

미분기하학 방법을 이용한 비선형 가변구조 제어기 설계

° 합철주, 함운철
진북대학교 공과대학 전자공학과

Design of Nonlinear Variable Structure Controller using Differential Geometric Methods

° Cheol Joo Ham and Woon Chul Ham
Department of Electronic Engineering, Chonbuk National University

Abstract

In this paper we present the differential geometric approach for the analysis and design of sliding modes in nonlinear variable structure feedback systems. We also design the robust controller for the nonlinear system using variable structure control theory on the basis of differential geometric methods and feedback linearization applying Min-Max control based on the Lyapunov second method. The robustness against parameter uncertainties for robot manipulators with flexible joint is considered. Simulation results are presented and show the advantage of the proposed nonlinear control method.

1. 서론

최근에 고도의 정밀도를 요하는 비선형 시스템의 이용이 날로 증가하고 있으며, 이러한 비선형 시스템의 운용에는 정밀성, 안정성등과 같은 엄격한 제한 요소가 요구되므로 이에 대한 새로운 제어 기법의 개발이 필요하다^[1,2]. 또한 최근에 미분기하학 개념을 도입하여 가변구조 제어 이론에 대하여 재고찰하는 연구^[3,4]와 궤환 선형화에 의하여 비선형 시스템을 제어하고자 하는 연구^[4-6]가 활발히 진행중이다. 슬라이딩 모드를 갖는 가변 구조 제어 이론은 지난 30년 동안 Itkis, Utkin등의 학자에 의하여 연구, 개발되어 왔으며, 가변 구조 시스템은 불연속적인 제어 입력에 의하여 일정한 순간마다 시스템의 구조를 적절히 변화시킴으로써 제어 목적을 얻는 일종의 비선형 시스템이다. 이 이론은 다른 제어 시스템과 달리 그 구조가 제어 처리중에도 계속 변하는 특징을 가지고 있으며, 서로 다른 구조의 유용한 성질을 도입시키기 위하여 임의의 순간에 시스템의 구조를 변경시킴으로써 오랫동안 지속되지 못하는 동적인 성질을 가진 구조의 시스템인 경우에 매우 유용하다. 가변구조 제어 시스템은 높은 비선형성을 갖는 로보트 매니플레이터나 매개변수 변화나 외란이 있는 서보메카니즘에도 많이 적용되어 왔다^[7,11,12].

한편 비선형 시스템 이론의 대부분은 선형 시스템에 대한 결과를 비선형 시스템의 경우에 까지 확장시키는 방법과 비선형 좌표 변환과 궤환을 이용하여 비선형 시스템을 선형 시스템으로 변환하는 이론바 궤환 선형화 방법이다. 후자의 경우인 궤환 선형화 방법의 동기는 주어진 비선형 시스템이 궤환 선형화가 가능한 시스템이면, 이미 잘 개발된 선형 시스템 이론을 적용할 수 있다는 점에서 비롯 되었으며, 연속 시스템에 대하여는 Su, Jakubczyk와 Respondek, Hunt, Krener등이 연구하였고, 불연속 시스템에 대해서는 Grizzle, Lee와 Marcus, Jakubczyk등이 연구하였다. 조금 더 제한적으로 궤환을 사용하지 않고

비선형 좌표 변환만으로 선형화하는 문제는 Krener, Sussmann, Dayawansa, Lee등이 연구하였고 전체적 선형화는 Boothby, Cheng, Dayawansa등이 연구 하였다^[4,5]. 따라서 본 논문에서는 비선형 가변구조 궤환 시스템의 슬라이딩 모드의 설계에 있어서 미분기하학 방식을 제안하며, Lyapunov의 2차 안정도 이론에 근거한 Min-Max 제어 방법^[8-10]을 적용한 선형 궤환화 방법을 이용하여 유연한 관절을 갖는 단일 링크 로보트 매니플레이터에 적용하여 강인한 제어기를 설계하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 비선형 시스템에 대하여 미분기하학 가변구조 제어 이론에 대하여 고찰하고, 3장에서는 궤환 선형화 방법으로 Lyapunov의 2차 안정도 이론에 근거한 Min-Max 제어 방법을 이용하여 비선형 제어기를 설계한다. 4장에서는 2장의 제어 이론과 3장에서 제안한 알고리즘을 다관절 로보트 매니플레이터에 응용하기 위하여 단일 링크 로보트 매니플레이터에 적용하여 시뮬레이션을 통하여 비교하고 설계한 제어기의 타당성을 확인하며, 5장에서는 결론을 맺는다.

2. 미분기하학 가변구조 제어이론

다음과 같은 비선형 동적 시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

여기서 x 는 n 차원 R^n 의 부분 閉集合 X 의 원소, u 는 $u: R^n \rightarrow R$, f 와 g 는 모든 X 상에서 정의되는 smooth, local 벡터장이며 閉集合내의 임의의 x 에 대하여 항상 $g(x) \neq 0$ 이다.

이때 스윗칭 곡면 즉, 슬라이딩 다양체는 다음과 같이 정의한다.

$$S = \{x \in R^n : s(x) = 0\} \tag{2}$$

여기서 s 는 X 에서 경사도가 영이 아닌 smooth함수(곡면 좌표함수) $s: X \rightarrow R$ 로써 X 상의 임의의 점에서 부분적(locally)으로 正則인 $(n-1)$ 차수 sub-manifold를 나타낸다.

가변구조 제어 법칙은 다음과 같다.

$$u = \begin{cases} u^+(x), & s(x) > 0 \\ u^-(x), & s(x) < 0 \end{cases} \quad u^+ \neq u^- \tag{3}$$

여기서 u 는 x 의 smooth 함수이며, x 에 대하여 부분적으로 $u^+(x) > u^-(x)$ 라고 가정한다.

제어법칙 식(3)에 의하여 식(1)의 상태궤적은 슬라이딩 곡면 S 에 도달되도록 하며, S 에서 이경우 스윙팅 곡면 S 의 인접한 부분에서는 다음과 같이 슬라이딩 운동을 나타낸다.

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} L_{f+gu} s < 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} L_{f+gu} s > 0 \quad (4)$$

윗 식(4)를 dual product를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f+gu^+ \rangle < 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \langle ds, f+gu^- \rangle > 0 \quad (5)$$

여기서 $\langle ds, f+gu^+ \rangle = -\frac{\partial s}{\partial x} \cdot f+gu^+ = \nabla s \cdot f+gu^+$ 를 의미하

며, s 에 대한 경사도 벡터상에서 제어되는 벡터장 $f+gu^+$ 과 $f+gu^-$ 의 투영은 부호가 반대이고 곡면 S 로 향함을 알 수 있으며, 이상의 관계를 나타내면 그림 1과 같다.

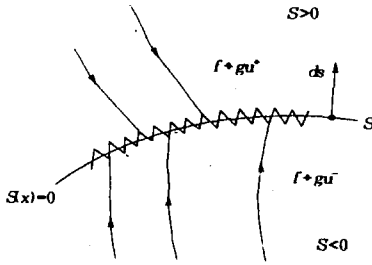


Fig. 1. Sliding regime on a switching manifold.

다음과 같은 다양체 불변성 조건을 이용하여 이상적인 슬라이딩 운동이 발생되도록 하는 Utkin등이 제안한 등가제어 입력을 유도하는 과정을 살펴보면 다음과 같다.

$$s=0, \quad L_{f+gu_{EQ}}(x) s = \langle ds, f+gu_{EQ}(x) \rangle = 0 \quad (6)$$

여기서 $u_{EQ}(x)$ 는 구하고자 하는 등가 제어 입력이며, S 가 식(1)의 local integral manifold(local invariant manifold)에 대한 smooth 궤환 제어 법칙을 의미한다.

방향 도함수를 활용하여 식(6)을 만족하도록 $u_{EQ}(x)$ 를 다음과 같이 구한다.

$$u_{EQ}(x) = -\frac{L_f s}{L_g s} = -\frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle} = -\left(\frac{\partial s}{\partial x} g\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f \quad (7)$$

한편 S 에 관련된 슬라이딩 분포 $\Delta_s(x)$ 는 $\langle ds, \Delta_s(x) \rangle = 0$ 과 같이 $T_x X$ 에 의하여 표시되는 탄젠트 공간의 부분공간으로서 모든 x 에 대하여 지정되는 mapping을 의미하며, Frobenius 정리²⁾에 의하여 completely integrable distribution이라 하고 이때 $\Delta_s(x) = \ker ds(x)$ 인 관계를 만족한다. 이를 이용하여 윗 식(6)을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$f+gu_{EQ}(x)|_{s=0} \in \ker ds(x) = \Delta_s \quad (8)$$

이때 이상적인 슬라이딩 동적 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = f+gu_{EQ}(x) = \left[I - g\left(\frac{\partial s}{\partial x} g\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] f \quad (9)$$

윗 식(9)는 슬라이딩 다양체 S 상에서 식(1)과 (3)에 의하여 제어되는 궤적의 운동에 대하여 평균값을 의미함을 알 수 있으며, 식(8)의 다양체 불변성조건을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$f+gu_{EQ}(x) = \left[I - g\left(\frac{\partial s}{\partial x} g\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] f \in \ker ds(x) = \Delta_s(x) \quad (10)$$

한편, $\text{span}(g(x))$ 의 임의의 벡터장에 대하여(즉, smooth control function인 $u(x)$ 에 대한 $g(x)u(x)$ 형태의 벡터)는 다음과 같은 식이 만족된다.

$$\begin{aligned} & \left[I - g\left(\frac{\partial s}{\partial x} g\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] g u(x) \\ &= \left[g - g\left(\frac{\partial s}{\partial x} g\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} g \right] u(x) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

이때, 행렬 $F = \left[I - g\left(\frac{\partial s}{\partial x} g\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right]$ 라 정의하면 $F^2 = F$ 의 성질을 갖게되며, 이에 대한 기하학적인 의미는 행렬 F 가 $T_x X$ 상의 임의의 벡터를 $\text{span}(g(x))$ 를 따라 Δ_s 로 투영하는 연산자임을 뜻한다. 입력 벡터장 g 의 span에서 벡터장 f 의 임의의 성분은 이상적인 슬라이딩 동적방정식에 영향을 미치지 않음을 의미하며, 슬라이딩 분포 Δ_s 를 따라서 f 의 성분만이 이 동적방정식의 특성을 결정함을 알 수 있다.

이제 S 상에서 슬라이딩 운동의 존재에 대한 필요충분 조건에 대하여 살펴본다.

[예비정리 1]

등가제어에 대한 필요충분 조건은 식(7)에서 다음과 같은 횡단성 조건(transversality condition)이 S 상에 만족하면 된다.

$$\langle ds, g \rangle \neq 0 \quad (12)$$

윗 식(12)에서 기하학적으로 벡터장 g 는 슬라이딩 분포 Δ_s 에 속하지 않음을 알 수 있다. 즉, g 는 슬라이딩 다양체 S 에 대하여 접선 방향 이외의 성분을 갖고 있으며 따라서 $\ker ds$ 를 횡단함을 알 수 있다.

[예비정리 2]

만일 슬라이딩 운동이 S 에 부분적으로 존재하면 다음과 같은 횡단성 조건이 성립한다.

$$\langle ds, g \rangle < 0 \quad (13)$$

윗 식은 $u^+(x) > u^-(x)$ 가 만족될 때의 경우이며, 만일 이 부등호가 바뀔 경우에는 $\langle ds, g \rangle > 0$ 인 관계가 성립한다.

[정리 1]

$x \in S$ 에 대한 X 에서 S 상에 슬라이딩 영역의 존재에 대한 필요충분 조건은 다음과 같다.

$$u^-(x) < u_{EQ}(x) < u^+(x) \quad (14)$$

[증명]

S 상에 슬라이딩 운동이 존재한다고 가정하면 식(5)를 이용하여 다음과 같은 식이 만족됨을 알 수 있다.

$$\langle ds, f+u^+(x)g \rangle = \langle ds, f \rangle + u^+ \langle ds, g \rangle < 0$$

식(7)과 예비정리 2에서 횡단성 조건 식(13)을 통하여 다음 식이 만족된다.

$$\frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle} + u^+ = -u_{EQ}(x) + u^+ > 0$$

한편 \$S\$ 상에 \$<ds, f+u^-(x)g>> 0\$이며 같은 방법으로 \$-u_{EQ}(x)+u^- < 0\$ 이다.

앞의 정리에서 역관계를 증명하기 위하여, \$u_{EQ}\$를 식(7)과 식(14)를 만족하는 smooth 궤환 함수라 하면 다음과 같은 식이 만족된다.

$$0 < u_{EQ}(x) - u^-(x) < u^+(x) - u^-(x)$$

이때 \$w_{EQ}(x) = \frac{(u_{EQ}(x) - u^-(x))}{u^+(x) - u^-(x)}\$ 라 정의하면 첫식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$0 < w_{EQ}(x) = \frac{(u_{EQ}(x) - u^-(x))}{u^+(x) - u^-(x)} < 1$$

앞에서 \$0 < 1 - w_{EQ}(x) < 1\$ 이므로 다음과 같은 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} <ds, f+u_{EQ}(x)g> &= w_{EQ}(x) <ds, f+u^+(x)g> + (1-w_{EQ}(x)) \\ &\quad \times <ds, f+u^-(x)g> = 0 \end{aligned}$$

이상의 관계에서 \$<ds, f+u^+(x)g>\$ 와 \$<ds, f+u^-(x)g>\$ 는 \$S\$ 상에서 부호가 반대임을 알 수 있다.

\$S\$ 의 방향은 임의이므로 \$S\$ 의 부분적인 영역에서 \$u^+(x)\$ 와 \$u^-(x)\$ 는 다음 조건이 만족할 수 있도록 선정한다.

$$<ds, f+u^-(x)g> > 0, \quad <ds, f+u^+(x)g> < 0$$

그러나 이 경우는 식(1)의 시스템에 \$u^+(x) > u^-(x)\$ 와 같은 제어법칙이 적용되는 경우이므로 각 경우를 나누어 표현하면 다음과 같은 식이 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} <ds, f+u^+(x)g> |_{s=0} &= \lim_{s \rightarrow 0} <ds, f+u^+g> = \lim_{s \rightarrow 0} L_{f,gu} s < 0, \\ <ds, f+u^-(x)g> |_{s=0} &= \lim_{s \rightarrow 0} <ds, f+u^-g> = \lim_{s \rightarrow 0} L_{f,gu} s > 0 \end{aligned}$$

즉, 이 경우 \$S\$ 상에 슬라이딩 영역이 존재한다. \$\square\$

만일 \$u^+ < u^-\$ 이라고 가정하면, 식(14)에서 \$u^-(x) > u_{EQ}(x) > u^+(x)\$ 가 만족되도록 \$u_{EQ}(x)\$ 를 선정하여야 한다. 이상을 종합하여 불대역 Utkin이 제안한 방법과 같이 슬라이딩 모드의 존재 조건은 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\min\{u^+(x), u^-(x)\} < u_{EQ}(x) < \max\{u^+(x), u^-(x)\} \quad (15)$$

\$S\$ 상에서 슬라이딩 운동이 일어날 수 있도록 하기 위하여 제어 입력은 다음과 같이 선정한다.

$$u = -k |u_{EQ}(x)| \operatorname{sat}\left(\frac{s(x)}{\epsilon}\right), \quad k > 1, \epsilon > 0 \quad (16)$$

여기서 \$\operatorname{sat}(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x), & |x| > 1 \\ x, & |x| \leq 1 \end{cases}\$ 이다.

슬라이딩 다양체 \$S\$ 에서 슬라이딩 영역이 존재하기 위한 필요충분 조건을 Lyapunov 함수 후보 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$2s < ds, f+gu> = <ds^2, f+gu> = L_{f,gu} s^2 < 0 \quad (17)$$

첫 식(17)은 슬라이딩 다양체 \$S\$ 의 부분적인 영역에서 성립되어야 하며 따라서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\lim_{\substack{|s| \rightarrow 0 \\ s \neq 0}} L_{f,gu} s^2 < 0$$

3. 비선형 궤환 선형화 제어기 설계

앞 장에서는 미분기하학 방법을 이용하여 비선형 가변구조 제어기를 설계하였다. 본 장에서는 새로운 상태 \$z\$ 와 새로운 입력 \$v\$ 를 이용하여 비선형 시스템의 출력 \$z\$ 가 선형 시스템이 되도록 하는 비선형 좌표 변환 \$z = T(x)\$ 와 궤환 법칙 \$u = \alpha(x) + \beta(x)v\$ 의 존재 조건과 이때 좌표변환 \$z = T(x)\$ 와 궤환법칙에 대하여 고찰하고 비선형 궤환 선형화 제어기를 설계한다.

앞 장의 식 (1)과 같은 단일 입력 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

여기서 local 벡터장 \$f, g\$ 는 \$\mathbb{R}^n\$ 의 smooth 벡터장이며 이때 \$f(0) = 0\$ 인 원점을 포함한 \$\mathbb{R}^n\$ 의 開集合 \$\Omega\$ 상에서 정의된다.

[정의 1] pair \$(f, g)\$ 는 diffeomorphic 상태 좌표변환

$$z = T(x), \quad T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (18)$$

이 존재하고, \$\Omega\$ 에서 \$\alpha(0) = 0, \beta(x) \neq 0\$ 인 다음과 같은 비선형 궤환함수

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (19)$$

가 존재하면 \$\Omega\$ 에서 부분적으로 궤환 선형화가 가능하다. 이때 외부 입력 \$v\$ 를 갖는 변환된 페루프 시스템은 다음과 같은 Brunovsky controllable canonical form인 선형 시불변 시스템으로 표현할 수 있다.

$$\dot{z} = Az + bv \quad (20)$$

비선형 시스템이 부분적으로 궤환 선형화 가능한 필요충분 조건은 다음 두 식(21-22)과 같다^[12]

$$\operatorname{span}\{g, \operatorname{ad}_f(g), \operatorname{ad}_f^2(g), \dots, \operatorname{ad}_f^{n-1}(g)\} = T_x \Omega \quad (21)$$

분포

$$\operatorname{span}\{g, \operatorname{ad}_f(g), \dots, \operatorname{ad}_f^{n-2}(g)\} \quad (22)$$

가 full rank \$n-1\$ 인 상수차수이며 \$\Omega\$ 에서 involutive (completely integrable)하다.

다음과 같은 편미분 방정식의 해에서 원하는 좌표변환 \$z = T(x) = (z_1, z_2, \dots, z_n)\$ 를 구한다.

$$L_{\operatorname{ad}_f^i} g z_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (23)$$

이때 변환 벡터 \$T\$ 의 다른 성분은 다음과 같이 구한다.

$$z_{i+1} = L_f z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (24)$$

Frobenius 정리^[2]와 식(22)의 완전한 적분 가능성의 가정에 의하여 미분방정식 식(23)의 시스템에 대한 해가 존재함을 알 수 있다.

이제 매개변수 불확실성(계산상의 오차, 미지의 외란, 모델 단순화등)이 존재할 경우에도 잘 적용할 수 있는 강인한 제어를 설계하고자 한다.

식(19)의 입력에 의하여 식(18)과 같은 좌표변환 후의 시스템은 이상적인 형태로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= v - \beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] \end{aligned} \quad (25)$$

윗 식(25)에서 매개변수 불확실성을 고려하면 식(19)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u = \hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)v \quad (26)$$

이때 inner loop control u 는 수치적으로 실현되므로 오차(계산상의 반올림, 지연등)가 존재할 수 있다. 또한 $\alpha(x), \beta(x)$ 는 시스템 매개변수(질량, 관성모멘트등)의 함수이므로 이러한 변수들에서 발생하는 임의의 불확실성이 $\hat{\alpha}(x), \hat{\beta}(x)$ 에 영향을 줄 수 있다.

제어법칙 식(26)을 식(25)에 대입하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \beta^{-1}(x) [\hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)v - \alpha(x)] \\ &= v + \eta(z_1, \dots, z_n, v) \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 불확실성 η 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\eta(z_1, \dots, z_n, v) = \{(\hat{\beta}^{-1}\hat{\beta} - 1)v + \hat{\beta}^{-1}(\hat{\alpha} - \alpha)\} |_{s=T^{-1}(x)} \quad (28)$$

앞의 식(27)을 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{z} = Az + b(v + \eta(z, v)) \quad (29)$$

여기서 $A: n \times n$, $b: n \times 1$, $v \in \mathbb{R}$, $\eta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 이다.

식(29)에서 $\eta \neq 0$ 일때면 비선형 성분을 내포하고 있으므로 outer loop control v 가 시스템 행렬 A 의 극배치를 위하여 선형 상태 궤환 $v = -k^T z$ 가 되도록 설계하여도 $A - bk^T$ 의 특성에 의하여 안정도를 보장할 수 없다. 그러나, 식(29)에서 비선형성은 $b\eta$ 의 형태이므로 입력의 영역 공간에 놓여 있음을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서는 매칭조건^[10]을 이용하여 불확실성이 존재할 경우에도 원하는 제어의 목적을 달성할 수 있는 궤환 선형화 입력 v 를 설계한다.

윗 식(29)에서 불확실성 η 는 미지이지만, 다음 관계를 만족하는 스칼라 함수 $\rho(z, t)$ 를 찾는다.

$$\|\eta(z, v)\| \leq \rho(z, t) \quad (30)$$

식(30)에서 ρ 는 v 와 무관하므로 이 조건을 만족할 수 있는 ρ 를 찾게 되면 식(30)의 조건하에서 η 가 유한한 범위내에서 v 가 식(29)의 안정도를 보장할 수 있음을 알 수 있다.

outer loop 제어법칙은 다음과 같이 설계한다.

$$v = -k^T z + \Delta v \quad (31)$$

여기서 $k^T z$ 는 원하는 영역에서 $A - bk^T$ 의 특성근을 배치하기 위하여 설계된 선형 궤환이득이다.

식(31)을 식(29)에 대입하여 달리 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{z} = \bar{A}z + b(\Delta v + \bar{\eta}(z, \Delta v)) \quad (32)$$

여기서 \bar{A} 는 Hurwitz이고, $\bar{\eta}(z, \Delta v)$ 는 다음과 같다.

$$\bar{\eta}(z, \Delta v) = \eta(z, -k^T z + \Delta v) \quad (33)$$

이제 제어기 설계는 전체 시스템의 안정도를 보장할 수 있도록 식(32)에서 Δv 를 선정하면 된다.

이때 \bar{A} 가 Hurwitz이므로 $n \times n$ symmetric, positive definite matrix Q 를 선정하고 P 는 다음과 같은 Lyapunov 방정식에 대한 unique positive definite symmetric 해이다.

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} + Q = 0 \quad (34)$$

outer loop 제어 Δv 는 다음 조건을 만족하도록 선정한다.

$$\Delta v = \begin{cases} -\rho(z, t) \frac{b^T P z}{\|b^T P z\|}, & \|b^T P z\| \neq 0 \\ 0, & \|b^T P z\| = 0 \end{cases} \quad (35)$$

윗 식(35)에서 Lyapunov 함수 후보를 $V(z) = z^T P z$ 라 선정하면 점근적으로 안정하다.

[증명]

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= z^T P \dot{z} + z^T P \dot{z} \\ &= z^T (\bar{A}^T P + P\bar{A})z + 2z^T P b(\Delta v + \bar{\eta}) \\ &= -z^T Q z + 2z^T P b(\Delta v + \bar{\eta}) \end{aligned}$$

여기서 상수 2를 무시하고 두번째 항을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$b^T P z (\Delta v + \bar{\eta})$$

이때 $b^T P z = 0$ 이면 0이 되므로 $\dot{V} = -z^T Q z < 0$ 이고, $b^T P z \neq 0$ 이면 $\Delta v = -\rho \frac{b^T P z}{\|b^T P z\|}$ 가 되므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} &b^T P z \left(-\rho \frac{b^T P z}{\|b^T P z\|} + \bar{\eta}\right) \\ &= -\rho \frac{(b^T P z)^T (b^T P z)}{\|b^T P z\|} + (b^T P z)^T \bar{\eta} \\ &\leq -\rho \|b^T P z\| + \|b^T P z\| \cdot \|\bar{\eta}\| \\ &= \|b^T P z\| (-\rho + \|\bar{\eta}\|) \leq 0 \end{aligned}$$

따라서 $\|\bar{\eta}\| \leq \rho$ 이므로 초기 $z=0$ 에서 총체적 점근적 안정하며 $\dot{V} < 0$ 임을 알 수 있다. \square

앞의 식(35)의 제어법칙은 스위칭 평면상에서 불연속 제어입력으로서 채터링을 발생하므로 본 논문에서는 스위칭 평면 부근에 경계층을 설정하여 불연속 제어를 유연하게 스위칭하므로써 채터링 문제를 개선한다.

$$\Delta v = \begin{cases} -\rho(z,t) \frac{b^T P z}{\|b^T P z\|}, & \|b^T P z\| \geq \varepsilon \\ -\rho(z,t) \frac{b^T P z}{\varepsilon}, & \|b^T P z\| < \varepsilon \end{cases}, \quad \varepsilon > 0 \quad (36)$$

윗 식에서 초기조건 $z(t_0) = z_0$ 인 시스템 (29)의 해 $z(t)$ 는 제어법칙 (36)을 이용하여 uniformly ultimately bounded함을 알 수 있다.

[증명]

$\|b^T P z\| \geq \varepsilon$ 이면 $\|\Delta v\| = \rho$ 이고, $\|b^T P z\| < \varepsilon$ 이면 $\|\Delta v\| = \frac{\rho}{\varepsilon} \|b^T P z\| < \rho$ 이다.

이때 다음과 같은 Lyapunov함수 후보를 선정하여 V 을 구한다.

$$V(z) = z^T P z$$

$$\begin{aligned} V &= -z^T Q z + 2z^T P b (\Delta v + \bar{\eta}) \\ &= -z^T Q z + 2(b^T P z)^T (\Delta v + \bar{\eta}) \\ &\leq -z^T Q z + 2(b^T P z)^T (\Delta v + \rho \frac{b^T P z}{\|b^T P z\|}) \end{aligned}$$

$\|b^T P z\| < \varepsilon$ 에 대하여 두번째 항은 다음과 같다.

$$2(b^T P z)^T \left(-\frac{\rho}{\varepsilon} b^T P z + \rho \frac{b^T P z}{\|b^T P z\|} \right)$$

여기서 $\|b^T P z\| = \frac{\varepsilon}{2}$ 일때 $\varepsilon \frac{\rho}{2}$ 의 최대값을 가지므로 $z^T Q z > \frac{\varepsilon}{2} \rho$ 이면 다음을 구한다.

$$V \leq -z^T Q z + \frac{\varepsilon}{2} \rho < 0$$

다음 관계

$$\lambda_{\min}(Q) \|z\|^2 \leq z^T Q z \leq \lambda_{\max}(Q) \|z\|^2$$

에서

$$\lambda_{\min}(Q) \|z\|^2 > \frac{\varepsilon}{2} \rho \quad \text{또는} \quad \|z\| \geq \sqrt{\frac{\varepsilon \rho}{2\lambda_{\min}(Q)}} \quad \text{이면} \\ V < 0 \text{이다.} \quad \square$$

4. 시뮬레이션 및 결과

본장에서는 2장과 3장에서 고찰한 이론의 타당성을 검증하기 위하여 그림 2와 같이 관절이 유연한 단일 링크 매니퓰레이터를 고려한다. 직류전동기 actuator와 회전축에 대하여 관성 J 인 강체 링크로 연결된 탄성 기어를 갖는 단일 회전 관절로 구성되어 있다. 기어에 관련된 탄성은 stiffness 계수 k 인 비틀림 스프링으로서 모델링하고 x_1 은 링크의 각 위치, x_3 는 전동기 샤프트의 각 위치를 나타내며 시뮬레이션에서 다분 도보트 매니퓰레이터의 각종 파라미터는 표1과 같다.

Table 1. Parameters used for simulation

파라미터	수치	단위
m	1	Kg
k	10	N-m
l	1	m
g	9.8	m/sec ²
l	1	N-m-sec ²
J	1	N-m-sec ²

마찰을 무시하면 동력학은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} I \ddot{q}_1 + mgl \sin q_1 + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ J \ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u \end{aligned} \quad (37)$$

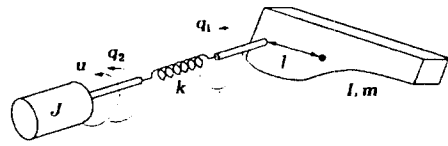


Fig. 2. Single-link robot with joint flexibility.

이때 x_1 은 링크의 각 위치, x_3 는 전동기 샤프트라 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x_3 = \frac{dx_1}{dt}, \quad x_4 = \frac{dx_3}{dt}$$

이때 상태 벡터를 다음과 같이 표현한다.

$$x = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2]^T$$

이래와 같은 상태 방정식에서 벡터장 f 와 g 를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mgl}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k}{J} (x_1 - x_3) + \frac{1}{J} u \end{aligned}$$

$$f(x) = [x_2 \quad -\frac{mgl}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \quad x_4 \quad \frac{k}{J} (x_1 - x_3)]^T$$

$$g(x) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{J}]^T$$

[방법 1] 미분기하학 가변구조 제어기 설계

제어입력은 앞의 식(16)과 같이 정하며 이때 $k=10$, $\varepsilon=0.01$ 로 선정한다. 슬라이딩 곡면은 앞의 식(2)와 식(6)에 의하여 다음과 같이 선정한다.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : s = \sum_{i=1}^3 c_i x_i + x_4 = 0 \right\}$$

위의 관계에서 다음을 구할 수 있다.

$$s = 0, \quad L_{f^*} g_{\text{und}}(x) s = \langle ds, f^* g_{\text{und}}(x) \rangle = \frac{ds}{dt} = 0$$

$$x_4 = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - c_3 x_3$$

여기서 상수 계수 c_1, c_2, c_3 는 모든 i 에 대하여 $c_i > 0$ 이며 $c_2 c_3 > c_1$ 이 되도록 선정하여 이상적인 슬라이딩 궤적이 점근적으로 안정한 운동이 보장되도록 $c_1 = 1, c_2 = 5, c_3 = 1, c_4 = 1$ 로 선정한다. 초기조건을 $x_1(0) = 0.4, x_3(0) = 0.3$ 로 정하였을 경우 이때의 상태 x_1, x_2, x_3, x_4 와 제어 입력 u , 동가 제어 입력 u_{EO} 를 나타내면 그림 3과 같다.

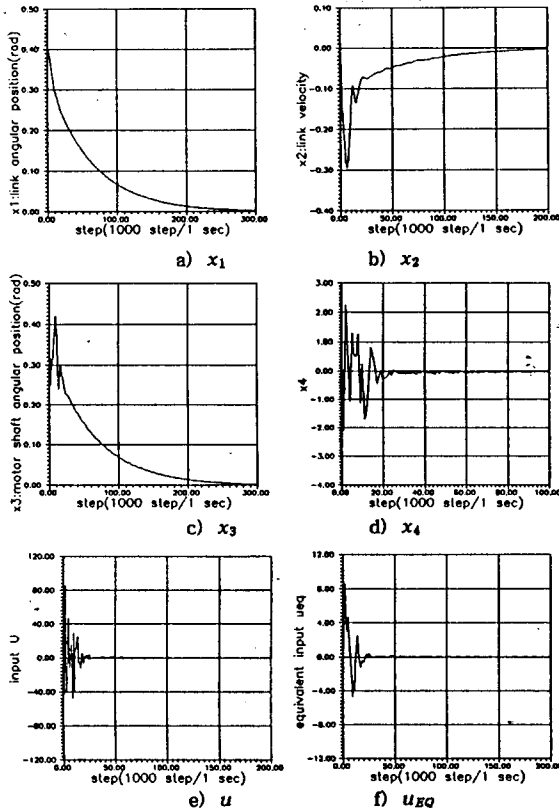


Fig. 3. State x_1, x_2, x_3, x_4 , input u and equivalent control input u_{eq}

[방법 2] 궤환 선형화 제어기 설계

이 시스템의 궤환선형화에 대한 필요충분 조건은 다음과 같다.

$$\text{rank}[g, ad_f g, ad_f^2 g, ad_f^3 g] = 4$$

$$[g \quad ad_f g \quad ad_f^2 g \quad ad_f^3 g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{bmatrix}$$

여기서 $k > 0, I, J < \infty$ 에 대하여 rank 4이며 벡터장 $\{g, ad_f(g), ad_f^2(g)\}$ 은 상수이고 involutive 집합이므로 식(37)의 시스템은 입력 상태 선형화가 가능하다.

이제 상태 변환 $z = T(x)$ 와 입력 변환 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ 를 이용하여 입력 상태 선형화를 만족하도록 한다.

새로운 상태 벡터 z 의 첫번째 성분 T_1 은 다음 관계가 있다.

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0$$

따라서 T_1 은 x_1 만의 함수이므로 이에 대하여 해를 구하고 전체적 상태 좌표변환은 diffeomorphism에 의하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1 = x_1 \\ z_2 &= T_2 = \langle dT_1, f \rangle = x_2 \\ z_3 &= T_3 = \langle dT_2, f \rangle = -\frac{mgl}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \\ z_4 &= T_4 = \langle dT_3, f \rangle = -\frac{mgl}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I} (x_2 - x_4) \end{aligned}$$

u 를 구하는 과정은 다음과 같다.

$$u = \frac{1}{\langle dT_4, g \rangle} (v - \langle dT_4, f \rangle)$$

윗 식 u 를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$u = \frac{IJ}{k} (v - a(x)) = \beta(x)v + a(x)$$

여기서 $a(x)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{mgl}{I} \sin x_1 (x_2^2 + \frac{mgl}{I} \cos x_1 + \frac{k}{I}) \\ &\quad + \frac{k}{I} k (x_1 - x_3) (\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{mgl}{I} \cos x_1) \end{aligned}$$

앞에서의 상태와 입력 변환의 결과로부터 선형 방정식의 관계는 다음과 같다.

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = v$$

상태 변환의 역변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= z_2 \\ x_3 &= z_1 + \frac{I}{k} (z_3 + \frac{mgl}{I} \sin z_1) \\ x_4 &= z_2 + \frac{I}{k} (z_4 + \frac{mgl}{I} z_2 \cos z_1) \end{aligned}$$

앞의 식(31)에서 특성 다항식 $P(s) = (s+5)^4$ 로 선정하고 언형 궤환 이득 k 를 구하면 다음과 같다.

$$k = [625 \quad 500 \quad 150 \quad 20]^T$$

식(34)에서 행렬 Q 는 identity로 선정하였으며 이때 P 를 구하면 다음과 같다.

$$p_{41} = 0.0008, \quad p_{42} = 0.16404, \quad p_{43} = 0.13024, \quad p_{44} = 0.031512$$

Δv 는 식(36)에서 구하며 $\rho = 1, \varepsilon = 0.01$ 로 선정하였으며 초기조건을 $x_1(0) = 0.4, x_3(0) = 0.3$ 로 정하였을 경우의 상태 x_1, x_2, x_3, x_4 , 제어입력 u 를 그림 4에 나타내었다. 이때 표1과 동일한 변수값을 사용하였으나, 불확실한 변수가 존재하는 경우를 고려하여 $I=20, m=1.5$ 라 설정하고 시뮬레이션하여 비교하였다. 그림 4에서 실선은 불확실한 변수가 존재하지 않는 경우를 나타내며 점선은 불확실한 변수가 존재하는 경우를 나타낸다.

參考文獻

- [1] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, 1991.
- [2] Boothby, W. M., *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*. New York: Academic Press, 1975.
- [3] Hebertt Sira-Ramirez, "Nonlinear Variable Structure Systems in Sliding Mode: The General Case," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 34, no.11, Nov., 1989.
- [4] H. G. Lee, A. Arapostathis and S. I. Marcus, "Linearization of Discrete-Time Systems," *Int. J. Control*, 1987, vol. 45, no. 5, 1803-1822.
- [5] L. R. Hunt, Renjeng Su, and George Meyer, "Global Transformations of Nonlinear Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-28, no.1, Jan., pp. 24-31, 1983.
- [6] M. W. Spong, "Modeling and Control of Elastic Joint Robots," *Trans. ASME, Journal of Dyn. Sys., Meas., and Cont.*, vol. 109, pp. 310-319, December, 1987.
- [7] U. Itkis, *Control Systems of Variable Structure*, J. Wiley and Sons Inc., New York, 1976.
- [8] M. J. Corless and G. Leitmann, "Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-26, no. 5, pp. 1139-1144, 1981.
- [9] Leitmann, G., "On the Efficacy of Nonlinear Control in Uncertain Linear Systems," *Trans. ASME, Journal of Dyn. Sys., Meas., and Cont.*, vol. 102, p.95-102, June, 1981.
- [10] S. Gutman, "Uncertain Dynamical Systems Lyapunov Min-Max Approach," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 24, pp. 437-443, 1979.
- [11] Hakan Elamali and Nejat Olgac, "Robust Output Tracking Control of Nonlinear MIMO Systems via Sliding Mode Technique," *Automatica*, vol. 28, no.1, pp. 145-151, 1992.
- [12] Sunil K. Singh, "Decentralized variable structure control for tracking in nonlinear systems," *Int. J. Control*, vol. 52, no. 4, pp. 811-831, 1990.
- [13] Woon-chul Ham and Ju-Jang Lee, "Adaptive Nonlinear Control of One-Link Flexible Arm," *Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Yokohama, Japan July vol. 1*, pp. 3-7, 26-30, 1993.
- [14] 함철주, 함운철, "불확실 비선형 다변수 시스템에 대한 Min-Max 가변 구조 제어기 설계," *대한전자공학회의 논문지*, vol. 29-B, no. 12, pp. 64-73, 1992.

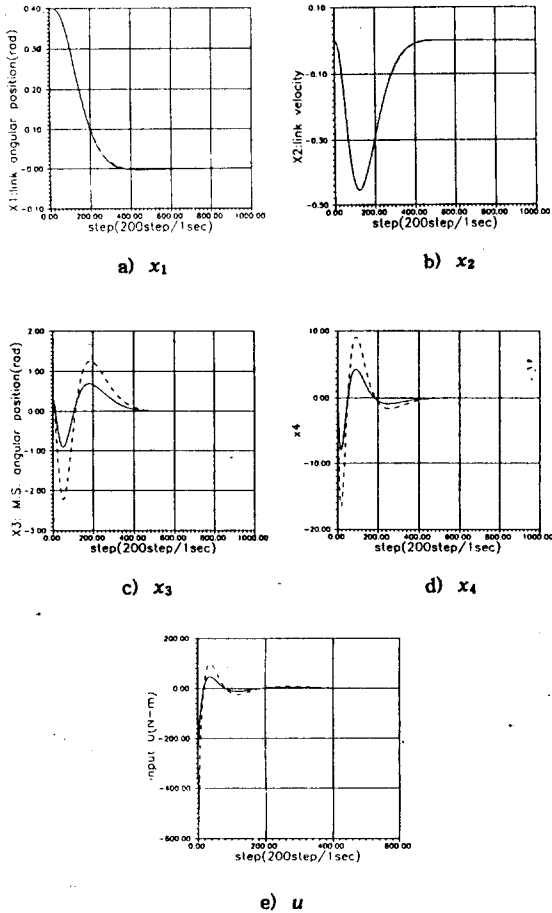


Fig. 4. State x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , input u and new input v

그림 3에서 제안한 알고리즘에 의하여 스위칭 라인이 적절함을 알 수 있으며, 그림 3과 4에서 오차가 빠르게 0으로 수렴하고 채터링이 적게 발생함을 알 수 있으며, 불확실한 변수가 존재할 경우에도 강한한 제어가 수행됨을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 가변구조 제어이론과 Min-Max 제어이론의 구조적으로 유사한 개념을 이용하여 제어기를 설계하였으며, 이를 응용하기 위한 새로운 제어 방법을 제시하였다. 이 새로운 방법을 적용하여 가변구조 제어 방법 적용시 발생하는 채터링의 문제를 효과적으로 개선 하였다. 시스템의 비선형 요소를 보상할 수 있는 비선형 제어 방법을 제시하였으며, 제안된 새로운 제어 방법은 매개 변수의 불확실성이 존재할 경우에도 강인하고 빠른 과도 응답을 나타냄을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 확인할 수 있었다. 제안한 제어 방법은 간단하여서 실시간 제어가 가능하며, 확인한 결과를 고정밀도를 요하는 다관절 로봇 매니퓰레이터의 제어기 설계 기법으로 적용 및 응용이 가능하리라 기대된다. 지금까지의 슬라이딩 모드 제어는 스위칭 평면이 선형함수이므로 반응속도가 상대적으로 느린바, 앞으로 비선형 시스템에 대한 가변구조 제어 적용시 다항식을 갖는 비선형 스위칭 평면에 대한 연구가 진행되어져야 하겠다.