

내부공진을 가진 원판의 조합공진응답의 안정성 해석

⁰이 원 경*

김 철 흥**

Stability Analysis of Combination Resonance Responses of a Circular Plate with Internal Resonance

Won Kyoung Lee

Cheol Hong Kim

1. 서 론

고정경계를 가진 구조물이 운동할 때에는 중간평면의 신장을 수반하게 된다. 이 신장에 기인한 기하학적 비선형성은 운동의 진폭이 증가함에 따라 구조물의 동적 응답에 미치는 영향이 심각하게 되어 선형해석만으로 계의 응답특성을 규명하는 데는 한계가 있으므로 고정경계를 가지는 보나 평판과 같은 연속계의 진동응답해석을 위해서는 비선형해석이 요구된다. 한편 비선형 다자유도 진동계에서는 잘 알려진 바와 같이 고유진동수끼리 특별한 관계를 가질 때에는 내부공진이라는 현상이 발생하여 그 응답 특성이 매우 복잡한데 최근에 많은 연구자들이 이 내부공진을 가진 구조물의 진동해석을 연구해 오고 있다.⁽¹⁻⁸⁾

예를 들자면 Nayfeh 등⁽¹⁾의 연구에 뒤이어, Lee와 Soh⁽²⁾는 내부공진을 가진 보의 강제진동해석을 위하여 두 모드 사이의 하나의 내부공진과 세 모드사이의 두 개의 내부공진을 각각 고려하였는데 두 경우의 해석 결과 사이에는 별다른 차이점이 없으므로 드러나 더 많은 모드를 해석과정에 포함시킨다고 해서 더 나은 근사결과를 보장하는 것이 아님을 보여 주었다.⁽²⁾ Lee와 Ghah⁽³⁾은 두 모드 근사로서 보의 흡인영역을 구하여 정상상태응답이 초기조건에 어떻게 의존하고 있는 지를 보여 주었다. 또한 Nayfeh와 그의 동료들은⁽⁴⁻⁷⁾ 고정경계를 가진 원판의 축대칭 진동응답 해석을 위하여 내부공진($\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$)과 주공진($\Omega \approx \omega_1, \omega_2, \omega_3$)을 고려하여 결국 Hopf 분기가 발생함을 발견하였다. 김철흥과 이원경⁽⁸⁾은 같은 원판의 강제진동해석을 위하여 조합공진($\Omega \approx 2\omega_1 + \omega_2$)을 고려하여 가진진폭이 증가함에도 불구하고 모든 공진응답의 진폭이 감소함을 발견하였다. 그러나 안정성 해석을 하지 않아 어느 공진응답이 실제로 가능한 응답인 지를 확인할 수 없었다.

본 연구에서는 위의 연구⁽⁸⁾에다가 자율상미분방정식의 Jacobian 행렬의 고유치를 조사함으로써 정상상태의 공진응답에 대한 안정성 해석을 추가하였다. 이 작업을 통하여 실제의 응답은 어떠한 형태로 모습을 드러내는 지를 확인함으로써 내부공진을 가진 원판의 강제진동응답 특성을 더 잘 이해하기 위한 기틀을 마련하였다.

2. 운동 방정식과 정상상태응답

본 논문에서는 편의상 많은 방정식을 참고문헌⁽⁷⁾로부터 옮겨다 사용하기로 한다. 독자께서는 더 자세한 내용을 위해서 해당 참고 문헌을 참고하시길 바란다. 참고문헌⁽⁷⁾으로부터 원판의 축대칭 운동방정식 (15)를 옮겨오면 다음과 같다.

$$\frac{d^2 \phi_n}{dt^2} + \omega_n^2 \phi_n = \varepsilon [-2c_n \frac{d\phi_n}{dt} + \sum_{m, p, q=1}^{\infty} \Gamma_{mpq} \phi_m \phi_p \phi_q] + f_n(t) \quad (1)$$

여기서

$$c_n = \int_0^1 cr \phi_n dr,$$

$$f_n(t) = \int_0^1 r \phi_n f(r, t) dr,$$

$\Gamma_{mpq} =$

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \phi_p' \phi_q' J_1(\xi_k r) dr \int_0^1 \phi_n' \phi_m' J_1(\xi_k r) dr}{(\xi_k^2 - 1 + \nu^2) J_1^2(\xi_k)}$$

여기서 $\varepsilon = [12(1 - \nu^2)]h^2/R^2$ (여기서 ν, h, R 는 각각 Poisson 비, 원판의 두께 그리고 반경이다), $c_n, \Gamma_{mpq}, f_n(t) = 2K_n \cos \Omega t$ 는 각각 작은 무차원 매개변수, 감쇠계수, 비선형 계수(부족), 가진력을 나타내며 일반화 좌표 ϕ_n 은 Galerkin

* 영남대학교 기계공학과 (정회원)

** 영남대학교 대학원 정밀기계공학과

방법을 이용하기 위하여 사용한 변형

$$w(r, t; \varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(t; \varepsilon) \varphi_m(r) \quad (2)$$

의 시간종속 함수(time dependent function)이며 식 (2)의 φ_m 은 공간종속 함수(space dependent function)로서 다음의 고유치 문제를로부터 구할 수 있는 고유함수이다,

$$\begin{aligned} \nabla^4 \phi_m - \omega_m^2 \phi_m &= 0 \\ \phi_m(1) &= 0, \quad \phi_m'(1) = 0, \quad \phi_m(0) < \infty \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 ω_m 은 원판의 고유진동수로서 이 고유치 문제를 풀면 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 10.2, \quad \omega_2 = 39.8, \\ \omega_3 &= 89.1, \quad \omega_4 = 158.2, \quad \omega_5 = 247.0 \end{aligned} \quad (4)$$

이 고유진동수 사이에는 내부공진조건 $\omega_1 + 2\omega_2 \approx \omega_3$ 가 성립함을 알 수 있는데 이탈변수를 사용하여 이 조건을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\omega_1 + 2\omega_2 = \omega_3 + \varepsilon \sigma_1 \quad (5)$$

이 내부공진조건은 세 개의 모드를 포함하고 있으며 $\varepsilon \sigma_1 = 0.6538$ 이다.

본 연구에서는 조합공진 즉 $\Omega \approx 2\omega_1 + \omega_2$ 인 경우만 고려하므로 이탈변수를 이용하여 다음과 같이 조합공진조건을 표현한다.

$$\Omega = 2\omega_1 + \omega_2 + \varepsilon \sigma_2 \quad (6)$$

이제 두 공진조건 (5), (6)과 근사해법으로서 다중시간법을 사용하면 공진응답에 대한 다음의 비자율 상미분방정식(nonautonomous ordinary differential equations)을 얻게 된다.

$$\omega_1(a_1' + c_1 a_1) + Q a_2^2 a_3 \sin \mu_1 + \frac{1}{2} F a_1 a_2 \sin \mu_2 = 0 \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 a_1 \beta_1' + \frac{1}{8} a_1 \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}^2 + Q a_2^2 a_3 \cos \mu_1 + H_{11} a_1 \\ + \frac{1}{2} F a_1 a_2 \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\omega_2(a_2' + c_2 a_2) + 2Q a_1 a_2 a_3 \sin \mu_1 + \frac{1}{4} F a_1^2 \sin \mu_2 = 0 \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 a_2 \beta_2' + \frac{1}{8} a_2 \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}^2 + 2Q a_1 a_2 a_3 \cos \mu_1 + H_{22} a_2 \\ + \frac{1}{4} F a_1^2 \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (7d)$$

$$\omega_3(a_3' + c_3 a_3) - Q a_1 a_2^2 \sin \mu_1 = 0 \quad (7e)$$

$$\omega_3 a_3 \beta_3' + \frac{1}{8} a_3 \sum_{j=1}^{\infty} a_{3j}^2 + Q a_1 a_2^2 \cos \mu_1 + H_{33} a_3 = 0 \quad (7f)$$

$$8Q = Q_1$$

$$\mu_1' = \beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3 + \varepsilon \sigma_1 t \quad (8a)$$

$$\mu_2' = 2\beta_1 + \beta_2 - \varepsilon \sigma_2 t \quad (8b)$$

여기서 '은 εt 에 대한 미분을 나타낸다. a_n 과 β_n ($n=1, 2, 3$)은 공진응답의 n 번째 모드의 진폭과 위상차이며 4번 째 이상의 고차모드의 진폭($a_n, n \geq 4$)은 시간이 충분히 지나면 소멸되는 진폭으로서, 이 연구에서는 초기상태로부터 시간이 충분히 지나고 난 후의 해에만 관심이 있으므로 논의에서 제외하기로 한다. 여기서 식 (7a, c, e)를 관찰하면 다음과 같은 두 경우의 정상상태 공진응답($a_1' = a_2' = a_3' = 0$)이 존재함을 알 수 있다. 즉 (I) $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ 인 정상상태 응답과 (II) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 인 정상상태 응답이다.

$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ 을 가정하여 정리하면 식 (7)과 (8)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_1' = -c_1 a_1 - \frac{Q}{\omega_1} a_2^2 a_3 \sin \mu_1 - \frac{1}{2\omega_1} F a_1 a_2 \sin \mu_2 \quad (9a)$$

$$a_2' = -c_2 a_2 - \frac{2Q}{\omega_2} a_1 a_2 a_3 \sin \mu_1 - \frac{1}{4\omega_2} F a_1^2 \sin \mu_2 \quad (9b)$$

$$a_3' = -c_3 a_3 + \frac{Q}{\omega_3} a_1 a_2^2 \sin \mu_1 \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} \beta_1' = -\frac{1}{8\omega_1} \sum_{j=1}^3 a_{1j}^2 - \frac{Q}{\omega_1 a_1} a_2^2 a_3 \cos \mu_1 - \frac{H_{11}}{\omega_1} \\ - \frac{1}{2\omega_1} F a_2 \cos \mu_2 \end{aligned} \quad (9d)$$

$$\begin{aligned} \beta_2' = -\frac{1}{8\omega_2} \sum_{j=1}^3 a_{2j}^2 - \frac{2Q}{\omega_2} a_1 a_3 \cos \mu_1 - \frac{H_{22}}{\omega_2} \\ - \frac{1}{4\omega_2} F a_1^2 \cos \mu_2 \end{aligned} \quad (9e)$$

$$\beta_3' = -\frac{1}{8\omega_3} \sum_{j=1}^3 a_{3j}^2 - \frac{Q}{\omega_3 a_3} a_1 a_2^2 \cos \mu_1 - \frac{H_{33}}{\omega_3} \quad (9f)$$

$$\mu_1' = \beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3 + \sigma_1 \quad (10a)$$

$$\mu_2' = 2\beta_1 + \beta_2 - \sigma_2 \quad (10b)$$

식 (9d, e, f)을 식 (10)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$a_1' = -c_1 a_1 - \frac{Q}{\omega_1} a_2^2 a_3 \sin \mu_1 - \frac{1}{2\omega_1} F a_1 a_2 \sin \mu_2 \quad (11a)$$

$$a_2' = -c_2 a_2 - \frac{2Q}{\omega_2} a_1 a_2 a_3 \sin \mu_1 - \frac{1}{4\omega_2} F a_1^2 \sin \mu_2 \quad (11b)$$

$$a_3' = -c_3 a_3 + \frac{Q}{\omega_3} a_1 a_2^2 \sin \mu_1 \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} \mu_1' = \sigma_1 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{a_{3n}}{\omega_3} - \frac{2a_{2n}}{\omega_2} - \frac{a_{1n}}{\omega_1} \right) a_n^2 \\ + Q \left(\frac{a_1 a_2^2}{\omega_3 a_3} - \frac{4a_1 a_3}{\omega_2} - \frac{a_2^2 a_3}{\omega_1 a_1} \right) \cos \mu_1 \\ + \left(\frac{H_{33}}{\omega_3} - \frac{2H_{22}}{\omega_2} - \frac{H_{11}}{\omega_1} \right) - F \left(\frac{a_1^2}{2\omega_2 a_2} + \frac{a_2}{2\omega_1} \right) \cos \mu_2 \end{aligned} \quad (11d)$$

$$\begin{aligned} \mu_2' = & -\sigma_2 - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{2a_{1n}}{\omega_1} + \frac{\sigma_{2n}}{\omega_2} \right) a_n^2 \\ & - 2Q \left(\frac{a_1^2}{\omega_1 a_1} + \frac{a_1}{\omega_2} \right) a_3 \cos \mu_1 - \left(\frac{2H_{11}}{\omega_1} + \frac{H_{22}}{\omega_2} \right) \\ & - F \left(\frac{a_2}{\omega_1} + \frac{a_1^2}{4\omega_2 a_2} \right) \cos \mu_2 \end{aligned} \quad (11e)$$

진폭 a_n 과 위상 μ_n 에 대한 자율 상미분방정식(autonomous ordinary differential equations)인 식 (11)로부터 $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ 인 정상상태 응답($a_1' = a_2' = a_3' = \mu_1' = \mu_2' = 0$)에 대한 다음의 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\omega_1 c_1 a_1 + Q a_2^2 a_3 \sin \mu_1 + \frac{1}{2} F a_1 a_2 \sin \mu_2 = 0 \quad (12a)$$

$$\omega_2 c_2 a_2 + 2Q a_1 a_2 a_3 \sin \mu_1 + \frac{1}{4} F a_1^2 \sin \mu_2 = 0 \quad (12b)$$

$$\omega_3 c_3 a_3 - Q a_1 a_2^2 \sin \mu_1 = 0 \quad (12c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{a_{3n}}{\omega_3} - \frac{2a_{2n}}{\omega_2} - \frac{a_{1n}}{\omega_1} \right) a_n^2 \\ + Q \left(\frac{a_1 a_2^2}{\omega_3 a_3} - \frac{4a_1 a_3}{\omega_2} - \frac{a_2^2 a_3}{\omega_1 a_1} \right) \cos \mu_1 \\ + \left(\frac{H_{33}}{\omega_3} - \frac{2H_{22}}{\omega_2} - \frac{H_{11}}{\omega_1} \right) \\ - F \left(\frac{a_1^2}{2\omega_2 a_2} + \frac{a_2}{2\omega_1} \right) \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (12d)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{2a_{1n}}{\omega_1} + \frac{\sigma_{2n}}{\omega_2} \right) a_n^2 \\ + 2Q \left(\frac{a_2^2}{\omega_1 a_1} + \frac{a_1}{\omega_2} \right) a_3 \cos \mu_1 \\ + F \left(\frac{a_2}{\omega_1} + \frac{a_1^2}{4\omega_2 a_2} \right) \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (12e)$$

참고문헌 (7)의 식 (16b)와 (20)을 이용하면 정상상태에서 일반화 좌표는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_n = \begin{cases} a_n \cos(\omega_n t + \beta_n) + 2A_n \cos(\Omega t) + O(\varepsilon), & n = 1, 2, 3 \text{ 일 때} \\ 2A_n \cos(\Omega t) + O(\varepsilon), & n \geq 4 \text{ 일 때} \end{cases} \quad (13)$$

여기서

$$\beta_n = \varepsilon \beta_n' t + \tau_n, \quad n = 1, 2, 3 \quad (14)$$

$$A_n = \frac{K_n}{\omega_n^2 - \Omega^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

식 (14)의 τ_n 은 초기조건에 의해 결정되는 적분상수이다.

식 (13)~(15)를 식 (2)에 대입하고 정리하면 정상상태에서의 변형을 얻는다.

$$w(r, t) = w_\sigma(r, t) + w_{nr}(r, t) + O(\varepsilon) \quad (16)$$

여기서

$$w_\sigma(r, t) = \sum_{n=1}^3 a_n \cos[(\omega_n + \varepsilon \beta_n')t + \tau_n] \varphi_n(r) \quad (17)$$

$$w_{nr}(r, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(r) \cos \Omega t \quad (18)$$

변형 w_σ 는 조합공진응답(combination resonance response) a_n , β_n ($n=1, 2, 3$)에 기인하므로 조합공진변형(combination resonance deflection)이라고 부르기로 한다. 정상상태에서 a_n 과 β_n 은 상수이므로 $\omega_n + \varepsilon \beta_n'$ 은 ω_n 과 거의 같은 불변진동수(constant frequency)이다. 따라서 w_σ 는 세 고유진동모드의 조합과 흡사한 변형을 나타낸다. 한편 변형 w_{nr} 는 가진력의 진동수 Ω 와 같은 진동수를 가지는 변형으로서 Ω ($\approx 2\omega_1 + \omega_2$)가 고유진동수 ω_n 의 근방에 있지 않기 때문에 그리 크지 않은 A_n 즉 비공진응답(nonresonance response)에 기인하므로 비공진 변형(nonresonance deflection)이라고 부르기로 한다. 정상상태의 공진응답이 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 인 경우에는 이 비공진변형이 바로 변형 $w(r, t)$ 임을 유념해야 한다. 다른 말로 설명하자면 이 비공진 변형이 선형계의 강제진동응답(가진력의 진동수와 같은 진동수를 가지는 응답)으로서 선형해석에서는 이 변형만을 얻게 된다.

3. 안정성 해석

3.1 $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ 인 정상상태 공진응답

이 정상상태 응답은 자율상미분방정식 (11)의 평형해(equilibrium solution) 즉 $a_1' = a_2' = a_3' = \mu_1' = \mu_2' = 0$ 인 대수방정식을 만족하는 a_{10} , a_{20} , a_{30} , μ_{10} , μ_{20} 를 의미한다. 이 평형해의 안정성을 결정하기 위하여 이 평형해로부터의 작은 교란에 대한 거동을 조사하기 위하여 다음과 같이 둔다.

$$\begin{aligned} a_1 = a_{10} + \delta a_1, \quad a_2 = a_{20} + \delta a_2, \quad a_3 = a_{30} + \delta a_3, \\ \mu_1 = \mu_{10} + \delta \mu_1, \quad \mu_2 = \mu_{20} + \delta \mu_2 \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 첨자 0는 정상상태를 나타내고 $\delta(\cdot)$ 는 이 평형해로부터의 작은 교란을 나타낸다. 식 (19)를 자율 상미분방정식 (11)에 대입하고 δa_1 , δa_2 , δa_3 , $\delta \mu_1$, $\delta \mu_2$ 에 대해 Taylor 급수전개한 후 선형항만을 취하면 다음을 얻게 된다.

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \\ \delta \mu_1 \\ \delta \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & \Phi_{45} \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \Phi_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \\ \delta \mu_1 \\ \delta \mu_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

여기서

$$\phi_{11} = -c_1 - \frac{F}{2\omega_1} a_{20} \sin \mu_{20}$$

$$\phi_{12} = -\frac{2Q}{\omega_1} a_{20} a_{30} \sin \mu_{10} - \frac{F}{2\omega_1} a_{10} \sin \mu_{20}$$

$$\phi_{13} = -\frac{Q}{\omega_1} a_{20}^2 \sin \mu_{10}$$

$$\phi_{14} = -\frac{Q}{\omega_1} a_{20}^2 a_{30} \sin \mu_{10}$$

$$\phi_{15} = -\frac{F}{2\omega_1} a_{10} a_{20} \sin \mu_{20}$$

$$\phi_{21} = -\frac{2Q}{\omega_2} a_{20} a_{30} \sin \mu_{10} - \frac{F}{2\omega_2} a_{10} \sin \mu_{20}$$

$$\phi_{22} = -c_2 - \frac{2Q}{\omega_2} a_{10} a_{30} \sin \mu_{10}$$

$$\phi_{23} = -\frac{2Q}{\omega_2} a_{10} a_{20} \sin \mu_{10}$$

$$\phi_{24} = -\frac{2Q}{\omega_2} a_{10} a_{20} a_{30} \cos \mu_{10}$$

$$\phi_{25} = -\frac{F}{4\omega_2} a_{10}^2 \cos \mu_{20}$$

$$\phi_{31} = \frac{Q}{\omega_3} a_{20}^2 \sin \mu_{10}$$

$$\phi_{32} = \frac{2Q}{\omega_3} a_{10} a_{20} \sin \mu_{10}$$

$$\phi_{33} = -c_3$$

$$\phi_{34} = \frac{Q}{\omega_3} a_{10} a_{20}^2 \cos \mu_{10}$$

$$\phi_{35} = 0$$

$$\begin{aligned} \phi_{41} = & \frac{1}{4} \left(\frac{a_{31}}{\omega_3} - \frac{2a_{21}}{\omega_2} - \frac{a_{11}}{\omega_1} \right) a_{10} \\ & + Q \left(\frac{a_{20}^2}{\omega_3 a_{30}} - \frac{4a_{30}}{\omega_2} + \frac{a_{20}^2 a_{30}}{\omega_1 a_{20}^2} \right) \cos \mu_{10} \\ & - \frac{F}{\omega_2 a_{20}} a_{10} \cos \mu_{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{42} = & \frac{1}{4} \left(\frac{a_{32}}{\omega_3} - \frac{2a_{22}}{\omega_2} - \frac{a_{12}}{\omega_1} \right) a_{20} \\ & + Q \left(\frac{2a_{10} a_{20}}{\omega_3 a_{30}} + \frac{2a_{20} a_{30}}{\omega_1 a_{10}} \right) \cos \mu_{10} \\ & - F \left(\frac{1}{2\omega_2} - \frac{a_{10}^2}{2\omega_1 a_{20}^2} \right) \cos \mu_{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{43} = & \frac{1}{4} \left(\frac{a_{33}}{\omega_3} - \frac{2a_{23}}{\omega_2} - \frac{a_{13}}{\omega_1} \right) a_{30} \\ & - Q \left(\frac{a_{10} a_{20}^2}{\omega_3 a_{30}^2} + \frac{4a_{10}}{\omega_2} + \frac{a_{20}^2}{\omega_1 a_{10}} \right) \cos \mu_{10} \end{aligned}$$

$$\phi_{44} = -Q \left(\frac{a_{10} a_{20}^2}{\omega_3 a_{30}} - \frac{4a_{10} a_{30}}{\omega_2} - \frac{a_{20}^2 a_{30}}{\omega_1 a_{10}} \right) \sin \mu_{10}$$

$$\phi_{45} = F \left(\frac{a_{10}^2}{2\omega_2 a_{20}} + \frac{a_{20}}{2\omega_1} \right) \sin \mu_{20}$$

$$\phi_{51} = -\frac{1}{4} \left(\frac{2a_{11}}{\omega_1} + \frac{a_{21}}{\omega_2} \right) a_{10}$$

$$-2Q \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{a_{20}^2}{\omega_1 a_{10}^2} \right) a_{30} \cos \mu_{10}$$

$$- \frac{F}{2\omega_2 a_{20}} a_{10} \cos \mu_{20}$$

$$\phi_{52} = -\frac{1}{4} \left(\frac{2a_{12}}{\omega_1} + \frac{a_{22}}{\omega_2} \right) a_{20}$$

$$-2Q \left(\frac{2a_{20}}{\omega_1 a_{10}} \right) a_{30} \cos \mu_{10}$$

$$-F \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{a_{10}^2}{4\omega_2 a_{20}^2} \right) \cos \mu_{20}$$

$$\phi_{53} = -\frac{1}{4} \left(\frac{2a_{13}}{\omega_1} + \frac{a_{23}}{\omega_2} \right) a_{30}$$

$$-2Q \left(\frac{a_{20}^2}{\omega_2 a_{10}} + \frac{a_{10}}{\omega_2} \right) \cos \mu_{10}$$

$$\phi_{54} = 2Q \left(\frac{a_{20}^2}{\omega_1 a_{10}} + \frac{a_{10}}{\omega_2} \right) a_{30} \sin \mu_{10}$$

$$\phi_{55} = F \left(\frac{a_{20}}{\omega_1} + \frac{a_{10}^2}{4\omega_2 a_{20}} \right) \sin \mu_{20}$$

여기서 계수값 Q, F, a_{ij} 등은 부록에 나타나 있다.

식 (20)의 행렬은 각각의 평행해에서 구한 것으로서 상수 행렬이며 이 행렬의 모든 고유치의 실수부가 음이면 해당 평행해는 안정한 나선 평형점(stable spiral point)을 나타내므로 해당 정상상태응답은 점근적으로 안정하다고 간주한다.

3.2 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 인 정상상태 공진응답

자율 상미분방정식 (11)은 $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ 를 가정하여 구한 것이므로 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 인 정상상태 공진응답은 엄밀한 의미에서 이 자율 상미분방정식의 평형해가 아니다. 따라서 식 (20)의 행렬을 이용하여 안정성을 판정할 수는 없다. 결국 $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ 이지만 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ 이 매우 작은 초기조건에서 출발한 자율상미분방정식 (11)의 해가 시간이 충분히 지남에 따라 a_1, a_2, a_3 모두가 0으로 접근하는가를 확인함으로써 안정성 판정을 대신하였다. 그 결과 매개변수의 값에 관계없이 이 정상상태응답이 안정함을 확인하였다.

4 수치결과

$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ 인 정상상태 공진응답을 구하기 위하여 식 (12)를 Newton-Raphson 법을 이용하여 수치적으로 풀었다. Fig. 1에서는 감쇠계수 $\varepsilon c_1 = \varepsilon c_2 = \varepsilon c_3 = 0.01$ 이고 가진진폭 $B = 7000$ 인 경우에 정상상태 공진응답을 이탈변수 $\varepsilon \sigma_2$ 의 함수

로 나타내었다. 이 그림에서 실선은 안정한 응답을, 점선은 불안정한 응답을 나타낸다. $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ 인 응답은 쌍으로 나타나는데 진폭이 큰 응답(upper branch response)은 안정하며 진폭이 작은 응답(lower branch response)은 불안정한 것으로 판정되었다. 이 응답의 a_1 과 a_2 는 이탈변수가 증가함에 따라 증가하며 a_3 는 거의 0에 가까움을 알 수 있다. 따라서 이 a_3 는 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 인 안정한 응답에 거의 겹쳐 있지만 자세히 관찰하면 a_1, a_2 와 거의 비슷한 거동을 나타냄을 알 수 있다. 결국 $\epsilon \sigma_2$ 가 0.19 보다 작으면 안정한 응답이 하나로서 이 때는 비공진응답이 원판의 거동을 전적으로 지배하며 $\epsilon \sigma_2$ 가 0.19보다 크면 안정한 응답이 두 개로서 충분히 시간이 지나고 난 후의 응답은 전적으로 초기조건에 달려 있다. Fig. 2에서는 감쇠계수가 $\epsilon c_1 = \epsilon c_2 = \epsilon c_3 = 0.01$ 이고 이탈변수 $\epsilon \sigma_2 = 1.0$ 인 경우에 정

상상태 공진응답을 가진진폭 B의 함수로 나타내었다. 가진진폭 B가 증가함에 따라 $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ 인 응답의 진폭이 감소한다는 점을 제외하면 Fig. 1에서와 비슷한 설명을 할 수 있다. 가진진폭이 증가함에도 불구하고 공진응답의 모든 진폭이 감소하는 현상은 비선형계에서도 매우 특이한 현상으로서 더 많은 조사가 필요한 부분이라고 생각한다. Fig. 3에서는 감쇠계수가 $\epsilon c_1 = \epsilon c_2 = \epsilon c_3 = 0.01$ 이고 가진진폭 B가 7000인 경우에 비공진응답을 이탈변수 $\epsilon \sigma_2$ 의 함수로 나타내었다. 여기서 $2\Lambda_1$ 과 $2\Lambda_2$ 은 감소하는데 반하여 $2\Lambda_3$ 는 증가함을 보여주고 있는데 이것은 $\Omega (= 2\omega_1 + \omega_2 + \epsilon \sigma_2)$ 가 ω_1 과 ω_2 를 지나서 ω_3 를 향하고 있음을 의미한다. Fig. 4에서는 감쇠계수가 $\epsilon c_1 = \epsilon c_2 = \epsilon c_3 = 0.01$ 이고 $\epsilon \sigma_2 = 1.0$ 인 경우에 비공진응답을 가진진폭 B의 함수로 나타내었다. 여기서 모든 진폭이 가진진폭 B에 비해

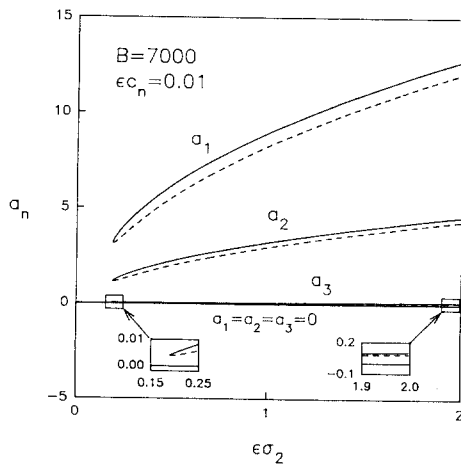


Fig. 1 Variation of steady-state combination resonance responses with the external detuning parameter

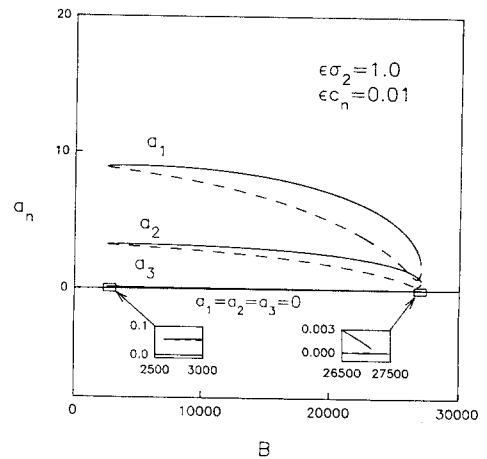


Fig. 2 Variation of steady-state combination resonance responses with the excitation amplitude

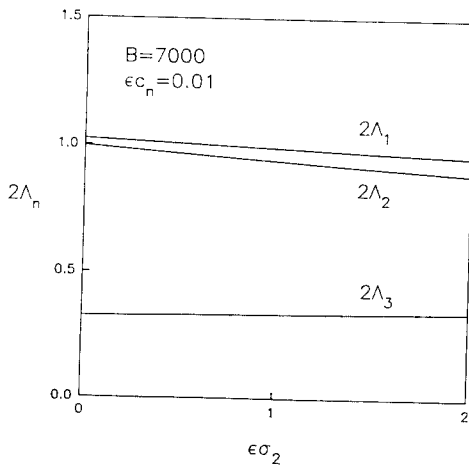


Fig. 3 Variation of nonresonance responses with the external detuning parameter

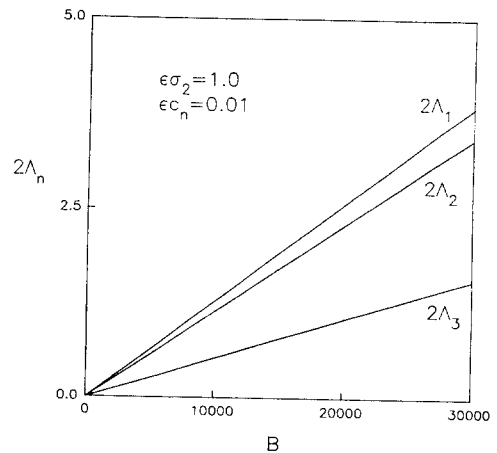


Fig. 4 Variation of nonresonance responses with the excitation amplitude

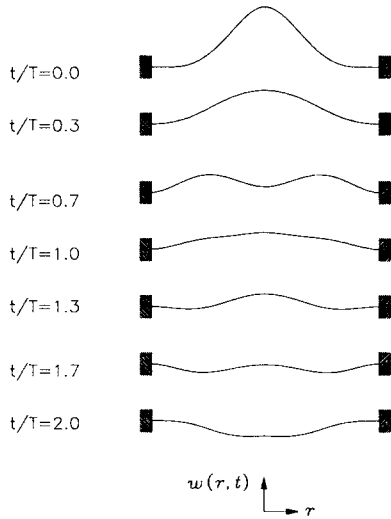


Fig. 5 Total deflection curves of the circular plate for two periods of the excitation

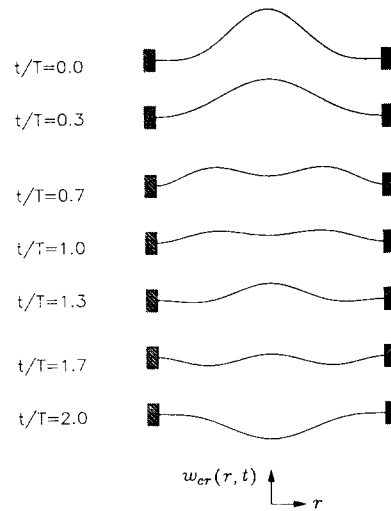


Fig. 6 Combination resonance deflection curves of the circular plate for two periods of the excitation

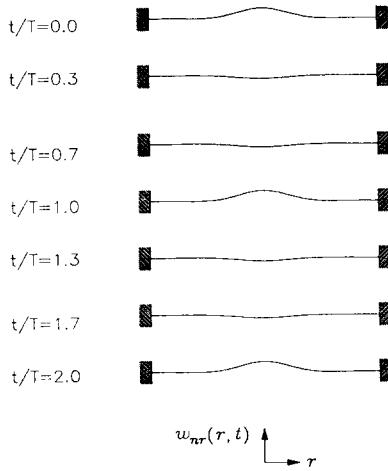


Fig. 7 Nonresonance deflection curves of the circular plate for two periods of the excitation

함을 보여주고 있는데 바로 이점이 비공진응답이 선형계의 강제 진동응답임을 말해 주고 있다. Fig. 5 ~ Fig. 7은 감쇠계수가 $\epsilon c_1 = \epsilon c_2 = \epsilon c_3 = 0.01$, 가진진폭 $B=7000$, 이탈변수 $\epsilon \sigma_2 = 1.0$ 인 경우에 정상상태에 도달한 후 가진진폭 ($T = 2\pi/\Omega$)의 두 배 동안의 원판의 전체 변형, 조합공진 변형, 비공진 변형을 각각 나타내고 있다. Fig. 7은 비공진 변형의 주기가 T 임을 보여주고 있다. 또한 전체 변형에 비공진 변형이 기여가 적음을 알 수 있다.

5. 결론

내부공진($\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$)을 가진 원판의 조합공진($\Omega \approx 2\omega_1 + \omega_2$)응답의 안정성을 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 모든 진폭이 ($a_1 = a_2 = a_3 = 0$)인 공진응답은 매개변수의 값

에 관계없이 안정하다.

(2) 모든 진폭이 0이 아닌 ($a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$) 공진응답은 쌍으로 존재하는데 진폭이 큰 응답(upper branch)은 안정하나 진폭이 작은 응답(lower branch)는 불안정하다.

(3) 모든 진폭이 0이 아닌 공진응답이 존재하지 않는 경우에는 선형계와 마찬가지로 모든 진폭이 0인 공진응답(결과적으로 비공진 응답)이 계의 응답을 지배하지만 모든 진폭이 0이 아닌 공진응답이 존재하는 경우에는 안정한 공진응답이 2개이므로 초기조건이 실제의 응답을 결정하게 된다.

부 록

1. 비선형 계수값들

$$\Gamma_{mpq} = \frac{\sum_{k=1}^3 \int_0^1 \phi'_p \phi'_q J_1(\xi_k r) dr \int_0^1 \phi'_n \phi'_m J_1(\xi_k r) dr}{(\xi_k^2 - 1 + \nu^2) J_1^2(\xi_k)}, \quad n, m, p, q = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{1111} &= -54.08, \\ \Gamma_{1112} = \Gamma_{1121} = \Gamma_{1211} = \Gamma_{2111} &= -46.72, \\ \Gamma_{1113} = \Gamma_{1131} = \Gamma_{1311} = \Gamma_{3111} &= 16.75, \\ \Gamma_{1122} = \Gamma_{2211} &= -291.79, \\ \Gamma_{1123} = \Gamma_{1132} = \Gamma_{2311} = \Gamma_{3211} &= -122.69, \\ \Gamma_{1133} = \Gamma_{3311} &= -691.41, \\ \Gamma_{1212} = \Gamma_{2221} = \Gamma_{2112} = \Gamma_{2121} &= -75.07, \\ \Gamma_{1213} = \Gamma_{2331} = \Gamma_{2131} = \Gamma_{1312} &= \\ &= \Gamma_{1321} = \Gamma_{2133} = \Gamma_{3112} = \Gamma_{3121} = -17.50, \\ \Gamma_{1222} = \Gamma_{2112} = \Gamma_{2121} = \Gamma_{2122} &= -337.80, \\ \Gamma_{1223} = \Gamma_{1232} = \Gamma_{2123} = \Gamma_{2132} &= \\ &= \Gamma_{2312} = \Gamma_{2321} = \Gamma_{3212} = \Gamma_{3221} = -261.73, \\ \Gamma_{1313} = \Gamma_{1331} = \Gamma_{3113} = \Gamma_{3131} &= -65.51, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1233} &= \Gamma_{2133} = \Gamma_{3312} = \Gamma_{3321} = -803.03, \\
\Gamma_{1322} &= \Gamma_{2213} = \Gamma_{2231} = \Gamma_{3122} = -33.28, \\
\Gamma_{1323} &= \Gamma_{1332} = \Gamma_{2313} = \Gamma_{2331} \\
&= \Gamma_{3123} = \Gamma_{3132} = \Gamma_{3213} = \Gamma_{3231} = -195.12, \\
\Gamma_{1333} &= \Gamma_{3133} = \Gamma_{3313} = \Gamma_{3331} = -141.32, \\
\Gamma_{2222} &= -1850.80, \\
\Gamma_{2223} &= \Gamma_{2232} = \Gamma_{2322} = \Gamma_{3222} = -1175.07, \\
\Gamma_{2233} &= \Gamma_{3223} = -4476.46, \\
\Gamma_{2323} &= \Gamma_{2332} = \Gamma_{3223} = \Gamma_{3232} = -1316.96, \\
\Gamma_{2333} &= \Gamma_{3233} = \Gamma_{3323} = \Gamma_{3332} = -3149.57, \\
\Gamma_{3333} &= -11467.80,
\end{aligned}$$

2. 식(12)에 나타난 계수값들

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= 3\Gamma_{1111} = -162.22, \\
\alpha_{12} &= 2(2\Gamma_{1212} + \Gamma_{1122}) = \alpha_{21} = -883.86, \\
\alpha_{13} &= 2(2\Gamma_{1313} + \Gamma_{1133}) = \alpha_{31} = -1644.87, \\
\alpha_{22} &= 3\Gamma_{2222} = -5552.41, \\
\alpha_{23} &= 2(2\Gamma_{2323} + \Gamma_{2233}) = \alpha_{32} = -14220.76, \\
\alpha_{33} &= 3\Gamma_{3333} = -34403.25, \\
Q_1 &= (2\Gamma_{1223} + \Gamma_{1322}) = Q_3 = -556.75 \\
Q_2 &= 2Q_1 = -1113.49
\end{aligned}$$

3. 수치예를 위해 다음과 같이 분포하중이 균일하게 작용한다고 가정한다.

$$2K_n = B \int_0^1 r \varphi_n(r) dr$$

$$\left(\frac{2K_1}{B} = 0.51, \frac{2K_2}{B} = -0.29, \frac{2K_3}{B} = 0.20 \right)$$

4. 그 밖의 상수값들

$$H_{nk} = \sum_{m,j=1}^3 (2\Gamma_{nmkj} + \Gamma_{nkmj}) A_m A_j, \quad F = \sum_{j=1}^3 (2\Gamma_{121j} + \Gamma_{112j}) A_j$$

$B = 7000$, $\varepsilon \sigma_1 = 1.0$ 인 경우에

$$H_{11} = -128.34, \quad H_{22} = -1525.18, \quad H_{33} = -3595.52, \quad F = -164.77$$

참고 문헌

- (1) Nayfeh, A. H., Mook, D. T., and Sridhar, S., 1974, "Nonlinear Analysis of the Forced Responses of Structural Elements", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 55, pp. 281-291.
- (2) Lee, W. K. and Soh, K. Y., "Nonlinear Analysis of the Forced Response of a Beam with Three Mode Interaction", *Nonlinear Dynamics*, in press
- (3) Lee, W. K., and Ghang, M. R., "Domains of Attraction of a Forced Beam by Interpolated Mapping", *ASME Journal of Applied Mechanics*, in press.
- (4) Sridhar, S., Mook, D. T., and Nayfeh, A. H., 1975, "Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates. Part I: Symmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 41, pp. 359-373.
- (5) Sridhar, S., Mook, D. T., and Nayfeh, A. H., 1978, "Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates. Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, pp. 159-170.
- (6) Nayfeh, A. H., and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, New York : John Wiley and Sons.
- (7) Hadian, J. and Nayfeh, A. H., 1990, "Modal Interaction in Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, pp. 279-292.
- (8) 김철홍, 이원경, 1992, "내부공진을 가진 원판의 비선형 강제진동해석", *대한기계학회 논문집 제16권 제11호*, pp. 2098-2110.