

불확실성을 갖는 단일 링크 탄성 Arm의 슬라이딩 모드 제어

° 신호철, 김정식, 최승복, 정재천
인하대학교 공과대학 기계공학과

Sliding Mode Control of a Single-Link Flexible Arm with Uncertainties

° Ho-Cheol Shin, Jung-Sik Kim, Seung-Bok Choi, Chae-Cheon Cheong
Department of Mechanical Engineering, Inha University

Abstract

A new robust sliding mode controller is formulated for the tip position control of a single-link flexible manipulator with parameter variations. After establishing the plant model characterized by a noncollocated uncertain control system, a sliding surface which guarantees stable sliding mode motion is synthesized in an optimal manner. The surface is then modified to adapt arbitrarily given initial conditions. A discontinuous control law associated with the modified surface is designed by restricting that velocity state variables are not available from direct sensor measurements. Using the proposed control law favorable system responses are accomplished through shortening the reaching phase of state trajectory without increasing maximum control torque as well as undesirable chattering. Furthermore, a low sensitiveness to uncertainties is obtained from inherent salient properties of the proposed control system. Computer simulations are undertaken in order to demonstrate these superior control performance characteristics to be accrued from the proposed methodology.

1. 서론

현재 사용되는 대부분의 산업용 로봇은 기계적 강성으로 인한 구조적 진동을 최소화하기 위하여 큰 부피와 무게를 갖도록 설계되었다. 이들 로봇의 큰 부피와 무게는 로봇의 운전속도를 느리게 하고, 에너지 소모량을 크게하며 적은 가반중량을 조래한다. 이러한 로봇에 있어서 적은 구동력으로 더 빠른 속도와 큰 가반중량을 갖도록 하는 것은 당연히 뒤따르는 요구사항이며 연구대상이 된다. 더욱이, 우주 로봇(space robot)개발에 있어서 적은 자체무게와 큰 가반중량을 갖도록 설계하고 제어하는 연구는 매우 중요하다. 이러한 요구사항을 만족시키는 방법의 하나로 로봇 arm을 경량화하는 연구가 제안되었다. 로봇 arm을 경량화함으로써 얻어지는 장점은 앞서 언급한 것 이외에도 전체적으로 낮은 생산가격, 적어진 관성으로 인한 작업시 안전도증가, 적은 부피 설계 그리고 기어연결이 아닌 직접구동 가능 등 여러가지가 있다[1, 2]. 그러나 경량화된 로봇 arm은 유연성이 증가되어 arm의 탄성에 의해 운동시 진동이 발생하기 때문에 이를 제어하기 위한 새로운 제어기를 필요로 한다. 탄성 로봇 arm을 제어한다는 것은 빠르게 변화하는 로봇 arm의 배

치와 구성, 시스템의 적은 감쇠, 변하는 하중조건, 무한차원을 갖는 시스템 모델등의 요소를 포함한다. 이러한 요소들을 갖는 로봇 arm을 제어하기 위하여 최적 제어기를 비롯한 수 많은 제어기 개발이 연구되어 오고 있다. 그러나 지금까지 제안된 대부분의 탄성 로봇 arm 제어기들은 파라미터(parameter) 변화와 외란에 대하여 민감하고 정확한 모델 및 하중예상치등의 필요성을 전제로 설계되었다.

최근 몇년간 파라미터 변화와 외란에 강건하고 제어 알고리즘이 비교적 간단한 슬라이딩 모드 제어가 탄성 로봇 arm 제어에 적용되어 왔다. 80년대 후반에 슬라이딩 모드 제어 이론을 단일 탄성 로봇 arm의 제어에 적용하여 선단의 하중이 알고 있는 범위 내에서 변할 때 강건함을 나타내는 제어기가 설계되었다[3]. 여기서 사용된 슬라이딩 서피스는 허브의 각도와 최종각도 사이의 오차와 그 오차의 속도와 탄성모드를 고려하는 항들로 이루어지며 고정된 슬라이딩 서피스 기울기를 갖는다. 탄성모드를 고려하는 항들은 서피스의 절편을 나타낸다. 동일한 방법으로 설계된 슬라이딩 서피스를 갖는 제어기가 중력을 고려한 단일 링크 로봇 arm과 2절 링크 탄성 arm에 적용되었다[4, 5]. 슬라이딩 모드 제어기를 이용함으로써 관성 행렬 역변환, 모드계산, 하중예상이 필요치 않음을 보여 주었다. 한편 관절의 각도 오차, 오차속도 그리고 오차적분항으로 정의되는 슬라이딩 서피스를 갖는 제어기가 2절 링크 탄성 로봇 arm에 적용되었다[6]. 여기서 제안된 슬라이딩 모드 제어기는 관절의 각도 제어에만 사용되었고, 가진되는 탄성모드는 고유치 배치 기법(eigenvalue assignment technique)을 사용하여 제어하였다. 여기서 사용된 슬라이딩 서피스도 고정된 기울기를 갖고 있으며 첨가된 오차적분항이 변함에 따라 서피스의 절편이 변한다. 이 때문에 오차 상태공간에서 RP(representative point)가 회전하는 모습을 나타낸다. 한편 arm 선단 위치 제어만을 위해 선단위치 오차와 그 속도로 이루어진 전형적인 슬라이딩 서피스를 갖는 제어기가 제안되었다[7]. 여기에 사용된 제어기는 arm 선단의 위치 오차와 불연속변수인 슬라이딩 서피스를 고려하였으며, 입력되는 제어력(토크)의 크기를 입력계인 크기로 조절하는 기존의 슬라이딩 모드 제어기와는 달리 서피스의 기울기가 증가함에 따라 제어력의 크기가 증가하도록 설계되었다. 따라서 서피스의 기울기가 커지면 응답은 빠르게되지만 최대 입력 토크 크가 매우 커지는 특성을 보여준다. 또한 시스템의 상태변수를 이용하여 설계하지 않고 시스템 변수인 선단 위치와 선단 속도를 이용하여 시스템의 안정성을 검토한 후 서피스를 설계하였

기 때문에 탄성 arm의 유연도를 나타내는 시스템 모델 변수(주파수, 모드 shape)등에 따라 슬라이딩모드 운동의 불안정성이 유발될 수 있다.

잘 알려진 바와 같이 슬라이딩 모드 제어는 대상 제어 시스템의 파라미터 변화 및 외란에 강건한 특성을 갖고 있으며 제어 알고리즘이 간단하여 많은 분야에서 연구되고 있다[8, 9]. 슬라이딩 모드 제어에서 슬라이딩 서피스의 설계는 슬라이딩 서피스 상에서 슬라이딩모드 운동의 안정성과 제어 시스템의 성능을 결정하므로 매우 중요하다[10]. 이러한 슬라이딩 서피스는 임의로 또는 최적으로 설계되기도 하지만 지금까지 제안된 대부분의 슬라이딩 서피스는 주어진 초기조건과는 무관하게 설계되었다. 이러한 슬라이딩 서피스의 기술기(혹은 gradient)가 비교적 큰 경우에 RP가 슬라이딩 서피스에 도달하여 슬라이딩 모드 형성되기 전까지의 상태(리칭상태)에서는 시스템이 불확실성에 대하여 매우 민감하며 때때로 매우 느린 정착(regulating) 혹은 추적(tracking)시간을 유발하기도 한다. 임력계인을 증가시켜 정착시간을 빠르게 할 수 있으나 채터링(chattering)이 커지고 제어율이 증가하여 하드웨어상에 많은 문제점을 유발한다.

최근 리칭상태를 최소화 시킴으로써 빠른 응답과 불확실성에 대하여 더욱 강건함을 얻도록 하는 시간에 따라 변하는 슬라이딩 서피스가 제안되었다[10]. 초기에 이 슬라이딩 서피스는 임의로 주어진 초기조건을 지나도록 설계되며 평행이동과 회전 이동을 통하여 미리 정해진 서피스를 향하여 이동한다. 본 논문에서는 시스템 변수 변화를 갖고 있는 단일 링크 탄성 arm의 빠르고 효율적인 정착 제어를 위해 각 진동모드의 위치 및 속도 상태 변수로 구성된 새로운 슬라이딩 서피스를 설계하고 이와 연계된 슬라이딩 모드 제어를 설계하였다. 먼저 수평면상에서 회전운동을 하는 단일 링크 탄성 arm의 모델링을 수행하였다. 탄성 링크는 길이에 비하여 매우 얇은 보를 사용하였으므로 Euler-Bernoulli beam 이라 가정하였고, 센서는 허브 각도를 측정할 수 있는 optical encoder, 허브 부근의 스트레인을 측정할 수 있는 스트레인 게이지 및 arm 선단 위치를 측정할 수 있는 LED(Light-Emitting Diode)를 사용한다고 가정하였다. 따라서 본 연구에서 제안된 시스템은 비병치(noncollocated) 제어 시스템이라 할 수 있다. 미리 설정되는 슬라이딩 서피스는 서피스 상에서 슬라이딩모드 시스템이 안정하도록 LQR (linear quadratic regulating) 방법을 사용하여 설계하였다. 제어시스템의 강건성을 보장하기 위하여 알려진 변동의 범위를 고려하였으며 직접측정이 어려운 속도상태 변수들은 비연계 저차 관측기로부터 예측값을 구하여 불연속 슬라이딩모드 제어를 설계하였다. 수치해석을 통하여 제안된 제어기의 사용으로 빠르고 효율적으로 탄성 arm의 선단 위치를 제어함과 불확실성 존재시 매우 강건한 제어효과를 입증하였다.

2. 시스템 모델링

Fig. 1에서 보는 바와 같이 평면위를 움직이는 길이가 l 이고 단면이 균일한 유연보에 Euler-Bernoulli beam 이론을 적용하면 arm의 운동 변위 $u(v, t)$ 를 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$u(v, t) = w(v, t) + v\theta(t) \quad (1)$$

여기서 v 는 arm의 중립축 접선에서 허브로부터의 길이를 나타내고 $w(v, t)$ 는 v 의 위치에서 접선으로 부터 arm까지의 탄성 변형을 나타낸다. $\theta(t)$ 는 고정된 기준축 ov' 으로부터 접선까지 허브가 회전한 각도를 나타낸다. 따라서 에너지식과 Hamilton의 법칙으로부터 다음과 같은 운동방정식과 경계조건을 구할 수 있다[2].

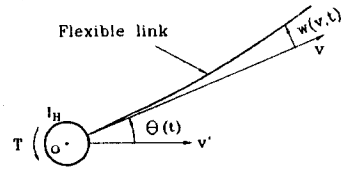


Fig. 1 A single-link flexible manipulator

$$EI \frac{\partial^4 u(v, t)}{\partial v^4} + \rho \frac{\partial^2 u(v, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$EI \frac{\partial^2 u(v, t)}{\partial v^2} \Big|_{v=0} + T(t) - I_H \ddot{\theta}(t) = 0$$

$$u(0, t) = 0 \quad (3)$$

$$EI \frac{\partial^2 u(v, t)}{\partial v^2} \Big|_{v=l} = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 u(v, t)}{\partial v^3} \Big|_{v=l} = 0$$

여기서 EI 는 arm의 굽힘강성이고 ρ 는 유연 링크의 단위길이당 질량이다. $T(t)$ 는 모터에서 입력되는 토크이며 I_H 는 허브의 관성모멘트를 나타낸다. 식 (1)의 변위는 모드가정법을 사용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(v, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(v) q_i(t) \quad (4)$$

여기서 길이의 함수 $\phi_i(v)$ 와 시간의 함수 $q_i(t)$ 는 각각 i 번째 모드의 고유함수와 시스템의 일반화 좌표이다. 따라서, Lagrange 방정식을 적용하면 다음과 같은 각 모드에 대한 비연계 상미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$(\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i) = -\frac{1}{I_i} \phi_i'(0) T, \quad i = 0, 1, \dots, \infty \quad (5)$$

여기서 ω_i 는 i 번째 모드(mode)의 고유진동수이고 ζ_i 는 감쇠계수를 나타내며 I_i 는 모터 허브와 arm의 전체 관성 모멘트이다. 감쇠계수 ζ_i 는 비례감쇠로 가정하여 첨가되었다. 따라서, 강제모드와 n 개의 진동모드를 제어모드로 가정하면 상태공간 상에서 다음과 같은 시스템 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BT \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} x &= [q_0 \ \dot{q}_0 \ q_1 \ \dot{q}_1 \ \dots \ q_n \ \dot{q}_n]^T \\ &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n+2}]^T \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -\omega_1^2 & -2\zeta_1\omega_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -\omega_n^2 & -2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{I_i} [0 \ 1 \ 0 \ \phi_1'(0) \ \dots \ 0 \ \phi_n'(0)]^T \quad (7)$$

$$y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} l & 0 & \phi_1(l) & 0 & \dots & 0 & \phi_n(l) & 0 \\ 1 & 0 & \phi_1'(0) & 0 & \dots & 0 & \phi_n'(0) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{2} \phi_1''(0) & 0 & \dots & 0 & \frac{h}{2} \phi_n''(0) & 0 \end{bmatrix}$$

식 (7)의 plant 행렬에서 출력벡터의 y_1 는 LED등을 이용하여 측정할 수 있는 arm의 선단 위치를, y_2 는 모터에 내장되어 있는

optical encoder를 통하여 측정할 수 있는 허브각도를, y_n 는 arm의 시작점에 위치한 스트레인 게이지로부터 얻을 수 있는 스트레인을 나타내고 h 는 arm의 두께이다.

유연한 arm의 설계 및 제작과정에서 발생할 수 있는 시스템 모델 변수의 불확실성, 시스템 모델링 과정에서 필요한 가정으로부터 야기될 수 있는 불확실성, 그리고 운전시 미지의 가변 중량에 의해 발생할 수 있는 시스템 모델 변수의 변화등을 고려하여 시스템 변수 변화를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_{0,i} + \delta\omega_i \\ \zeta_i &= \zeta_{0,i} + \delta\zeta_i \\ |\delta\omega_i| &\leq \beta_i \omega_{0,i} \\ |\delta\zeta_i| &\leq \gamma_i \zeta_{0,i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\omega_{0,i}$ 및 $\zeta_{0,i}$ 는 각각 알고 있는 i 번째 모드의 시스템 고유주파수 및 감쇠계수의 공칭값(nominal value)을 나타내며 $\delta\omega_i$ 및 $\delta\zeta_i$ 는 이에 상응하는 변수의 변화를 나타낸다. 이 변화의 크기는 가중치(weighting factor) β_i 와 γ_i 에 따라 좌우되며 일반적으로 실제 시스템에서 발생할 수 있는 변수 변화의 한계를 취한다. 따라서 식 (8)과 연계하여 다음과 같은 불확실성 plant 행렬을 갖는 시스템 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0 + \Delta A)x + BT \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 행렬 A_0 및 ΔA 의 성분은 식 (8)을 식 (7)의 행렬 A 에 대입하여 쉽게 얻을 수 있다.

3. 슬라이딩 서피스 설계

시스템 (9)의 제어입력이 허브의 모터 토크 하나이므로 다음과 같은 단일 슬라이딩 서피스를 설정한다.

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{2n+2} c_i e_i \\ e_i &= x_i - x_{di} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 x_{di} 는 각 상태의 요구(desired) 궤적이고 e_i 는 실제 상태와 요구 궤적간의 오차이다. 실제 유연 arm 선단을 정착제어(regulating control)하기 위한 문제로 가정한다면 일반성을 잃지 않고 $x_{di} = 0$ 로 설정할 수 있다. 따라서 슬라이딩 서피스는 시스템의 상태변수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{2n+2} c_i x_i \\ &= [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2n+2}] [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n+2}]^T \\ &= Gx \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 G 는 슬라이딩 서피스의 상수 구배 벡터이며 $\det(GB) \neq 0$ 이다. 시스템의 상태궤적은 슬라이딩모드 운동중에 다음에 주어진 상태공간에 구속되며 $(2n+1)$ 차의 하위 상태공간 E^{2n+1} 상에 속하게 된다.

$$Gx = 0 \quad (12)$$

따라서 식 (12)를 미분하여 식 (9)에 대입하면 등가제어기를 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$T_e = -(GB)^{-1}G(A_0 x + \Delta A x) \quad (13)$$

결과적으로 슬라이딩모드 운동방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\dot{x} = [I - B(GB)^{-1}G](A_0 + \Delta A)x \quad (14)$$

$$Gx = 0 \quad (15)$$

여기서 I 는 단위행렬이다. 파라미터 변화 ΔA 는 일반적으로 슬라이딩모드 운동방정식 (14)에 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 그러나, 잘 알려진 바와 같이 슬라이딩모드 시스템이 파라미터

변화 ΔA 에 대하여 완전히 둔감할 조건은 다음과 같다[11].

$$\text{rank}[B:\Delta A M] = \text{rank} B \quad (16)$$

여기서 상태 변환 행렬 M 의 열(column)은 하위 상태공간 E^{2n+1} 의 기저 벡터이다. 본 연구에서 제안된 시스템 (A, B)는 제어가능하므로 controllable canonical form으로 변환할 수 있고, 따라서 조건 (16)이 만족됨을 알 수 있다. 즉 파라미터 변화 ΔA 는 주어진 초기 조건으로부터 슬라이딩모드 운동이 시작되기 전까지만 시스템에 영향을 미치고 그후에는 전혀 영향을 미치지 않는다. 따라서 리칭상태를 줄일 수 있는 효과적인 제어함수나 다른 방법을 사용한다면 파라미터 변화가 시스템에 영향을 미치는 시간을 현저하게 감소할 것이며 전체적으로 시스템은 파라미터 변화에 더욱 둔감할 것이다.

시스템이 조건 (16)을 만족하므로 서피스 파라미터 c_i 를 공칭 시스템을 이용하여 설계할 수 있다. 이 경우에 대한 등가 제어기와 슬라이딩모드 운동방정식은 각각 다음과 같이 된다.

$$T_e = -(GB)^{-1}GA_0 x \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A_0 - B(GB)^{-1}GA_0]x \\ &= A_e x \end{aligned} \quad (18)$$

$$Gx = 0 \quad (19)$$

다음 단계로 넘어가기 전에 식 (9)에 주어진 공칭 시스템 행렬 A_0 를 다음과 같이 표현한다.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & A_{012} \\ A_{021} & A_{022} \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{012} &= [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad 1 \times (2n+1) \\ A_{021} &= [0 \ 0 \ \dots \ 0], \quad (2n+1) \times 1 \\ A_{022} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -\omega_{0,1}^2 & -2\zeta_{0,1}\omega_{0,1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ & & & -\omega_{0,n}^2 & -2\zeta_{0,n}\omega_{0,n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

따라서, 슬라이딩 서피스 상에서 시스템 행렬 A_e 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & A_{e12} \\ A_{e21} & A_{e22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{e12} &= A_{012} \\ A_{e21} &= A_{021} - B_r(GB)^{-1}G_r A_{021} \\ A_{e22} &= A_{022} - B_r(GB)^{-1}(c_1 A_{012} + G_r A_{022}) \\ B_r &= \frac{1}{I_t} [1 \ 0 \ \phi_1'(0) \ \dots \ 0 \ \phi_n'(0)]^T \\ G_r &= [c_2 \ c_3 \ \dots \ c_{2n+2}] \end{aligned} \quad (23)$$

위의 식으로부터 행렬 A_e 의 고유치, $\text{eig}(A_e)$,는 0과 $\text{eig}(A_{e22})$ 임을 알 수 있다. 따라서 슬라이딩모드 운동중 시스템이 안정하도록, 즉, $\text{Re}(\text{eig}(A_{e22})) < 0$ 도록 서피스 계수 c_i 를 설계해야 한다. 이를 수행하기 위해 LQG 방법을 도입하였다. 편의상 다음을 정의한다.

$$\begin{aligned} k_0 &\triangleq (GB)^{-1}(c_1 A_{012} + G_r A_{022}) \\ T_0 &\triangleq k_0 x_r = [k_1, k_2, \dots, k_{2n+1}] x_r \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,

$$x_r = [x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{2n+2}]^T \quad (25)$$

게인 벡터 k_0 는 다음에 주어지는 성능지수를 최소화 하도록 결정된다.

$$J = \int (x_r^T Q x_r + T_r^T R T_r) dt \quad (26)$$

여기서 Q 는 양의 한정 대각행렬이며 R 은 양의 상수이다. 부행렬 A_{22} 에 해당하는 부시스템이 단일 입력 (T_0)을 갖으므로, $\det(A_{22} - B_r k_0) \neq 0$ 을 만족하도록 유일한 게인배터 k_0 를 구할 수 있다. 따라서, 식 (23) 으로부터 $GB = G_r B_r$ 임을 알 수 있으므로 $c_1 = 1$ 이라 설정하면 서피스 계수 G_r 는 다음과 같이 얻어진다.

$$G_r = A_{012} (A_{22} - B_r k_0)^{-1} \quad (27)$$

식 (18)로 표현되는 슬라이딩모드 시스템의 안정성은 식 (27)에 의해 주어지는 서피스계수 c_i 를 갖는 슬라이딩 서피스 (11)에 의해 보장된다. 그러나 슬라이딩 서피스 (11)은 초기조건과는 무관하게 설계되었다. 따라서 슬라이딩 서피스 (11)과 연계한 슬라이딩모드 제어 시스템은 리칭상태 동안 파라미터변동에 민감할 수 있다. 리칭상태를 감소시켜 시스템의 강건성을 증가시키기 위하여 임의로 주어지는 초기조건을 고려하도록 슬라이딩 서피스 (11)를 수정, 개선하고자 한다. 먼저 새로운 좌표축을 다음과 같이 설정한다.

$$e_{m1} = \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{n_1} c_{2i-1} x_{2i-1} \quad (28)$$

$$e_{m2} = \sum_{i=1}^{n_2} c_{2i} x_{2i}$$

여기서 e_{m1} 축은 유연 진동 제어 모드의 위치 상태 변수의 합수이며 e_{m2} 축은 속도 상태변수의 합수이다. 이와 같은 변수들로부터 우리는 다음과 같은 이동 슬라이딩 서피스를 설계할 수 있다.

i) $t = t_0$

$$s_m(t_0) = c(t_0)e_{m1}(t_0) + e_{m2}(t_0) + \alpha(t_0)$$

ii) $t_0 < t \leq t_s$

$$s_m(t) = c(t)e_{m1}(t) + e_{m2}(t) + \alpha(t) \quad (29)$$

iii) $t > t_s$

$$s_m(t) = c_p e_{m1}(t) + e_{m2}(t), (c_p = c_1)$$

여기서 t_s 는 슬라이딩모드 운동이 일어나기 시작하는 시간이며, $c(t)$, $\alpha(t)$ 는 각각 시간에 따라 변하는 슬라이딩 서피스 (29)의 기울기와 절편을 나타낸다. 슬라이딩 서피스 (29)는 초기($t = t_0$)에 주어진 초기상태 ($x_i(t_0)$)를 지나도록 $c(t_0)$ 와 $\alpha(t_0)$ 가 결정된다. 만일 초기상태가 안정한 영역에 있다면 $t \in [t_0, \infty)$ 동안 $\alpha(t) = 0$ 이며 초기상태가 불안정한 영역에 있다면 평행이동에 따라 절편 $\alpha(t)$ 가 변한다. 또한 슬라이딩 서피스는 기울기 $c(t)$ 가 미리 정해진 서피스 기울기 $c_p (= c_1)$ 로 변할 때까지 이동한다. 이동 슬라이딩 서피스 (29)의 구체적인 이동 알고리즘과 중요 특성은 참고문헌[10]에 잘 기술되어 있어 여기서는 생략한다.

4. 제어기 및 관측기 설계

슬라이딩모드 제어기를 설계하기 위해 먼저 서피스 s_m 의 시간에 대한 미분을 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} \dot{s}_m &= \dot{c}(t)e_1(t) + c(t)\dot{e}_1(t) + \dot{e}_2(t) + \dot{\alpha}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} [(r_{2i-1} + d_{2i-1})x_{2i-1} + (r_{2i}(t) + d_{2i})x_{2i}] \\ &\quad + DT + \frac{\dot{c}(t)}{c_1} \sum_{i=1}^{n_1} c_{2i-1} x_{2i-1} + \dot{\alpha}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서,

$$\begin{aligned} r_{2i-1} &= -c_{2i} \omega_{0i-1}^2, \quad \omega_{00} = 0 \\ r_{2i}(t) &= \frac{\dot{c}(t)}{c_1} c_{2i-1} - 2\zeta_{0i-1} \omega_{0i-1}, \quad \zeta_{00} = 0 \\ d_{2i-1} &= -c_{2i} (2\omega_{0i-1} \delta \omega_{i-1} + \delta \omega_{i-1}^2), \quad \delta \omega_{00} = 0 \\ d_{2i} &= -2c_{2i} (\delta \zeta_{i-1} \omega_{0i-1} + \zeta_{0i-1} \delta \omega_{i-1} + \delta \zeta_{i-1} \delta \omega_{i-1}), \quad \delta \zeta_{00} = 0 \\ D &= \frac{1}{I_i} \sum_{i=1}^{n_1} c_{2i} \phi_{i-1}'(0), \quad \phi_{00}'(0) = 1 \end{aligned} \quad (31)$$

식 (29)에서 $c(t)$ 와 $\alpha(t)$ 는 계단함수로 정의되기 때문에 분할(partition) $p = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ 가 존재하여 $t_0 = \bar{v}_1 < \bar{v}_2 < \dots < \bar{v}_n = t_s$ 로 표현할 수 있으며 각각의 개부분구간 (\bar{v}_{k-1}, \bar{v}_k), $1 < k \leq n$ 에서 $c(t)$ 및 $\alpha(t)$ 가 상수가 된다. 확연히 p 가 measurable이며 $m(p) = m_s(p) = 0$ 임을 증명할 수 있다[10]. 여기서 m 은 Lebesgue measure를, m_s 은 Lebesgue exterior measure를 각각 나타낸다. 따라서 $t \in [t_0, t_s] - p$ 에서 $\dot{c}(t) = \dot{\alpha}(t) = 0$ 임을 쉽게 알 수 있다. 이러한 사실에 입각하여 다음과 같은 슬라이딩 모드 존재조건을 만족하는 제어기 T 를 설계할 수 있다.

$$s_m \dot{s}_m < 0 \quad (32)$$

이제 우리는 다음과 같은 제어기를 제안한다.

$$T = -\frac{1}{D} \left(\sum_{i=1}^{n_1} (r_{2i-1} x_{2i-1} + r_{2i}(t) x_{2i}) + [k + \sum_{i=1}^{n_1} (g_{2i-1} x_{2i-1} + g_{2i} x_{2i})] \text{sgn}(s_m) \right) \quad (33)$$

여기서,

$$k > \varepsilon_1$$

$$\begin{aligned} g_{2i-1} &= -c_{2i} (2\omega_{0i-1} \beta_{i-1} \omega_{0i-1} + \beta_{i-1}^2 \omega_{0i-1}^2), \quad \beta_{00} = 0 \\ g_{2i} &= -2c_{2i} (\gamma_{i-1} \zeta_{0i-1} \omega_{0i-1} + \zeta_{0i-1} \beta_{i-1} \omega_{0i-1} + \gamma_{i-1} \zeta_{0i-1} \beta_{i-1} \omega_{0i-1}), \quad \gamma_{00} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

여기서 ε_1 은 양의 상수이다. 따라서 제안된 제어기(33)을 이용하여 슬라이딩모드 존재조건이 만족함을 다음과 같이 쉽게 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_m \dot{s}_m &= s_m \left(\sum_{i=1}^{n_1} [(r_{2i-1} + d_{2i-1})x_{2i-1} + (r_{2i} + d_{2i})x_{2i}] + DT \right) \\ &= s_m \left(\sum_{i=1}^{n_1} [(r_{2i-1} + d_{2i-1})x_{2i-1} + (r_{2i} + d_{2i})x_{2i}] - \sum_{i=1}^{n_1} (r_{2i-1} x_{2i-1} + r_{2i} x_{2i}) - [k + \sum_{i=1}^{n_1} (g_{2i-1} x_{2i-1} + g_{2i} x_{2i})] \text{sgn}(s_m) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} (d_{2i-1} x_{2i-1} + d_{2i} x_{2i}) s_m - \left| \sum_{i=1}^{n_1} (g_{2i-1} x_{2i-1} + g_{2i} x_{2i}) \right| |s_m| - k |s_m| \\ &< 0 \end{aligned} \quad (35)$$

위치 상태 벡터는 앞에서 언급했던 측정장비들로부터 얻을 수 있다고 가정하였다. 즉, 위치 상태 변수와 측정된 출력에 관계되는 부행렬이 nonsingular이며 역행렬이 존재하기 때문에 위치 상태 변수는 다음과 같이 출력 행렬로 표현할 수 있다.

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n+2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

여기서 \bar{Y} 는 $(n+1) \times (2n+2)$ 출력행렬이다. 따라서 공칭시스템 (A_0, B)을 고려하여 각 모드 별로 부시스템으로 분리하여

reduced-order 관측기를 설계하여 측정하기 어려운 속도 상태 벡터들을 예측할 수 있다. 관측기의 자세한 설계법은 참고문헌 [12]에 잘 기술되어 있으며 결과 속도 상태변수를 다음과 같이 예측할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= k_{i1}z_i + k_{i2}x_{2i+1} + k_{i3}T \\ \hat{x}_{2i+2} &= L_i x_{2i+1} + z_i, \quad i=0,1,2, \dots, n \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 $z_i (= \hat{x}_{2i+2} - L_i x_{2i+1})$ 는 변환된 상태변수의 예측값, $k_{i1} (= \lambda_i)$ 은 관측기 계인의 요구 고유치, k_{i2} 는 $\lambda_i L_i - \omega_{0i}^2$, k_{i3} 는 $\phi_i'(0)/I_i$, L_i 는 연속 관측기의 계인, \hat{x}_{2i} 는 속도 상태 변수 x_{2i} 의 예상치이다.

시스템에 범위를 알고 있는 파라미터 변화가 존재하는 경우 위에서 설계된 관측기가 강건한 응답을 나타내는가를 조사해 보기 위하여, i 번째 속도 상태 변수의 실제값과 예측값의 오차를 e_{wi} 라 정의하면 관측기오차방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_{wi} &= \dot{x}_{2i} - \dot{\hat{x}}_{2i} \\ &= \lambda_i e_{wi} + (-d_{2i-1}/c_{2i})x_{2i-1} + (-d_{2i}/c_{2i})x_{2i} \\ &= \lambda_i e_{wi} + \mu_i \end{aligned} \quad (38)$$

상태벡터의 크기가 한정되었고($\|x\| < \varepsilon_2$) 파라미터의 크기가 한정되었으므로 상수 ε_{3i} 가 존재하여 시간 $t \geq 0$ 동안 $\|\mu_i\| < \varepsilon_{3i}$ 를 만족한다. 또한 공칭시스템에서 해, $e_{wi}(t) = e_{wi}(0) \exp[\lambda_i t]$ 가 존재한다. 따라서 관측기 계인의 요구고유치가 음의 실수라면 관측기오차방정식 (38)은 uniformly bound가 된다. 즉,

$$\begin{aligned} e_{wi}(t) &= e_{wi}(0) \exp[\lambda_i t] + \int_0^t \exp[\lambda_i(t-\tau)] \mu_i(\tau) d\tau \\ \|e_{wi}(t)\| &\leq \|e_{wi}(0)\| \exp[\lambda_i t] + \varepsilon_{3i} \int_0^t \exp[\lambda_i(t-\tau)] d\tau \\ &= \|e_{wi}(0)\| \exp[\lambda_i t] + \frac{\varepsilon_{3i}}{\lambda_i} (1 - \exp[\lambda_i t]) \end{aligned} \quad (39)$$

$\lambda_i < 0$ 이므로 상수 ε_{4i} 가 존재하여 시간 $t \geq 0$ 동안 $\|e_{wi}(t)\| < \varepsilon_{4i}$ 이다. 만일 $\lambda_i \rightarrow -\infty$ 면, $t \rightarrow \infty$ 에 따라 $\|e_{wi}(t)\| \rightarrow 0$ 된다.

5. 시뮬레이션 결과 및 고찰

제안된 방법의 우수한 제어성능을 입증하기 위하여 Table 1로 주어지는 물리적 특성 및 모델 변수를 갖는 단일 링크 탄성 arm을 고려하였다. 공칭 시스템의 고유주파수는 특성 방정식으로 부터 계산되었으며 유연 모드의 감쇠비는 참고문헌[2]을 참조하여 설정하였다. 스펬오버(spillover)문제와 연계하여 각 진동 모드가 시스템응답에 얼마나 영향을 미치는가를 검토한 후, 주 제어모드로서 강체모드와 첫번째 진동모드를 고려하였다.

공칭 시스템의 개회로(open-loop)응답을 Fig. 2에 나타내었다. 첫째 진동모드의 진동은 초기조건을 $x(0) = [0 \ 0 \ 0.354 \ 0]^T$ 로 설정하여 얻었다. 그림으로부터 첫번째 진동모드의 진폭이 오직 감쇠비 0.02를 갖고 감소 되는 것을 알 수 있다.

제어응답을 얻기 위한 컴퓨터 시뮬레이션에서 다음과 같은

Table 1. Physical properties and model parameters of the arm

Parameters	Values
Length (l)	1.0 m
Thickness (h)	0.002 m
Width (b)	0.02 m
Mass per unit length (ρ)	0.106 kg/m
Young's modulus (E)	64 GPa
Moment of inertia of the hub (I_H)	0.023 kgm ²
First-mode damping ratio (ζ_1)	0.02
First-mode natural frequency (ω_1)	2.47 Hz

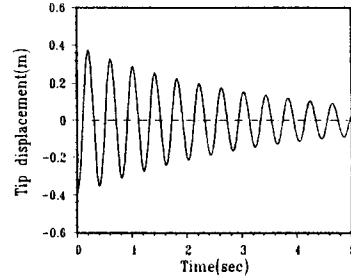


Fig. 2 Open-loop tip displacement of the nominal system

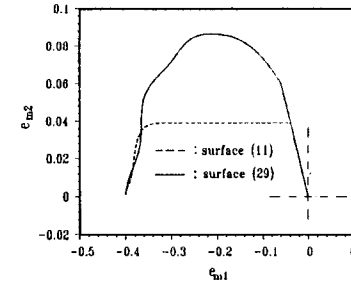
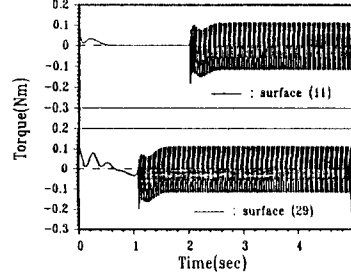
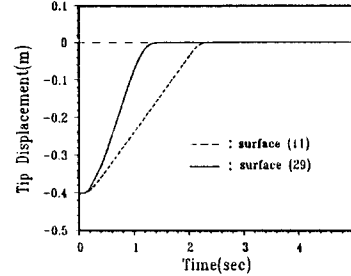


Fig. 3 Controlled responses without the parameter variations: ($\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -5$)

수치들을 사용하였다: $x(0) = [-0.4 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\dot{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $Q = \text{diag}(0.032, 10, 0.15)$, $R = 0.1$, $k = 0.2$. 사용된 Q 와 R 하에서 슬라이딩모드 운동중 시스템의 고유치는 0, -11.60 , $-11.25 \pm 8.66i$ 로 계산되었다. 제안된 제어기의 슬라이딩 서피스 설계 변수들은 거주시간 0.001초, 스위칭 경계영역의 두께 0.005, 회전이동시 필요한 경계영역의 두께 0.01, 평행이동시 필요한 경계영역의 두께 0.015로 설정하였다.

Fig. 3은 (λ_1, λ_2) = $(-5, -5)$ 사용시 파라미터 변동이 존재하지 않을 때 시스템의 제어응답을 나타낸다. 제안된 제어기의 RP가 매우 빠르게 정착됨과 불연속 제어입력의 크기는 같으나 서피스에 빨리 도달하여 스위칭이 먼저 일어남을 알 수 있다. 이는 $e_{m1} - e_{m2}$ 상태공간에서 볼 수 있듯이 e_{m2} 로 표현되는 각 모드의 속도상태변수 절댓값의 크기가 증가하였기 때문이다.

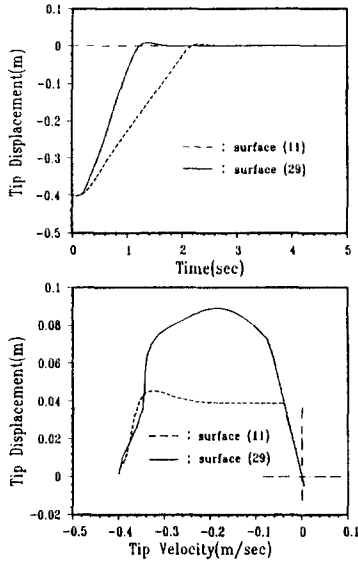


Fig. 4 Controlled responses with the parameter variations : ($\lambda_1 = -50, \lambda_2 = -50$)

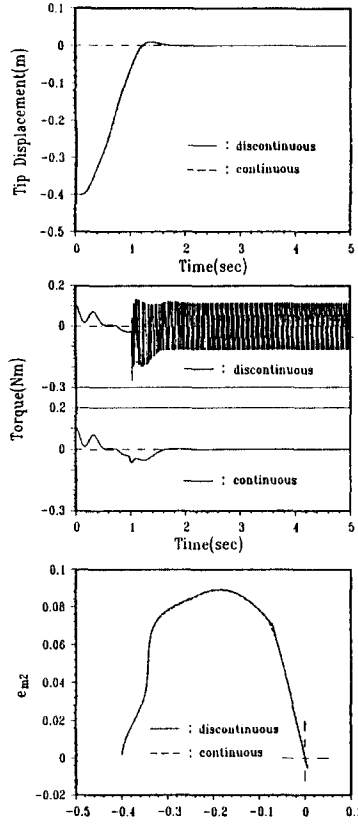


Fig. 5 Comparison of controlled responses between discontinuous and continuous controllers : ($\lambda_1 = -50, \lambda_2 = -50$)

Fig. 4는 $(\lambda_1, \lambda_2) = (-50, -50)$ 사용시 파라미터 변동이 20% 존재하는 경우에 시스템의 제어응답을 나타낸다. 여기서 첫 번째 고유 진동수의 20% 감소는 arm 질량의 약 40%에 해당

하는 선단질량을 부가한 것과 같다. 파라미터 변동으로 인하여 약간의 overshoot가 존재한다.

Fig. 5은 슬라이딩 서피스 (29)를 적용하여 20% 파라미터 변동 존재시 불연속 제어기와 연속형 제어기를 사용한 경우 제어 시스템 응답을 비교한 것이다. 연속형 제어기 사용시 불연속 제어기의 사용시와 정착되는 시간과 양상이 일치하며 바람직하지 않은 채터링이 제거되는 것을 확인 할 수 있다. 불연속 제어기를 사용시 RP가 서피스에 조금 먼저 도달하는 것을 $e_{m1} - e_{m2}$ 상태공간에서 고찰할 수 있는데 이것은 연속형제어기가 리칭상태 동안에 파라미터 변동에 조금 더 영향을 받기 때문이다.

6. 결론

본 연구에서는 파라미터 변동이 존재하는 단일 링크 탄성 arm의 선단위치 제어를 수행하기 위하여 강건한 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였다. 최적설계 방법으로 슬라이딩 서피스를 설계하여 슬라이딩 모드 운동중 시스템의 안정성을 보장하였다. 임의로 주어지는 초기조건에 적용하는 시간 변화 슬라이딩 서피스를 확장 적용하여 리칭 상태를 감소시켜 시스템의 강건성을 증가시켰다. 비연계 저차 관측기로 부터 계산된 속도 상태 변수들을 이용, 파라미터 변동을 고려한 슬라이딩모드 제어기를 설계하였다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안된 제어기의 사용으로 더욱 강건하고 우수한 제어성능을 얻을 수 있음을 입증하였다. 본 연구에서 제안된 슬라이딩 서피스 설계법과 제어기법은 외란 토크가 존재하는 시스템에도 확장될 수 있다.

참고문헌

- [1] W. J. Book, and M. Majette, "Controller Design for Flexible, Distributed Parameter Mechanical Arms via Combined State Space and Frequency Domain Techniques," *ASME Journal of Systems, Measurement and Control*, Vol. 105, pp. 245-254, 1983.
- [2] E. Schmitz, "Experiments on the End-point Position Control of a Very Flexible One-Link Manipulator," Ph. D. thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, April 1985.
- [3] K. S. Yeung, and Y. P. Chen, "Regulation of a One-Link Flexible Robot Arm using Sliding Mode Technique," *Int. Journal of Control*, Vol. 49, No. 6, pp. 1965-1978, 1989.
- [4] K. S. Yeung, and Y. P. Chen, "Sliding Mode Controller Design of a Single-Link Flexible Manipulator under Gravity," *Int. Journal of Control*, Vol. 52, No. 1, pp. 101-117, 1990.
- [5] K. S. Yeung, and Y. P. Chen, "Sliding Mode Control of Multi Flexible Manipulators," *Int. Journal of Control*, Vol. 54, No. 2, pp. 257-278, 1991.
- [6] P. J. Nathan, and S. N. Singh, "Sliding Mode Control and Elastic Mode Stabilization of a Robotic Arm with Flexible Links," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 113, pp. 669-676, Dec. 1991.
- [7] W. T. Qian, and C. C. H. Ma, "A New Controller Design for Flexible One-link Manipulator," *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol 37, No. 1, Jan. pp. 132-137, 1992.
- [8] J. J. Slotine, and S. S. Sastry, "Tracking Control of Non-linear Systems using Sliding Surfaces with Application to Robot Manipulators," *Int. Journal of Control*, Vol. 38, No. 2, pp. 465-492, 1983.
- [9] V. L. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22 No. 2, pp. 212-222, 1977.
- [10] S. B. Choi, C. C. Cheong, and D. W. Park, "Moving Switching Surfaces for Robust Control of Second-Order Variable Structure Systems," *Int. Journal of Control*, Vol. 58, No. 1, pp. 229-245, 1993.
- [11] B. Drazenovic, "The Invariance Conditions in variable structure systems," *Automatica*, Vol 5, pp. 287-296, 1969.
- [12] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, New-York: CBS College Publishing, pp. 354-365, 1984.