

# 불확실한 시스템에 대한 2-자유도 $H_\infty$ 제어기의 성능해석

°강영중\*, 이군석\*\*, 권요규\*

\* 인하대학교 전기공학과, \*\* (주) 금성사 생활시스템연구소(창원)

## Performance Analyses of TDF $H_\infty$ Controllers for Uncertain Systems

°Young-Jung Kang\*, Koon-Seok Lee\*\* and Oh-Kyu Kwon\*

\*Dept. of Electrical Eng., Inha Univ., \*\*GOLDSTAR CO., LTD

### ABSTRACT

The aim of this paper is to analyze via computer simulation the robust performance of TDF(Two Degree of Freedom)  $H_\infty$  controller for uncertain systems having parameter uncertainty. We apply the TDF  $H_\infty$  controller to autopilot design. We evaluate the robust performance of the TDF  $H_\infty$  controller for uncertain systems and present the guaranteed bound of robust performance via computer simulation.

성능특성을 동시에 만족시키는 2-자유도  $H_\infty$  제어기를 제시하였고[9,10] 이를 자동조종장치 설계에 적용하는 사례도 제시되었다[11].

이 논문에서는 1-자유도 제어기보다 성능 및 견실성에서 우수한 2-자유도  $H_\infty$  제어기를 불확실한 시스템에 적용할 경우의 성능을 모의실험을 통해 평가하고자 한다. 이 논문에서의 2-자유도  $H_\infty$  제어기는 정규 좌소인수 분해(NLCF)방법으로써 설계되고, 이를 상태 행렬이나 입력 행렬에 매개변수 불확실성을 갖는 시스템에 적용한다. 이러한 불확실한 시스템에 대하여 2-자유도  $H_\infty$  제어기의 성능 견실성을 평가하고, 이 제어기에 의해 성능 견실성이 보장되는 매개변수 불확실성 허용한계를 모의실험을 통하여 보인다.

### 1. 서 론

과거 수십여년동안 견실한 제어기 설계문제에 대하여 활발한 연구가 진행되어왔다[1,2]. 다변수 제어시스템의 설계에서  $H_\infty$ -노름(norm) 최소화 접근법은 견실성의 측면에서 가장 적절한 방법이라고 할 수 있다. 이러한  $H_\infty$  제어기설계법 가운데 정규 좌소인수 분해(Normalized Left Coprime Factorization)는 견실성 최적화에 기반을 둔 설계 방법으로서 여러가지 문제에 적용이 가능하다[3,4]. 그리고 최근에는 상태공간 모델에 매개변수(Parameter) 불확실성(Uncertainty)을 갖는 선형 시스템에 대한 견실한  $H_\infty$  제어 문제가 관심의 대상이 되고 있다[5,6]. 그러나 지금까지 제시된  $H_\infty$  제어기들은 대부분의 경우 1-자유도  $H_\infty$  제어기였다.

1-자유도  $H_\infty$  제어기는 주로 안정도 견실성의 측면에서 설계되었는데, 이러한 시스템에서는 성능과 안정도간의 절충(Tradeoff)이 매우 어렵기 때문에 요구되는 성능 견실성을 만족시키기 힘들다는 문제점이 있다. 이러한 문제를 극복하기 위해 최근에 2-자유도  $H_\infty$  제어기법이 나오게 되었다[7,8,9]. Limebeer 등은 견실 안정도와 시간 영역

### 2. 2-자유도 $H_\infty$ 제어기

이 장에서는 이 논문에서 사용하는 견실한 2-자유도 제어기에 대해 정리한다. 이 논문에서 선형분해변환(Linear Fractional Maps)은 다음과 같이 표기한다.

$$F_l(P, K) := P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}, \quad (2.1)$$

$$P := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}.$$

또한 폐우반면(Closed Right Half Plane)에 극점이 존재하지 않는 함수의 공간을  $RH_\infty$  라고 정의한다.

정규 좌소인수 분해(NLCF)에 대한 요약은 다음과 같다 [4]: 만일  $M, N \in RH_\infty$ 이 서로 소(Coprime)이고 아래의 식 (2.2)를 만족하면

$$MM^* + NN^* = I, \quad (2.2)$$

이때, 다음의 식(2.3)과 같이 표현되는 플랜트 모델  $G$ 를 정규 좌소인수 분해(NLCF)라고 부른다 :

$$G = M^{-1}N. \quad (2.3)$$

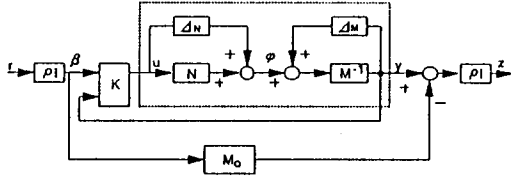


그림 1 : 견실한 2-자유도 제어기 구조

Fig. 1 : Robust TDF Controller Configuration

견실한 2-자유도 제어기 구조는 그림 1과 같다. 이러한 2-자유도 제어기 구조에서 제어기가  $K = [K_1 \ K_2]$ 와 같이 분리될 수 있다면, 이때의 제어 신호는 아래의 식과 같이 주어진다[9].

$$u = [K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} \beta \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

여기서  $K_1$ 은 앞먹입(Feedforward) 제어기이고  $K_2$ 는 되먹입(Feedback) 제어기이다. 앞먹입 제어기의 목적은  $\Delta_M, \Delta_N \in RH_\infty, \|\Delta_M \ \Delta_N\|_\infty < \gamma^{-1}$ 을 만족하는 불확실한 플랜트 모델  $G_p = (M - \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)$ 에 대하여 아래와 같은 식 (2.5)를 만족하도록 하는 것이다.

$$\|(I - G_p K_2)^{-1} G_p K_1 - M_0\|_\infty \leq \gamma \rho^{-2}. \quad (2.5)$$

위의 식에서 전달함수  $M_0$ 는 원하는 페루프 전달함수를 나타내는 가중행렬로서 설계자에 의해 선택된다.

그림 1로부터 다음의 식을 보일 수가 있다.

$$\begin{bmatrix} z \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2((I - GK_2)^{-1}GK_1 - M_0) & \rho(I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ \rho G(I - K_2G)^{-1}K_1 & (I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ \rho(I - K_2G)^{-1}K_1 & K_2(I - GK_2)^{-1}M^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

여기서 배율 인수(Scaling Factor)  $\rho$ 는 견실한 모델 정합(Robust Model Matching)에 비해 견실 안정도(Robust Stability)의 상대적 중요성을 가중시키기 위해 사용된다. 만약, 다음의 부등식이 성립한다면 :

$$\left\| \begin{bmatrix} \rho^2((I - GK_2)^{-1}GK_1 - M_0) & \rho(I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ \rho G(I - K_2G)^{-1}K_1 & (I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ \rho(I - K_2G)^{-1}K_1 & K_2(I - GK_2)^{-1}M^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma, \quad (2.7)$$

(i)  $\|\Delta_M \ \Delta_N\|_\infty < \gamma^{-1}$ 와 같은 모든  $\Delta_M, \Delta_N \in RH_\infty$ 에 대하여 루프는 안정함을 유지할 것이다. 이 점은 식 (2.6), (2.7)의 2행 2열과 소이득정리(Small Gain Theorem)[4]로부터 얻을 수 있다.

(ii)  $\|\Delta_M \ \Delta_N\|_\infty < \gamma^{-1}$ 와 같은  $\Delta_M, \Delta_N \in RH_\infty$ 에 의해 생성되는 모든  $G_p = (M - \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)$ 에 대하여  $\|(I - G_p K_2)^{-1}G_p K_1 - M_0\|_\infty \leq \gamma \rho^{-2}$ 는 견실한 성능(Robust Performance) 특성이 보장된다.

(iii) 만약  $\rho$ 를 영으로 하면, 이때의 2-자유도 문제는 일반적인 견실 안정도 문제로 귀착된다.

일반화된 조정기(Regulator) 형태에서  $H_\infty$  최적화[12]에 대한 문제를 성립시키기 위해서 다음과 같은 행렬식을 정의한다.

$$\begin{bmatrix} z \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho^2 M_0 & \rho M^{-1} & \rho G \\ 0 & M^{-1} & G \\ 0 & 0 & I \\ \rho I & 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ u \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

위의 행렬식은 그림 1로부터 구할 수 있는데, 행렬식 (2.8)에 전달함수  $M_0$ 와 플랜트  $G$ 를 대입함으로써 다음의 행렬을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & (BD' + ZC')R^{-1/2} & B \\ 0 & A_0 & -B_0 & 0 & 0 \\ \rho C & \rho^2 C_0 & -\rho^2 D_0 & \rho R^{1/2} & \rho D \\ C & 0 & 0 & R^{1/2} & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \rho I & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & R^{1/2} & D \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

### 3. 설계 과정

이 장에서는 전투기[13]와 헬리콥터(CH-47 Tandem Rotor Helicopter)[14]의 자동조종장치에 설계에 2-자유도  $H_\infty$  제어기를 적용하는 과정을 제시한다.

#### 3.1 전투기 모델

전투기의 모델은 다음과 같다 :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0226 & -36.6170 & -18.8970 & -32.0900 & 3.2509 & -0.7626 \\ 0.0001 & -1.8997 & 0.9831 & -0.0007 & -0.1708 & -0.0050 \\ 0.0123 & 11.7200 & -2.6316 & 0.0009 & -31.6040 & 22.3960 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0000 \end{bmatrix}$$

## 4. 모의실험

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

\* 목표(Target) 모델 :

$$M_0 = \frac{3}{s+3} I_2, \quad (3.1)$$

위의 목표 모델은 오버슈트가 없는 시간 응답을 만족시키는 전달함수이다.

\* 루프 형상(Loop Shaping) 가중 함수 :

$$W = \frac{1000}{s^2} I_2, \quad (3.2)$$

### 3.2 헬리콥터 모델

헬리콥터의 모델은 다음과 같다 :

$$A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.005 & 2.4 & -32.0 \\ -0.14 & 0.44 & -1.3 & -30.0 \\ 0 & 0.018 & -1.6 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.12 \\ 0.36 & -8.6 \\ 0.35 & 0.009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

\* 목표 모델 :

$$M_0 = \frac{20}{s+20} I_2, \quad (3.3)$$

\* 루프 형상 가중 함수 :

$$W = \frac{100}{s} I_2, \quad (3.4)$$

### 3.3 설계 목표

(1) 전투기 :

- \* -40db/decade의 Roll-off와 100(rad/sec)에 대해 최소 -20db를 유지하도록 한다.
- \* 최대오버슈트가 50%이내 유지하도록 한다.
- \* 2초 이내에 정상상태 값의  $\pm 10\%$  를 유지하도록 한다. ( $\rightarrow$  즉, 0.9 ~ 1.1)
- \* 정상상태에서  $\pm 1\%$  를 유지하도록 한다. ( $\rightarrow$  즉, 0.99 ~ 1.01)

(2) 헬리콥터 :

- \* 신호에 대한 응답시간을 향상 시키기 위해 교차 주파수를 10(rad/sec)으로 한다.
- \* 최대오버슈트가 50%이내 유지하도록 한다.
- \* 0.5초 이내에 정상상태 값의  $\pm 10\%$  를 유지하도록 한다. ( $\rightarrow$  즉, 0.9 ~ 1.1)
- \* 정상상태에서  $\pm 1\%$  를 유지하도록 한다. ( $\rightarrow$  즉, 0.99 ~ 1.01)

### 4.1 모의실험 과정

2장에서 제시한 2-자유도  $H_\infty$  제어기[11]를 이용하여 3장에서 설계한 자동조종장치를 다음과 같은 경우에 각각 적용하는 모의실험을 수행한다.

<불확실한 시스템의 형태>

① 상태 행렬에 불확실성이 존재하는 경우 ( $\Delta A$ ) :

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu$$

② 입력 행렬에 불확실성이 존재하는 경우 ( $\Delta B$ ) :

$$\dot{x} = Ax + (B + \Delta B)u$$

③ 상태 및 입력 행렬에 불확실성이 존재하는 경우

( $\Delta A, \Delta B$ ) :

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u$$

위의 세 가지 경우에 대하여 각각 2-자유도  $H_\infty$  제어기를 적용하여 2-자유도  $H_\infty$  제어기의 성능 건실성을 평가하고 또한 성능 건실성이 보장되는 매개변수 허용영역을 제시한다.

### 4.2 모의실험 결과

이 절에서는 3장의 설계로부터 4.1절에 제시된 각기 다른 형태의 불확실한 모델에 대해 적용한 2-자유도  $H_\infty$  제어기의 성능 건실성에 대한 모의실험의 결과를 제시한다. 각각의 경우에 대한 성능 건실성 허용영역을 표시하면 다음과 같이 요약된다.

(1) 전투기

① 상태 행렬에 불확실성이 존재하는 경우 ( $\Delta A$ ) :

$$\Delta A: \begin{cases} \Delta_{\max}; +1.0313e-03 \\ \Delta_{\min}; -8.0625e-02 \end{cases}$$

② 입력 행렬에 불확실성이 존재하는 경우 ( $\Delta B$ ) :

$$\Delta B: \begin{cases} \Delta_{\max}; +5.8125e-01 \\ \Delta_{\min}; -4.9844e-01 \end{cases}$$

③ 상태 및 입력 행렬에 불확실성이 존재하는 경우

( $\Delta A, \Delta B$ ) :

$$\Delta A, \Delta B: \begin{cases} \Delta_{\max}; +1.0313e-03 \\ \Delta_{\min}; -8.0625e-02 \end{cases}$$

전투기 모델  $A, B$  행렬의 최대 및 최소 특이값은 각각 다음과 같다.

$$\sigma_{\max}(A) = 5.5689e+01, \quad \sigma_{\min}(A) = 1.7795e-03,$$

$$\sigma_{\max}(B) = \sigma_{\min}(B) = 30,$$

이것에 비교해 볼때  $\Delta A, \Delta B$ 의 각각의 허용영역이 큰 상태에서도 성능 건실성이 보장됨을 알 수 있었다.

(2) 헬리콥터

① 상태 행렬에 불확실성이 존재하는 경우 ( $\Delta A$ ) :

$$\Delta A : \begin{cases} \Delta_{\max} ; +1.3750e-01 \\ \Delta_{\min} ; -7.3281e-03 \end{cases}$$

② 입력 행렬에 불확실성이 존재하는 경우 ( $\Delta B$ ) :

$$\Delta B : \begin{cases} \Delta_{\max} ; +1.3242e+04 \\ \Delta_{\min} ; -9.2188e-03 \end{cases}$$

③ 상태 및 입력 행렬에 불확실성이 존재하는 경우

( $\Delta A, \Delta B$ ) :

$$\Delta A, \Delta B : \begin{cases} \Delta_{\max} ; +8.8232e+00 \\ \Delta_{\min} ; -7.0508e-03 \end{cases}$$

헬리콥터 모델  $A, B$  행렬의 최대 및 최소 특이값은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(A) &= 4.3890e+01, & \sigma_{\min}(A) &= 2.4470e-03, \\ \sigma_{\max}(B) &= 8.6085e+00, & \sigma_{\min}(B) &= 3.7514e-01, \end{aligned}$$

이것에 비교해 볼때  $\Delta A, \Delta B$ 의 각각의 허용영역이 큰 상태에서도 성능 건실성이 보장됨을 알 수 있었다.

위의 결과에 대한 시간응답은 그림 2 와 그림 3에 각각 제시하였다. 이로부터 2-자유도  $H_{\infty}$  제어기가 각각의 경우에 대하여 어느 정도의 범위에서 불확실성에 대한 성능 건실성이 보장됨을 알 수 있었고, 입력 행렬의 경우가 상태 행렬에 불확실성이 존재하는 경우보다 보장되는 허용영역이 더 큼을 알 수가 있다.

## 5. 결 론

이 논문에서는 자동조종장치설계에 적용된 2-자유도  $H_{\infty}$  제어기[11]를 불확실한 시스템에 적용할 경우의 성능을 모의실험을 통해 해석하였다. 모의실험에서는 불확실성이 상태 행렬이나 입력 행렬의 매개변수에 존재하는 경우의 성능 건실성을 두 예제를 통해 제시하였다. 모의실험을 통해 상당한 크기의 매개변수 변화에도 설계된 제어기가 요구되는 성능을 건실하게 만족하는 것을 볼 수 있었다. 앞으로의 연구 과제로서는 이 제어기의 성능 건실성 보장영역을 해석적인 기법에 의해 제시하는 것이 더 요구된다.

## 참고 문헌

[1] P. Dorato ed., *Robust Control*, IEEE Press, 1987.  
 [2] P. Dorato and R. K. Yedavalli ed., *Recent Advances in Robust Control*, IEEE Press, 1990.

[3] R. Hyde and K. Glover, "VSTOL aircraft flight control system design using  $H_{\infty}$  controllers and a switching strategy", *Proc. of 29th Conf. on Decision and Control*, Honolulu, 1990.  
 [4] D. McFarlane and K. Glover, *Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions*, Lecture Notes in Control and Information Sciences Series, Springer-Verlag, 1990.  
 [5] L. Xie and C. E. Souza, "Robust  $H_{\infty}$  control for class of uncertain linear time-invariant systems", *IEE Proc.-D*, Vol. 138, pp. 479-483, 1991.  
 [6] L. Xie and C. E. Souza, "Robust  $H_{\infty}$  control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix", *System & Control Lett.* Vol. 14, pp. 389-396, 1990.  
 [7] M. Grimble, "Two-degrees of freedom feedback and feedforward optimal control of multivariable stochastic systems", *Automatica*, Vol. 24, pp. 809-817, 1988.  
 [8] M. Grimble, "Minimization of a combined  $H_{\infty}$  and LQG cost function for a two-degree-of-freedom control design", *Automatica*, Vol. 25, pp. 635-638, 1989.  
 [9] D. J. N. Limebeer, E. M. Kasenally and J. Perkins, "On the design of robust two degree of freedom controllers", *Automatica*, Vol. 29, pp. 157-168, 1993.  
 [10] D. Hoyle, R. Hyde and D. J. N. Limebeer, "An  $H_{\infty}$  approach to two degree of freedom design", *Proc. of 30th Conf. on Decision and Control*, Brighton, England, 1991.  
 [11] 장 영 중, 권 오 규, "건실한 2-자유도  $H_{\infty}$  제어기에 의한 자동조종장치 설계", '93 제어계측 연구회 합동학술발표논문집, pp. 16-21, 1993.  
 [12] K. Glover, D. J. N. Limebeer, J. Doyle, E. Kasenally and M. G. Safonov, "A characterization of all solutions to the four block general distance problem", *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 29, pp. 283-324, 1991.  
 [13] M. Safonov, A. Laub and G. Hartmann, "Feedback properties of multivariable systems : The role and use of the return difference matrix", *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol 26, pp. 47-65, 1981.  
 [14] J. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design : Concepts for a classical/modern synthesis", *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. 26, pp. 4-16, 1981.

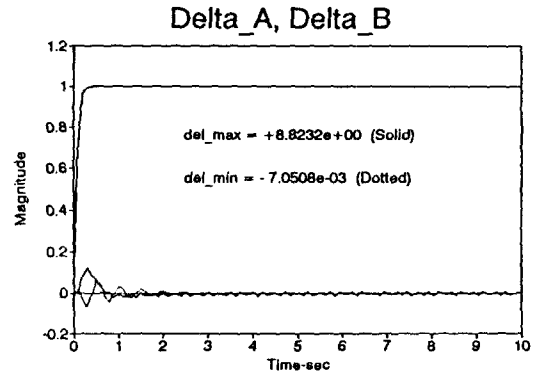
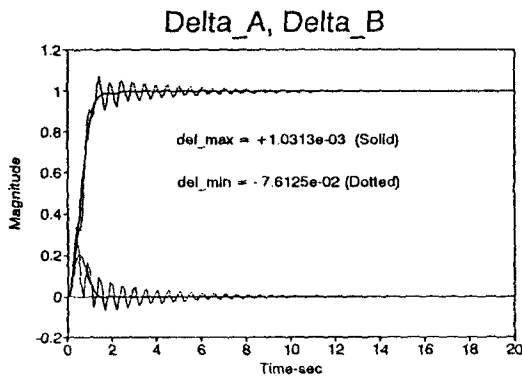
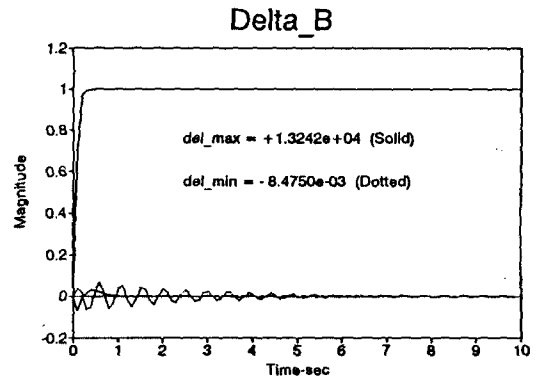
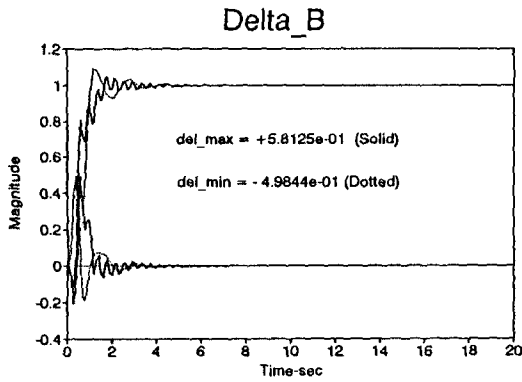
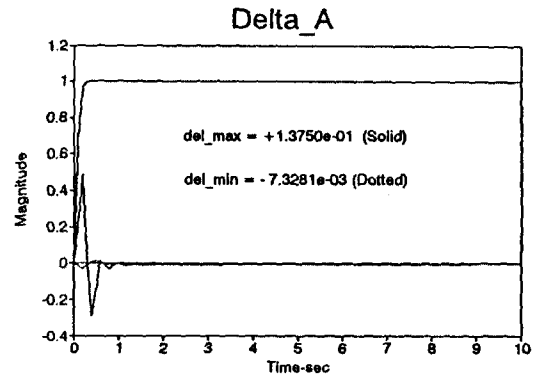
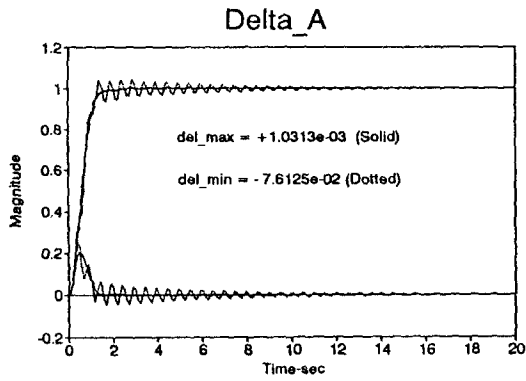


그림 2 : 전투기 모델의 페루프 단위계단응답.

그림 3 : 헬리콥터 모델의 페루프 단위계단응답.