \\ [K]_s = [\Phi]_s^T [k]_s [\Phi]_s$$

따라서 벡터 $\{g_i\}$ 의 j 번째 강성력 g_j 는 다음과 같이 표현된다.

$$g_j = \kappa_{rj} \left(- \sum_{s=r-1, r+1} \{\beta_{1j}\}_s^T [\Phi]_s \{q\}_s \right) \times \\ \left| - \sum_{s=r-1, r+1} \{\beta_{1j}\}_s^T [\Phi]_s \{q\}_s \right|^{n_{rj} - 1} \quad (17)$$

여기서 벡터 $\{\beta_{1j}\}_s$ 는 $\{g_i\}$ 의 j 번째 강성력 g_j 에 대한 $[\beta]_i$ 의 j 번째 벡터이다.

2.2.2 고정경계모우드

입의 부분구조 s 에 대한 정적평형식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} [k_{bb}] & [k_{ba}] \\ [k_{ab}] & [k_{aa}] \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \{x_b\} \\ \{x_a\} \end{Bmatrix}_s = \begin{Bmatrix} \{p_b\} \\ \{p_a\} \end{Bmatrix}_s \quad (18)$$

여기서 $\{x_b\}$ 는 인접한 부분구조와의 연결부에 존재하는 경계자유도를 나타내며 $\{x_a\}$ 는 내부자유도를 나타낸다. 정적축약을 이용하면

$$\{x_a\}_s = [\Phi_c]_s \{x_b\}_s \quad (19)$$

이며, 여기서 식 (19)의 $[\Phi_c]_s$ 가 원하는 구속모우드행렬로 다음과 같이 주어진다.

$$[\Phi_c]_s = -[k_{aa}]_s^{-1} [k_{ab}]_s \quad (20)$$

고정경계의 정규모우드는 다음 식으로부터 유도한다.

$$[k_{aa}]_s \{ \phi_a \}_s = \omega^2 [m_{aa}]_s \{ \phi_a \}_s \quad (21)$$

식 (21)의 모우드벡터가 고정경계의 정규모우드에 대한 모우드행렬 $[\Phi_n]_s$ 의 행(column)을 구성한다.

정규모우드의 축약을 고려하고 모우드좌표계를 $\{\eta_n\}_s$ 라 하면 내부자유도는 구속모우드와 정규모우드에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{x_a\}_s = [\Phi_c]_s \{x_b\}_s + [\Phi_n]_s \{\eta_n\}_s \quad (22)$$

부분구조의 모우드좌표 벡터를 다음과 같이 정의하면

$$\{\eta_r\}_s = \begin{Bmatrix} \{\eta_b\} \\ \{\eta_n\} \end{Bmatrix}_s \quad (23)$$

다음과 같은 좌표변환식이 성립한다.

$$\{x\}_s = [\hat{\Phi}]_s \{\eta_r\}_s \quad (24)$$

여기서
$$[\hat{\Phi}]_s = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\Phi_c] & [\Phi_n] \end{bmatrix}_s$$

이며 식 (24)의 단위행렬은 다음을 의미한다.

$$\{x_b\}_s \equiv \{\eta_b\}_s \quad (25)$$

Table 2 Comparison of computation times.

Direct numerical integration method	Substructure technique							
	2 modes		4 modes		6 modes		8 modes	
	Fix	Free	Fix	Free	Fix	Free	Fix	Free
124.7 (100)	5.3 (4.25)	5.2 (4.17)	9.9 (7.94)	9.8 (7.86)	15.8 (12.7)	15.5 (12.4)	22.9 (18.4)	22.4 (18.0)

식 (24)를 이용하면 $\{\eta_r\}_s$ 에 대한 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$[\check{m}]_s \{\ddot{\eta}_r\}_s + [\check{c}]_s \{\dot{\eta}_r\}_s + [\check{k}]_s \{\eta_r\}_s = \\ [\hat{\Phi}]_s^T [\beta]_s \{\lambda_1\}_s + [\hat{\Phi}]_s^T \{p\}_s \quad (26)$$

여기서

$$[\check{m}]_s = [\hat{\Phi}]_s^T [m]_s [\hat{\Phi}]_s, [\check{c}]_s = [\hat{\Phi}]_s^T [c]_s [\hat{\Phi}]_s, \\ [\check{k}]_s = [\hat{\Phi}]_s^T [k]_s [\hat{\Phi}]_s$$

식 (26)의 $[\check{m}]_s$, $[\check{c}]_s$ 그리고 $[\check{k}]_s$ 는 대칭행렬이 아닌 일반적인 대칭행렬이므로 비연성된 운동방정식을 얻기 위해서는 고유치해석을 한번 더 수행해야 하며 $[\check{m}]_s$ 와 $[\check{k}]_s$ 로 부터 구한 모우드행렬을 $[\check{\Phi}]_s$ 라 가정하면 $\{\eta_r\}_s$ 는 새로운 모우드좌표벡터 $\{q\}_s$ 에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{\eta_r\}_s = [\check{\Phi}]_s \{q\}_s \quad (27)$$

여기서 $[\check{\Phi}]_s$ 는 $[\check{m}]_s$ 와 $[\check{k}]_s$ 로 부터 구한 모우드이다.

식 (24)와 (27)을 이용하면 $\{q\}_s$ 에 대해 비연성된 운동방정식을 식 (16)과 같이 얻을 수 있으나 이때 최종적인 모우드행렬 $[\Phi]_s$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$[\Phi]_s = [\hat{\Phi}]_s [\check{\Phi}]_s \quad (28)$$

2.3 과도응답해석

먼저 다음과 같이 각 부분구조의 모우드변위 및 속도 벡터를 상태벡터로 정의하면

$$\{y_1\}_s \equiv \{q\}_s, \{y_2\}_s \equiv \{\dot{q}\}_s \quad (29)$$

식 (16)은 다음과 같이 연속상태방정식으로 변환된다.

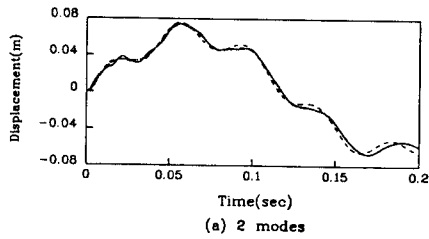
$$\{\dot{y}\}_s = [A]_s \{y\}_s + [B]_s \{u\}_s \quad (30)$$

여기서 $\{y\}_s$ 는 상태벡터, $\{u\}_s$ 는 외력과 내력으로 구성되는 하중벡터이며 $[A]_s$ 와 $[B]_s$ 는 다음과 같이 주어진다.

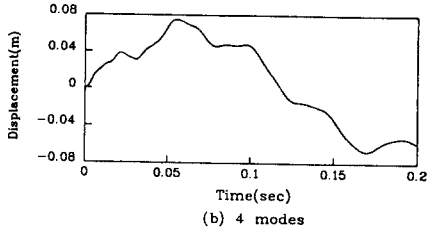
$$\{y\}_s = \begin{Bmatrix} \{y_1\}_s \\ \{y_2\}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{q\}_s \\ \{\dot{q}\}_s \end{Bmatrix}, \{u\}_s = \begin{Bmatrix} \{\lambda_1\} \\ \{p\} \end{Bmatrix}_s$$

$$[A]_s = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]_s^{-1} [K]_s & -[M]_s^{-1} [C]_s \end{bmatrix}_s,$$

$$[B]_s = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [M]_s^{-1} [\Phi]_s^T [\beta]_s & [M]_s^{-1} [\Phi]_s^T \{p\}_s \end{bmatrix}_s$$

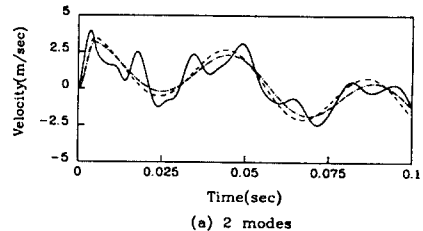


(a) 2 modes

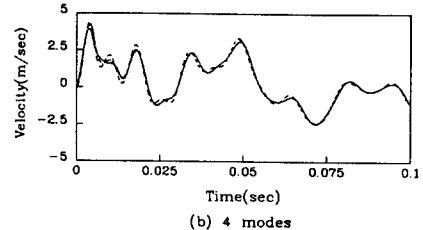


(b) 4 modes

Fig. 3 An example of displacement time histories: —, direct numerical integration method; - - - - -, fixed interface mode technique; - · - · -, free interface mode technique.



(a) 2 modes



(b) 4 modes

Fig. 4 An example of velocity time histories: —, direct numerical integration method; - - - - -, fixed interface mode technique; - · - · -, free interface mode technique.

$\{u(t)\}$ 의 모든 성분은 시간 $t_k (=k \Delta t)$ 와 t_{k+1} 사이에서 일정하다고 가정하면 수치적분을 위한 시간증분 Δt 가 주어진 경우 식 (30)은 다음과 같이 이산형태의 상태방정식 (discrete-time state equation)으로 치환된다 [7].

$$\{y(t_{k+1})\}_s = [G]_s \{y(t_k)\}_s + [H]_s \{u(t_k)\}_s \quad (31)$$

여기서 $\{y(t_k)\}_s \equiv \{y(k \Delta t)\}_s$ 이며 $[G]_s$ 와 $[H]_s$ 는 다음과 같이 무한시리즈전개로 표현할 수 있다.

$$[G]_s = e^{[A]_s \Delta t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[A]_s^j \Delta t^j}{j!}, \quad [A]_s^0 = [I]$$

$$[H]_s = \left(\int_0^{\Delta t} e^{[A]_s t} dt \right) [B]_s \quad (32)$$

식 (31)을 각각의 상태벡터에 대해 분리하여 나타내면 다음과 같으며

$$\begin{Bmatrix} \{q(t_{k+1})\} \\ \{\dot{q}(t_{k+1})\} \end{Bmatrix}_s = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \\ [G_{21}] & [G_{22}] \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \{q(t_k)\} \\ \{\dot{q}(t_k)\} \end{Bmatrix}_s + \begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \{\lambda_1(t_k)\} \\ \{p(t_k)\} \end{Bmatrix}_s \quad (33)$$

임의 시간 t_k 에서 경계면에 작용하는 독립적인 내력을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\lambda_1(t_k)\} = [\beta_{II}]_r^{-1} \{g_I(t_k)\}_r \quad (34)$$

여기서 $\{g_I(t_k)\}_r$ 의 j 번째 성분은 식 (17)과 같이 주어진다.

3. 수치예제

제시한 시간영역해석법의 수치해석시 해의 정확도와 계산 효율성 그리고 각 부분구조에서 고려하는 모드수의 수를 달리했을 때 응답에 미치는 영향 등을 고찰하기 위하여 Fig. 2에 제시한 비선형 유한요소모델에 대해 수치해석을 실시하였다.

시간응답은 Newmark의 직접적분법으로 구한 엄밀해와 부분구조의 축약된 모드를 사용한 근사해를 각각 구하여 근사해의 상대적인 정확성과 소요되는 계산시간을 비교하였다. 시간응답에서 해의 정확성은 최대응답과 시간이력(time history)을 이용하여 판별하며 근사해는 선형 부분구조에서 모드수의 수를 2, 4, 6, 8로 변화시키며 구하였다.

Fig. 3에서 Fig. 5는 각각 부분구조의 모드 수를 2, 4, 6으로 변화시키며 구한 근사해와 직접적분법으로 구한 엄밀해의, 부분구조 1의 절점 6에서 Y-방향의 변위, 속도 그리고 가속도의 시간응답을 나타낸 것이다. 각각의 시간응답에서 실선은 직접적분법으로 구한 엄밀해이며 점선과 일점쇄선은 각각 고정 및 자유경계모드를 이용하여 구한 근사해이다.

Table 1은 근사해의 정확성을 나타낸 것으로 근사해의 엄밀해에 대한 상대적인 정확성은 관심있는 시간영역내에서 최대응답의 차의 상대적인 비로 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{Error} = \frac{\max |x_g(t_k)_{ex}| - \max |x_g(t_k)_{app}|}{\max |x_g(t_k)_{ex}|} \times 100 \quad (35)$$

여기서 $x_g(t_k)$ 는 엄밀해이며 $x_g(t_k)_{app}$ 는 근사해이다.

Fig. 3은 부분구조의 모드 수를 증가시키며 구한 변위응답을 나타낸 것이다. Fig. 3에서 보듯이 선형 부분구조에서 2개 이상의 모드를 고려하면 근사해의 변위응답은 엄밀해와 매우 유사함을 볼 수 있다. 그러나 Fig. 4와 Fig. 5에서 보듯이 부분구조의 모드 수에 따라 근사해의 속도와 가속도응답은 엄밀해와 비교하면 현저히 차이를 볼 수 있다. 즉 선형 부분구조에서 2개의 저차모드만을 사용한 경우에, 변위의 최대응답의 상대적인 오차는 사용하는 모드수에 따라 약 1% 정도이나 속도와 가속도의 경우에는 최대응답의 상대적인 오차가 10-30% 정도로 매우 큰 차이가 나며 시간응답도 Fig. 4와 Fig. 5

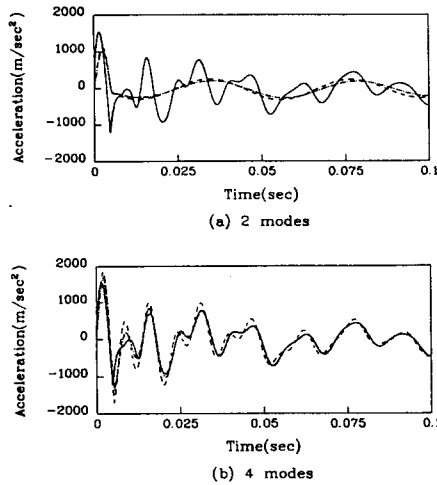


Fig. 5 An example of acceleration time histories: ———, direct numerical integration method; - - - - -, fixed interface mode technique; - · - · -, free interface mode technique.

에서 보듯이 엄밀해와 전혀 다른 것을 볼 수 있다. 선형 부분구조에서 4개의 저차모우드를 사용한 경우에는 변위의 최대응답의 상대적인 오차는 자유경계모우드를 사용한 경우에 0.03%에 불과하며 변위의 시간응답도 엄밀해와 아주 잘 일치한다. 그러나 속도의 최대응답의 오차는 고정경계모우드를 사용한 경우에 11.25%이며 가속도의 경우에는 18.66% 정도로 다소 최대값에서 차이가 있으나 전체적인 시간응답의 형태는 엄밀해와 거의 같음을 볼 수 있다. 선형 부분구조에서 6개 또는 8개의 저차모우드를 사용한 경우에는 변위, 속도 그리고 가속도의 시간응답은 엄밀해와 거의 같으며 응답의 최대값과 전체적인 시간응답의 형태면에서 고찰하면 만족할 만한 결과라고 할 수 있다.

Table 2는 직접적분법 및 제시한 방법으로 0.2 sec까지의 응답을 구하는데 소요되는 계산시간을 나타낸 것이다. Table 2에서 보듯이 2개의 저차모우드를 사용한 경우에는 제시한 방법은 직접적분법에 비해 계산시간이 불과 4%에 불과하며 4개의 모우드를 사용한 경우에는 8% 그리고 6개 및 8개의 모우드를 사용한 경우에도 12%와 18%에 불과하다. 따라서 변위응답에만 관심이 있는 경우에는 최대변위의 상대적인 오차를 0.57% 정도로 유지하며 직접적분법에 비해 불과 4% 정도의 계산시간으로 만족할만한 결과를 얻을 수 있다. 또한 가속도응답에 관심이 있는 경우에도 최대가속도의 상대적인 오차를 6% 이내로 유지하며 직접적분법에 비해 불과 18%의 계산시간으로 원하는 결과를 얻을 수 있음을 볼 수 있다. 이상의 결과에서 보듯이 본 연구에서 제시한 응답해석법은 국부 비선형 구조물의 시간응답을 매우 정확히 그리고 매우 효율적으로 구할 수 있음을 알 수 있다.

4. 결론

부분구조의 모우드와 라그랑지 승수기법을 이용하여 전체계를 나타내는 운동방정식을 구성하지 않고도 국부 비선형 구조물의 동적응답해석을 수행할 수 있는 새로운 방법을 제시하였다. 제시한 시간영역해석법은 상태전이 행렬과 이산형태의 상태방정식을 이용하므로 반복적인 계산과정이 필요치 않으며 수식전개가 매우 간단한 장점이 있다. 본 방법을 간단한 비선형 유한요소모델에 적용하여 제시한 방법이 수치해의 정확도 뿐만 아니라 수치계산의 효율면에서 매우 우수함을 보였으며 그 효율성은 자유도가 많은 대형 구조물의 동적해석의 경우에 더욱 증대할 것으로 예상된다.

참고문헌

- [1] Bathe, K. J., Bolourchi, S., Ramaswamy, S., and Snyder, M. D., "Some computational capabilities for nonlinear finite element analysis," *Journal of Nuclear Engineering and Design*, **46**, pp. 429-455, 1978.
- [2] Nickell, R. E., "Nonlinear dynamics by mode superposition," *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **7**, pp. 107-129, 1976.
- [3] Chiang, I. F. and Noah, S. T., "A convolution approach for the transient analysis of locally nonlinear rotor systems," *ASME Journal of Applied Mechanics*, **57**, pp. 731-737, 1990.
- [4] Clough, R. W. and Wilson, E. L., "Dynamic analysis of large structural systems with local nonlinearities," *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **22**, pp. 59-85, 1980.
- [5] Tongue, B. H. and Dowell, E. H., "Component mode analysis of nonlinear, nonconservative systems," *ASME Journal of Applied Mechanics*, **50**, pp. 204-209, 1983.
- [6] Yee, Eric K. L. and Tsuei, Y. G., "Transient responses via modal synthesis technique," *7th International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, Nevada, pp. 22-28, 1989.
- [7] Kim, H. K. and Park, Y. S., "An efficient response analysis method for a nonlinear/parameter changing system using substructure modes," to appear in *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1993.