

주파수 영역에서 다변수 학습제어기의 설계

° 김원철*, 조진원**, 이광순*

* 서강대학교 공과대학 화학공학과, ** (주) 태평양 S.F.부

Design of Multivariable Learning Controller in Frequency Domain

° Won Cheol Kim*, Jin Weon Cho**, Kwang Soon Lee*

Dept. Chem. Eng., Sogang Univ.

* System Engineering Div. Pacific Corp.

ABSTRACT

A multivariable learning control is designed in frequency domain. A general form of feedback assisted learning scheme is considered and an inverse model based learning algorithm is derived through convergence analysis in frequency domain. Performance of the proposed control method is evaluated through numerical simulation.

1. 서론

학습제어기는 같은 작업을 반복적으로 수행하는 최분식 공정에 유용한 제어방법이다. 선형 또는 비선형 시스템에 대해 과거 작업의 제어기 출력과 공정 에러를 이용하여 다음 작업의 제어성능을 개선시키도록 제어하는 방법으로 기존 적응제어 방법에 비해 구조가 간단하고 계산량이 적다는 잇점이 있는 회귀적인 온라인 제어방법이다.

Arimoto 등[1]에 의해 이론이 정립된 후 higher-order[2], PID형[3] 등 여러가지 형태의 학습제어기들이 제시되었다. 기존 연구들은 대부분 학습방법을 먼저 가정하고 시간영역에서 수렴조건을 찾는 접근법을 사용하였다. 그 결과 학습제어기의 알고리즘은 매우 제한된 형태를 갖게되어 전달함수모델을 많이 사용하는 화학공정에 적용하기 어렵다. 또한 기존 연구방법들이 개방계(open loop)에 대해 촛점을 맞추고 있어 외란이 발생할 수 있는 화학공정에 적용하기에는 적합치 않다. 개방계만을 대상으로하는 학습제어기의 단점을 보완하기 위해 피드백이 보완된 학습제어방법이 제시된 바 있다[4].

본 연구에서는 주파수 영역에서 단변수 학습제어기를 다변수계로 확장하는 연구를 수행하였다. 먼저 학습제어기의 수렴조건을 정의하였으며, 이를 만족시키는 학습제어기의 형태로 전달행렬의 역행렬을 제안하였다. 전달행렬의 역행렬을 이용한 학습제어기가 수렴조건을 만족하지 않을 경우에는 보상기를 설계하여 수렴조건을 만족하도록 하였다.

2. 학습제어의 목적

학습제어기의 목적은 적당한 norm 정의하에서 식(2.1)로 표현할 수 있다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - r\| = 0 \quad (2.1)$$

여기서 y_k 는 k번째 작업때 공정출력의 궤적이고 r은 설정치의 궤적이다.

작업이 반복됨에 따라 공정의 출력이 설정치의 궤적으로 수렴하도록 학습제어기를 설계해야 한다. 이전 작업에서 이용할 수 있는 정보는 학습제어기의 출력, 공정의 출력, 그리고 설정치이다. 그러므로 일반적인 학습제어기를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$u_k(t) = F(u_{k-1}(p), y_{k-1}(p), r(p)) \quad (2.2)$$

여기서 p는 k-1번째 작업의 시간이고 t는 k번째 작업의 시간이다.

학습제어기는 이전의 정보만을 이용하여 제어기 출력을 개선하여 원하는 제어기 출력 u^* 로 수렴하도록 만든다. 실제 공정에 적용할 때 계속해서 학습을 할 필요는 없다. 몇번의 학습작업으로 원하는 제어출력으로 충분히 접근시킨 후 학습을 중단하고 PID 제어기와 결합하여 사용할 수 있다.

3. 피드백이 보완된 학습제어기

다음과 같이 표현되는 정방형 전달행렬을 생각해 보자.

$$y = Gu + d + w \quad (3.1)$$

여기서 d와 w는 각각 외란과 잡음을 나타내며, u와 y는 각각 조작변수와 공정변수를 나타낸다.

식(3.2)와 같이 이전 작업에서 얻은 정보와 외란의 계기를 위한 실시간 출력의 피드백을 선형으로 조합한 학습제어기를 생각할 수 있다.

$$u_k = Cu_{k-1} + Er - K_1 y_{k-1} - K_0 y_k \quad (3.2)$$

여기서 C, E, K_1 , K_0 는 전달행렬들이며 r은 설정치를 나타낸다.

K_0 를 제외한 나머지 부분은 이전 작업의 정보이거나 이미 알고 있는 값들을 이용하는 전달행렬들이므로 proper 또는 causal일 필요는 없다.

양변에 G 를 곱하고 식(3.1)을 대입하면 다음과 같은 식이 된다.

$$[I+GK_0]y_k = [GCG^{-1}-GK_1]y_{k-1} + GER + [I-GCG^{-1}]d + [w_k - GCG^{-1}w_{k-1}] \quad (3.3)$$

w 가 영이고 $\{y_k\}$ 가 수렴한다고 가정하면, y_0 는 다음과 같이 된다.

$$y_0 = [I-GCG^{-1}+G(K_0+K_1)]^{-1} [GER+(I-GCG^{-1})d] \quad (3.4)$$

$C=I$ 그리고 $E = K_0 + K_1$ 으로 선택한다면 d 는 없어지게 되고 y_0 는 r 과 같게 된다.

그러므로 피드백이 보완된 학습제어기의 형태는 식(3.5)과 같이 제안될 수 있다.

$$u_k = u_{k-1} - K_1 y_{k-1} - K_0 y_k + (K_0 + K_1)r = u_{k-1} + K_1 e_{k-1} + K_0 e_k \quad (3.5)$$

4. 수렴조건

$w = 0$ 일 때, 식(3.5)를 다시 표현하면 식(4.1)과 같다.

$$e_k = (I+GK_0)^{-1}(I-GK_1)e_{k-1} \quad (4.1)$$

여기서 $e = r - y$ 이다.

회귀공식으로 표현된 식(4.1)이 수렴하게 되면 작업이 반복되면서 제어오차는 없어지게 된다.

식(4.2)와 같이 정의되는 2-norm을 도입하자.

$$\|e\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} |e(t)|^2 dt \quad (4.2)$$

식(4.1)에 2-norm을 적용하면 식(4.3)과 같이 된다[6].

$$\|e_k\|_2 = \|(I+GK_0)^{-1}(I-GK_1)\|_2 \|e_{k-1}\|_2 \quad (4.3)$$

그러므로 피드백이 보완된 다변수학습제어기의 수렴조건은 식(4.4)과 같다.

$$\begin{aligned} \|(I+GK_0)^{-1}(I-GK_1)\|_2 &= \sup_w \|(I+GK_0)^{-1}(I-GK_1)\|_2 \\ &= \sup_w \sigma_{\max}((I+GK_0)^{-1}(I-GK_1)) \\ &\leq \sup_w \sigma_{\max}((I+GK_0)^{-1}) \sigma_{\max}(I-GK_1) \\ &< 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

<정리 1> 식(3.5)로 표현되는, 피드백이 보완된, 학습제어기 알고리즘을 식(2.1)으로 표현되는 회분식 공정에 적용했다고 하자. 또한 잡음 w 가 없다고 가정하자. $1 + GK_0 = 0$ 이 인정한 근을 갖고 식(4.4)이 만족되면

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|r - y_k\|_2 = 0 \quad (4.5)$$

제어오차는 영으로 수렴하게 된다. ■

5. 학습제어

순수한 학습제어의 경우, K_0 항이 영이므로 수렴조건 식(4.4)는 다음과 같이 된다.

$$\|I-GK_1\|_2 = \sigma_{\max}(1-GK_1) < 1, \forall w \quad (5.1)$$

$K_1 = G^{-1}$ 로 택하면 수렴조건은 항상 만족하게 되며 2번째 작업에서 완전한 제어를 할 수 있다. 그러나 다변수의 경우 전달행렬의 역행렬을 구하는 것은 쉬운 일이 아니다. $K_1 = G_d^{-1} = \text{diag}(1/g_{ii})$ 로 선택한다면, 식(5.1)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \|I-GK_1\|_2 &= \|I-(G_{off}+G_d)G_d^{-1}\|_2 \\ &= \|G_{off}G_d^{-1}\|_2 < 1, \forall w \end{aligned} \quad (5.2)$$

여기서 G_{off} 와 G_d 는 각각 비대각항과 대각항만으로 이루어진 전달행렬이다.

<정리 2> 2×2 시스템의 경우, 전달행렬이 column dominance를 만족하면 전달행렬 대각항의 역행렬을 이용한 학습제어기는 수렴한다.

증명)

$$|g_{ii}| > \sum_{j \neq i} |g_{ji}|, \quad i=1,2,\dots,n, \forall w \quad (5.3)$$

식(5.3)를 만족하면 전달행렬 $G(s)$ 는 column dominant하다. 전달행렬 대각항의 역행렬을 이용한 학습제어기의 수렴조건을 각 항에 대해 풀어 쓰면 식(5.4)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \|G_{off}G_d^{-1}\|_2 &= \lambda_{\max}(G_d^{-H}G_{off}^H G_d^{-1}) \\ &= \lambda_{\max} \begin{pmatrix} |g_{12}/g_{21}|^2 & 0 \\ 0 & |g_{21}/g_{11}|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

전달행렬이 column dominance를 만족하면 식(5.4)의 maximum eigenvalue는 1보다 작게 되어 수렴조건을 만족한다. ■

<정리 3> 2 x 2 시스템의 경우, 전달행렬이 row dominance를 만족하면 전달행렬 대각항의 역행렬을 이용한 학습제어기의 제어출력은 최적제어출력으로 수렴한다.

증명)

$$|g_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |g_{ji}|, \quad i=1,2,\dots,n, \quad \forall w \quad (5.5)$$

식(5.5)를 만족하면 전달행렬 $G(s)$ 는 row dominant하다. $r = G^{-1}u^*$ 이고 $e^* = u^* - u$ 이면 식(5.6)을 얻을 수 있다.

$$e_k^* = (1 - G_d^{-1}G) e_{k-1}^* = -G_d^{-1}G_{off} e_{k-1}^* \quad (5.6)$$

2-norm을 적용하고 수렴조건을 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \|G_d^{-1}G_{off}\|_2 &= \lambda_{\max}(G_{off}^H G_d^{-H} G_d^{-1} G_{off}) \\ &= \lambda_{\max} \begin{pmatrix} |g_{22}/g_{11}|^2 & 0 \\ 0 & |g_{12}/g_{11}|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

전달행렬이 row dominance를 만족하면 식(5.7)의 maximum eigenvalue는 1보다 작게 되어 학습제어기의 제어출력은 최적 제어출력으로 수렴한다. ■

6. 보상기의 설계

전달행렬 대각항의 역행렬을 이용한 학습제어기가 수렴조건을 만족하지 못하면 보상기를 설계해야 한다. 보상기 K_a 가 있는 공정이

$$Q = GK_a \quad (6.1)$$

라고 할때 보상기 설계를 위한 목적함수는

$$\min_{K_a} \sup_w \sigma_{\max}(Q_{off} Q_d^{-1}) \quad (6.2)$$

이다. 이 목적함수를 최소화하는 것은 Frobenius 또는 Euclidean norm을 최소화하는 것으로 근사될 수 있다. 이 두 norm은 다음과 같은 크기관계가 있다.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \sigma_{\max}(A) \leq \|A\|_F \quad (6.3)$$

여기서 n 은 A 의 dimension이다.

$$\begin{aligned} \min_{K_a} \sup_w \|Q_{off} Q_d^{-1}\|_F &= \min_{K_a} \sup_w \sqrt{\text{trace}[Q_{off}^H Q_{off} Q_d^{-H} Q_d^{-1}]} \\ &= \min_{K_a} \sup_w \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{q_{ij}}{q_{ii}} \right|^2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

식(6.4)에서 dominance를 많이 증가시키면 Frobenius norm이 감소됨을 알 수 있다.

보상기 설계는 공정상황에 따라 크게 두가지 방법으로 설계할 수 있다: Perron-Frobenius theory에 따라 입력보상기를 설계하는 방법과 입력보상기만을 설계하는 방법. 본 연구에서는 상수로 이루어진 입력보상기를 설계하는 방법만 살펴보았다. 우선 dominance measure로

$$D_{ij}^c = \max_w \frac{\sum_{k=1}^n |g_{ki}|}{|g_{ij}|} \quad i, j=1,2,\dots,n \quad (6.5)$$

를 사용하였다.

이 행렬은 i 번째 row와 j 번째 row가 서로 바뀌었을 때, 또는 i 번째 column과 j 번째 column이 서로 바뀌었을 때 dominance 변화를 알 수 있다. 먼저 D_{ij}^c 의 column을 바꾸어 대각항의 합이 최소가 되도록 하는 permutation matrix를 구하였다.

$$Q = D^c K_a \quad (6.6)$$

$$\min_{K_a} \sum_i q_{ii} \quad (6.7)$$

이 과정은 loop paring에 해당한다. paring만으로 최대의 대각지배를 만든다음 기본적인 행렬조작으로 dominance를 개선하였다.

$$\min_E D_{ij}^c = \min_E GK_a E \quad (6.8)$$

$$K_a = E_1 E_2 \dots E_m \quad (6.9)$$

E 는 대각항의 dominance를 개선하기 위해 사용하는 기본적인 행렬로 대각항은 모두 1이고 $e_{ij} = \alpha$ 이며 나머지는 영인 행렬이다. 이렇게하면 GK_a 의 i 번째 column에 α 를 곱하여 j 번째 column에 더해주어 j 번째 대각항의 column dominance를 개선할 수 있다. j 번째 대각항의 dominance가 최대가 되도록 하는 α 는 line search를 하여 구하였다.

위의 방법은 수동으로 보상기를 설계하는 방법을 전선기가하도록 바꾸어 놓은 것으로 구현이 간단하고 변형이 쉽다.

입력보상기만으로 row dominance의 개선방법은 Perron-Frobenius theory를 이용할 수 있다[5]. 다음과 같은 normalized comparison matrix M 이 있다고 하자.

$$M(s) = \text{abs}(G_d^{-1}G) \quad (6.10)$$

여기서 abs 는 $G^{-1}G$ 의 각 항에 절대값을 취한다는 뜻이다.

$$t_{ij} = \max_w (m_{ij}(jw)) \quad (6.11)$$

로 된 행렬 T 의 Perron root에 해당하는 오른쪽 eigen vector를 대각항으로 하는 대각행렬을 입력보상기의 일부로 취하면 row dominance를 개선할 수 있다. Row dominance 개선은 방법은 Nyquist 행렬법을 이용할 때는 큰 의미가 없으나 학습제어

기의 수렴조건을 만족시키는데는 의미를 갖는다. 그러나 피드백 제어 루프를 설계할 때, Nyquist 행렬법[7]을 사용하려면 가능한 column dominance를 만족하도록 설계해야 한다.

7. 저역 필터 및 피드백 제어기

피드백이 보완된 학습제어기에서 피드백 제어기는 안정성과 수렴조건을 동시에 만족해야 한다. 일단 학습제어기가 수렴조건을 만족하도록 설계되었고 피드백 제어루프 제어기가 안정하면 식(4.4)식을 만족하도록 설계하면 된다.

학습제어기의 출력은 작업이 반복됨에 따라 최적제어출력으로 수렴하게 된다. 그러나 설정치의 궤적이 불연속적이면 학습제어기의 출력은 진동하게 된다. 역행렬의 미분기 특성, 역행렬 구현을 위한 근사, 그리고 고주파 영역에서 모델의 불확실성 등을 고려하여 저역필터가 필요하다. 일단 불연속적인

신호가 학습제어기로 유입되면 학습제어기는 심하게 진동하면서 발산하게 된다. 그러므로 학습제어기부분은 성능의 저하를 감소하고 모두 저역필터를 거치도록해야 한다.

8. 설계 예

다음과 같은 전달행렬로 표현되는 공정이 있다고 하자.

$$y(s) = G(s)u(s) + d \quad (8.1)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16.9}{s+5} & \frac{36.17}{s+11} \\ \frac{-9.57}{s+5} & \frac{-4.17}{s+11} \end{bmatrix} u(s) + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

이 전달행렬은 대각지배가 아니다. 이 전달행렬 대각항의 역행렬을 이용한 학습제어기의 수렴조건을 계산해보면

$$\sigma_{\max}(G_{\text{eff}}G_{\text{eff}}^T) = 8.66 > 1 \quad (8.2)$$

이므로 수렴조건을 만족하지 못한다. 6장에서 설명된 방법에 의해 다음과 같은 보상기를 설계하였다.

$$K_{\sigma} = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.79 \\ 1.52 & 0.49 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

$$Q = GK_{\sigma} = \frac{1}{(s+5)(s+11)} \begin{bmatrix} 48s+200 & 4.35s+58 \\ -2.52s+10.54 & 5.52s+73 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

그림 1에 Q(s)에 대한 Nyquist 행렬을 나타내었다. 대각지배를 만족하므로 정리 2.에 의해 역행렬을 이용한 학습제어기는 수렴조건을 만족한다. 그림 2에 학습제어기의 제어결과를 나타내었다. 샘플링간격은 0.01로 하였으며 학습제어기의 출력에 $\text{diag}\{1/(0.02s+1), 1/(0.02s+1)\}$ 의 필터를 설치하였다. 첫번째 학습에서 제어오차가 많이 발생하나 두번째부터는 거의 완벽하게 설정치의 궤적을 따라갈 수 있다.

피드백 제어기는 $\text{diag}\{0.01(1+1/1.5s), 0.03(1+1/2s)\}$ 로 설계하였다. 이 제어기에 대한 sensitivity 행렬의 singular values를 그림 3에 나타내었다. 그림 4에 피드백이 보완된 학습제어기의 제어결과를 나타내었다. 첫번째 작업에서는 피드백 제어기가 할 수 있는 만큼의 제어성능을 나타내었고 두번째 작업부터는 학습제어기가 제어오차를 없애는 방

향으로 동작하여 거의 완벽하게 설정치궤적을 따라가고 있다. 피드백제어기가 보완된 학습제어기가 학습의 초기작업에서 보다 좋은 성능을 나타낸다.

9. 결론

회분식공정에 적용하기 위해, 피드백이 보완된 다변수학습 제어방법을 제시하였다. 수렴조건과 설계방법은 주파수영역에서 고려되었으며 빠른 수렴속도를 위해 대각항의 역행렬을 이용하였다. 대각항의 역행렬을 이용한 학습제어기가 수렴조건을 만족하지 못하면 보상기를 설계하여 수렴조건을 만족하도록 하였다. 본 연구에서는 상수로 구성된 입력보상기의 구성 방법을 고려하였다. 고주파영역에서, 학습제어기의 강인성을 증가시키기 위해 저역필터를 사용하였다. 예시를 통해 역행렬을 이용한 학습제어기의 수렴속도가 매우 빠름을 알 수 있었고, 피드백 보완으로 외란의 억제능력이 향상됨을 알 수 있었다.

본 연구에서는 정확한 공정모델을 알고 있다는 가정하에 학습제어기를 설계하였다. 실제공정에 적용하기 위해서는 불확실한 모델에 대한 강인성을 분석하는 연구가 필요하다.

References

- [1] Arimoto, S., Kawamura, S., and Miyazaki, F., J. Robotic System, 1984, 1, 123
- [2] Bien, Z. and Huh, K.M., IEE Proc., 1989, 136, 105
- [3] Bondi, P., Casalino, G., and Giambradella, L., IEEE J. of Robot. Autom., 1988, 4, 14
- [4] Lee, K.S., Kim, J.H., and Cho, M.K., J. Fuzzy Logic and Intelligent Systems, 1993, 2.
- [5] Maciejowski, J.M., 'Multivariable Feedback Design', Addison-Wesley, N.Y., 1989
- [6] Morari, M., and Zafiriou, E., 'Robust Process Control', Prentice-Hall, N.J., 1989
- [7] Rosenbrock, H.H., 'Computer-Aided Control System Design', Academic Press, N.Y., 1974

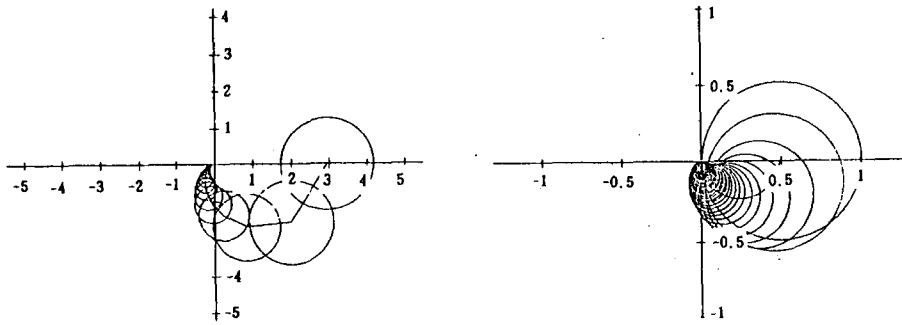


Fig. 1 Nyquist array of $Q(s)$.

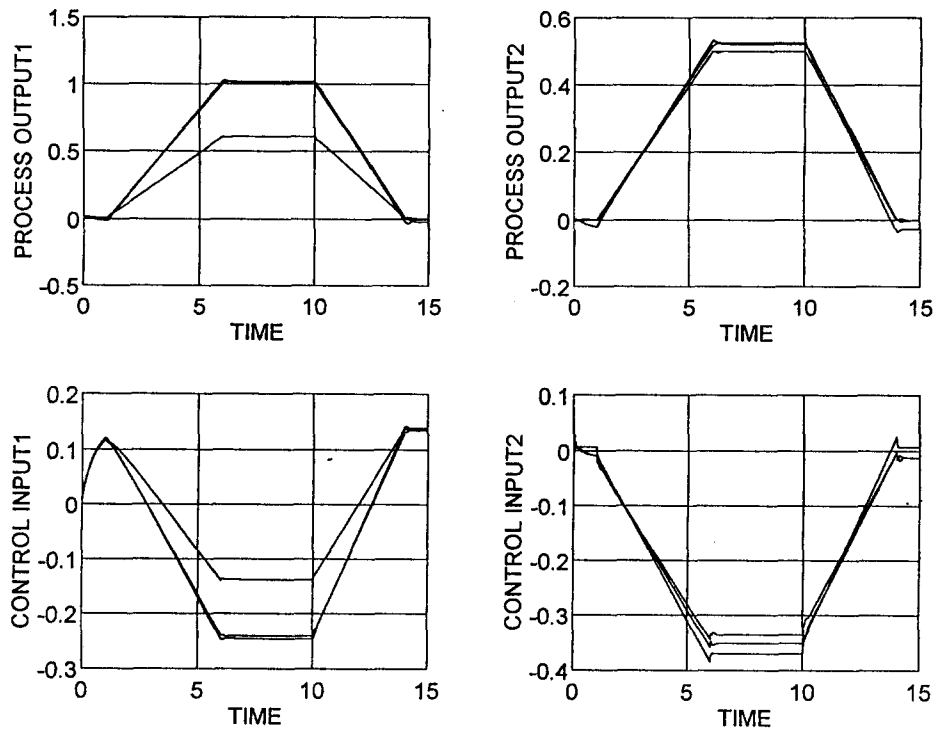


Fig. 2 Tracking performance of multivariable learning control.

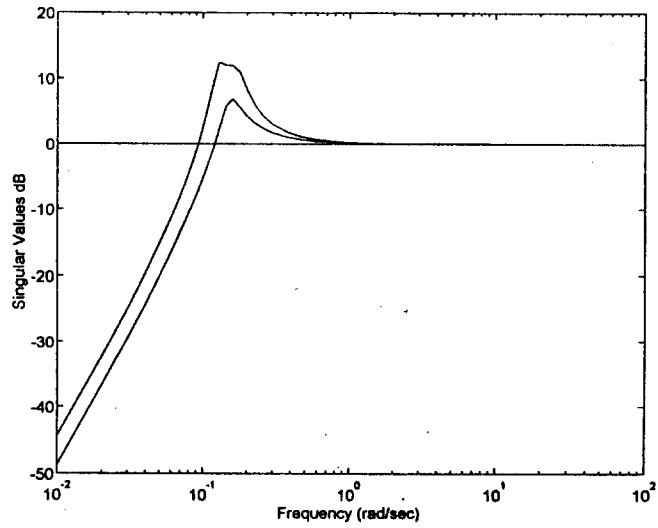


Fig. 3 Singular values of sensitivity matrix.

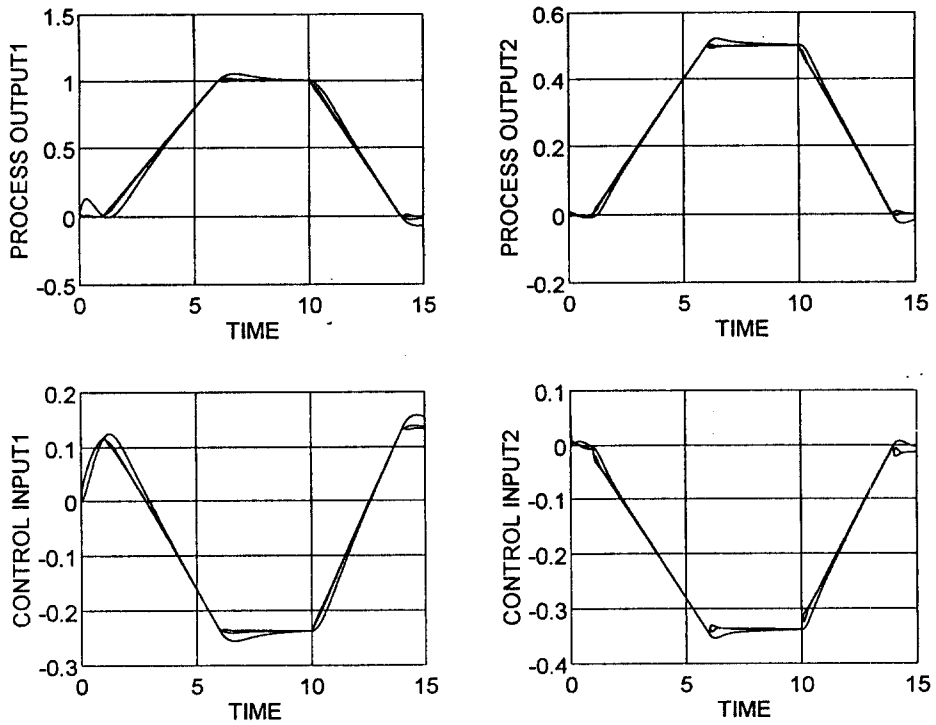


Fig. 4 Tracking performance of feedback-assisted multivariable learning control.