

다변수 LQG/LTR 설계에서 스케일링 행렬에 의한 강인성 여유 계산

강진식
제주대학교 공과대학 통신공학과

Computation of Robustness Margins in Multivariable LQG/LTR Design When the Plant is Scaled

Kang Jin Shig
Department of Telecommunication Eng., Cheju National University

Abstract

In MIMO design, input and output units are different from each other. By this reason, the effect of larger units to smaller one is not trivial and there is no method of proper scaling, optimal scaling.

In this paper, robust stability of MIMO LQG/LTR design are analysed when the plant inputs and outputs are scaled. The upper bound of model error to guarantee the robust stability is obtained, and gain margin and phase margins are computed with respect to scaling matrices.

I. 서론

다변수 제어시스템에서 입력변수들과 출력변수들의 단위계는 서로 다르며 이로인하여 큰 단위계의 변수가 작은 단위계의 변수에 미치는 영향은 커지게 된다. 또한 이러한 문제는 제어대상인 플랜트 모델에 의존하여 최적인 Scaling 방법 및 조건이 없으며 적절히 스케일링된 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 설계하여도 임플리멘테이션(Implementation) 구조에서는 안정도 강인성이 보장되지 않는다.^[1]

본 논문에서는 다변수 LQG/LTR 설계에서 입력단과 출력단에 스케일링을 하였을 경우 이 스케일링 행렬에

대한 안정도 강인성을 분석한다. 목표루프를 칼만필터로 하였을 때 임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성을 유지하기 위한 모델오차의 상한을 구하며 이에 따르는 안정도 강인성 여유를 계산한다. 또한 스케일링이 되지 않은 경우와 스케일링 된 경우의 안정도 여유를 비교하며 목표루프가 LQ조정기인 경우에도 모델오차의 상한 및 안정도 여유에 대하여 계산한다.

II. 본론

(1) 페루프 시스템 설계에서 안정도 강인성

모델오차가 존재하는 경우에 대하여 안정도 강인성 및 성능 강인성을 보장하기 위해서는 다음식을 만족하여야 한다.^[2]

$$\overline{\sigma}[C(j\omega)] < \frac{1}{\overline{\sigma}[E(j\omega)]} < \frac{1}{l_m(j\omega)} \quad (1.a)$$

$$\overline{\sigma}[S(j\omega)] < \frac{1}{P_m(j\omega)} \quad (1.b)$$

여기서 $E(j\omega)$ 는 주파수 영역에서의 곱셈형 모델오차로 최대오차 l_m 에 대하여 $\overline{\sigma}[E(j\omega)] < l_m(j\omega)$ 를 만족하며 $P_m(j\omega)$ 는 최대 허용성능을 의미한다. 그리고 위와같은 모델오차에 대한 이득여유 및 위상여유는 다음식으로 구할 수 있다.^[3]

$$G_M = \frac{1}{1 + l_m(j\omega)} \quad (2.a)$$

한다.

제어시스템이 안정하다면 플랜트 출력단 (i)에서 절단한 LQG 보상기의 극한 거동은 다음과 같다.^[2.5]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(s) \rightarrow [C(sI-A)^{-1}B]^{-1} C(sI-A)^{-1}H = G_P^{-1}(s)G_F(s) \quad (9)$$

이 극한 거동은 주파수 s에 대하여 불연속적으로 수렴한다. 그리고 루프전달함수의 극한거동은^[2.5]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G_F(s)K_P(s) = G_F(s) \quad (10)$$

으로 된다. 따라서 식(10)은 루프전달함수가 LQG/LTR 설계변수 ρ 가 0으로 접근할 때 칼만필터 루프로 회복됨을 보여주고 있다. 따라서 목표루프인 칼만필터가 안정도 강인성 및 성능강인성을 만족하도록 설계된다면 루프전달함수의 특성이 목표루프의 특성을 회복하여 안정도 강인성 및 성능강인성을 보장할 수 있게 된다.

(3) Scalling문제 및 안정도 강인성

다변수 제어시스템에서 입력변수들과 출력변수들의 단위계는 서로 다르며 이로인하여 큰 단위계의 변수가 작은 단위계의 변수에 미치는 영향은 커지게 된다. 또한 이러한 문제는 제어대상인 플랜트 모델에 의존하여 최적인 Scalling 방법 및 조건이 없으며 적절한 스케일링된 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 설계하여도 임플리멘테이션(Implimentation) 구조에서는 안정도 강인성이 보장되지 않는다. 플랜트의 입력단과 출력단이 스케일링된 제어구조는 그림 3과 같다.

그림에서 S_U , S_Y 는 각각 입력과 출력단의 스케일링 행렬이다. 스케일링된 입력과 출력을 각각 다음과 같이 가정하자.

$$\begin{aligned} u_s(t) &= S_U u(t) \\ y_s(t) &= S_Y y(t) \end{aligned} \quad (11)$$

이때 스케일링된 플랜트의 상태공간 표현은 다음과 같다.

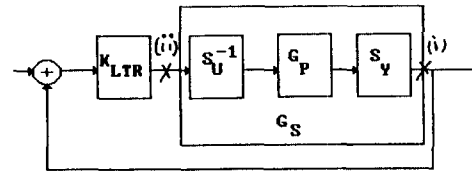


그림 3. 스케일링된 플랜트에 대한 귀환제어구조
Fig. 3. Feedback control structure for plant with scaling

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_s u_s(t) \\ y_s(t) &= C_s x(t) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $B_s = B S_U^{-1}$, $C_s = S_Y C$ 이다. 위의 동역학 식에 대하여 목표루프를 칼만필터로 선정하고 LQG/LTR을 설계할 경우 제어기의 점근적 특성은 다음과 같다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K_{LTR}(s) \rightarrow [C_s(sI-A)^{-1}B_s]^{-1} C_s(sI-A)^{-1}H = G_S^{-1}(s)G_F(s) \quad (13)$$

그리고 개루프 전달함수의 점근적 특성은

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G_S(s)K_{LTR}(s) = G_F(s) \quad (14)$$

로 된다. 식(14)에서 보여지는 바와 같이 설계시에는 개루프 전달함수가 목표루프인 칼만필터의 전달함수로 회복되어 칼만필터가 갖는 안정도 및 성능강인성을 유지한다. 임플리멘테이션 구조에서의 안정도 및 성능강인성을 분석하기 위하여 다음과 같은 귀환제어구조를 고려하자.

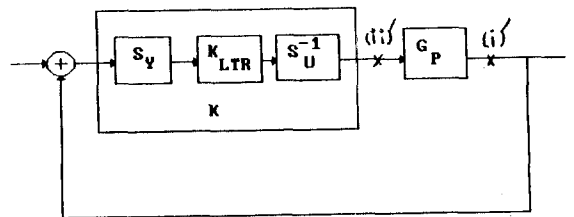


그림 4. 임플리멘테이션 구조
Fig. 4 Implementation structure

그림에서 제어기 전달함수는 다음과 같다.

$$K(s) = S\bar{U}^{-1}(s)K_{LTR}(s)S_Y \quad (15)$$

그리고 ρ 가 0으로 접근할때 제어기의 점근적 특성은

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(s) = G_F^{-1}(s)S\bar{Y}^{-1}C(sI - A)^{-1}K_F \quad (16)$$

이다. 따라서 개루프전달함수의 점근적 특성은 다음과 같다.

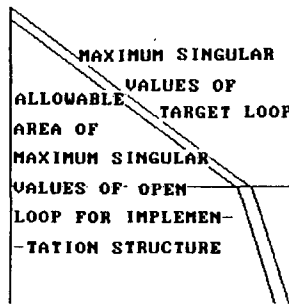
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G_F(s)K(s) = S\bar{Y}^{-1}G_F(s)S_Y \quad (17)$$

식 (17)을 특이치 부등식을 이용하면 다음과 같다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \overline{\sigma}[G_F(s)K(s)] \leq \frac{\overline{\sigma}[S_Y]}{\overline{\sigma}[S_Y]} \overline{\sigma}[G_F(s)] \quad (18. a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \underline{\sigma}[G_F(s)K(s)] \geq \frac{\underline{\sigma}[S_Y]}{\underline{\sigma}[S_Y]} \underline{\sigma}[G_F(s)] \quad (18. b)$$

식 (18)은 개루프 전달함수의 특이치가 스케일링 행렬에 의존함을 보여준다. 그림에서 보여지는 바와 같이 개루프 전달함수의 최대 특이치는 목표루프인 칼만 필터 전달함수의 최대치 궤적보다 아래에 위치하며 최소 특이치의 궤적은 위에 놓이게 되어 목표루프가 보장하는 안정도 강인성을 회복하지 못하게 됨을 알 수 있다. 이 특이치 궤적을 그림 5에 나타내었다.



그림에서 보여지는 바와 같이 개루프 전달함수의 특이치 영역은 스케일링 행렬에 의하여 결정되며 일반적으로 스케일링행렬의 최대특이치와 최소특이치의 비는 조건이 나쁜 플랜트에서 큰값을 갖는다.

임플리멘테이션 구조에서의 안정도 강인성 여유를 구하기 위하여 설계구조에서의 모델오차를 I_m 이라고 가정하자. 이 모델오차가 식(6)의 안정도 강인성 조건을 만족한다고 하면 임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성 조건식의 점근적 특성은 다음같이 표현될 수 있다.

$$\underline{\sigma}[I + (G_F(j\omega)K(j\omega))^{-1}] \geq \frac{\underline{\sigma}[S_Y]}{\overline{\sigma}[S_Y]} \underline{\sigma}[I + G_F^{-1}(j\omega)] \quad (19)$$

여기서 $\underline{\sigma}[I + G_F^{-1}(j\omega)] > 1 \geq I_m$ 을 만족하므로 임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성을 보장하기 위한 모델오차의 한계는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$I_m' = \frac{\underline{\sigma}[S_Y]}{\overline{\sigma}[S_Y]} I_m \quad (20)$$

따라서 임플리멘테이션 구조에서의 이득여유 및 위상여유는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$G.M. = 20 \log_{10} \frac{1}{1 \pm \frac{\underline{\sigma}[S_Y]}{\overline{\sigma}[S_Y]} I_m} \quad (21. a)$$

$$P.M. = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{(\frac{\underline{\sigma}[S_Y]}{\overline{\sigma}[S_Y]})^2 I_m^2}{2} \right] \quad (21. b)$$

그림 5. 개루프 전달함수의 한계영역

Fig. 5. Boundary area of open loop transfer function

식 (21)에서 보이는 바와 같이 설계구조에서는 모델오차 l_m 에 대하여 위상여유 및 이득여유를 갖지만 임플리멘테이션 구조에서는 이보다 작은 l'_m 에 대하여 이득여유 및 위상여유를 갖게 된다.

(4) 목표루프가 LQ조정기일때의 요약

그림 3의 (ii)를 절단한 루프전달함수는 $K(s)G(s)$ 로 되며 목표루프를 LQ 조정기로 선정하면 LQG/LTR을 설계할 때 제어기의 점근적 특성은 다음과 같다.

$$\lim_{p \rightarrow 0} K_{LTR}(s) \rightarrow Kc(sI-A)^{-1}Bs [Cs(sI-A)^{-1}Bs]^{-1} = G_{LQ}(s)G_S^{-1}(s) \quad (22)$$

따라서 개루프 전달함수의 점근적 특성은

$$\lim_{p \rightarrow 0} K_{LTR}(s)G_S(s) = G_{LQ}(s) \quad (23)$$

이다. 임플리멘테이션 구조에서 제어기 전달함수는 다음과 같은 점근적 특성을 갖는다.

$$\lim_{p \rightarrow 0} K(s) = S_U^{-1}G_{LQ}G_S^{-1}(s)S_Y \quad (24)$$

따라서 개루프전달함수의 점근적 특성을 특이치 부동식을 이용하면 다음과 같다.

$$\lim_{p \rightarrow 0} \overline{\sigma}[K(s)G_P(s)] \leq \frac{\overline{\sigma}[S_U]}{\overline{\sigma}[S_Y]} \overline{\sigma}[G_{LQ}(s)] \quad (25.a)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \underline{\sigma}[K(s)G_P(s)] \geq \frac{\underline{\sigma}[S_U]}{\underline{\sigma}[S_Y]} \underline{\sigma}[G_{LQ}(s)] \quad (25.b)$$

임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성 조건식의 점근적 특성은 다음같이 표현될 수 있다.

$$\underline{\sigma}[I + (K(j\omega)G_P(j\omega))^{-1}] \geq \frac{\underline{\sigma}[S_U]}{\overline{\sigma}[S_Y]} \underline{\sigma}[I + G_{LQ}(j\omega)] \quad (26)$$

여기서 $\underline{\sigma}[I + G_{LQ}(j\omega)] > 1 \geq l_m$ 을 만족하므로 임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성을 보장하기 위한 모델오차의 한계는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$l'_m = \frac{\overline{\sigma}[S_U]}{\overline{\sigma}[S_Y]} l_m \quad (27)$$

따라서 임플리멘테이션 구조에서의 이득여유 및 위상여유는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$G.M. = 20 \log_{10} \frac{1}{1 + \frac{\overline{\sigma}[S_U]}{\overline{\sigma}[S_Y]} l_m} \quad (28.a)$$

$$P.M. = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{(\frac{\overline{\sigma}[S_U]}{\overline{\sigma}[S_Y]})^2 l_m^2}{2} \right] \quad (28.b)$$

(5) 예제

예제 1. 목표루프를 칼만필터로 선정하였을 경우 스케일링 행렬에 대한 안정도 여유를 고찰하자. 그림 6에 임플리멘테이션 구조에서 $||I_m|| = 1$ 인 경우 특이치 비에 대한 이득여유 및 위상여유를 보였다.

그림에서 보이는 바와 같이 특이치의 비가 1인 스케일링이 없는 경우에는 $-6 \sim \infty$ dB의 이득여유와 $\pm 60^\circ$ 의 위상여유를 갖지만 특이치의 비가 1/2인 경우에는 $-3.5128 \sim 6.0206$ dB의 이득여유와 $\pm 28.9550^\circ$ 의 위상여유를, 1/10인 경우에는 $-0.8279 \sim 0.9151$ dB의 이

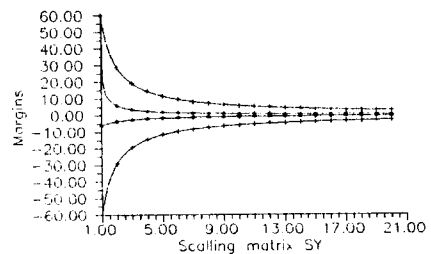


그림 6. 임플리멘테이션 구조에서 이득여유 및 위상여유

Fig. 6. Gain and phase margins of implementation structure

득여유와 $\pm 5.732^\circ$ 의 위상여유를, 그리고 특이치의 비가 1/20인 경우에는 $-0.4238 \sim 0.4455$ dB의 이득여유와 $\pm 2.8651^\circ$ 의 위상여유를 갖게 된다. 따라서 목표루프가 충분한 이득여유 및 위상여유를 갖도록 설계되고 루프 전달회복이 일어나도록 LQG/LTR을 설계하여도 임플리멘테이션 구조에서는 안정도 강인성 및 성능 강인성을 보장하지 못한다.

예제 2. 실제 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 설계할 때 설계구조와 임플리멘테이션 구조에서의 안정도 강인성을 비교하자. 설계플랜트 모델은 터보팬 엔진으로 동역학 변수 및 설계 변수, 스케일링 행렬들은 부록에 나타내었다.^[1] 그림 7에 $I+G_F^{-1}(s)$ 와

$I+(G_P(s)K(s))^{-1}$ 의 최소특이치 궤적을 보였다.

그림에서 보이는 바와 같이 목표루프는 안정도 강인성을 유지하지만 임플리멘테이션 구조에서는 안정도 강인성을 보장하지 않음을 알 수 있다.

III. 결론

다변수 제어시스템에서 입력변수들과 출력변수들의 단위계는 서로 다르며 이로인하여 큰 단위계의 변수가 작은 단위계의 변수에 미치는 영향은 커지게 된다. 또한 이러한 문제는 제어대상인 플랜트 모델에 의존하여 최적인 Scalling 방법 및 조건이 없으며 적절히 스케일링된 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 설계하여도 임플리멘테이션(Implimentation) 구조에서는 안정도 강인성이 보장되지 않는다.

본 논문에서는 다변수 LQG/LTR 설계에서 입력단과 출력단에 스케일링을 하였을 경우 이 스케일링 행렬에 대한 안정도 강인성을 분석하였다. 목표루프를 칼만필터로 하였을 때 임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성을 유지하기 위한 모델오차의 상한은 설계구조에서의 모델오차에 비하여 아주 작아진다. 따라서 안정도 강인성 여유 역시 설계 구조에 비하여 아주 작은값이 된다. 목표루프가 LQ조정기인 경우에도 모델오차의 상한 및 안정도 여유에 대하여 계산하였다.

향후 연구 과제로는 스케일링 된 플랜트에 LQG/LTR을 설계할 경우 안정도 강인성이 보장되지 않는 문제점을 해결하기 위한 스케일링 방법의 개선과 스케일링 영향을 받지 않는 설계 방법에 대한 연구가 필요하다.

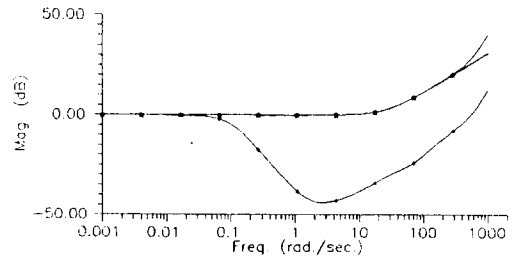


그림 7. $I+G_F^{-1}(s)$ 와 $I+(G_P(s)K(s))^{-1}$ 의 최소특이치

Fig. 7. Minimum singular value plots for $I+G_F^{-1}(s)$ and $I+(G_P(s)K(s))^{-1}$

IV. 참고문헌

- [1] Sanjay Garg, "Turbofan Engine Control System Design Using the LQG/LTR Methodology", ACC, 1985
- [2] J.C. Doyle and G. Stein, "Multivariable Feedback Design : Concept for a Classical / Morden Synthesis," IEEE Trans. Auto. Control, vol. AC-26, No.1, pp 4-16, 1981.
- [3] N.A. Lethomaki, N.R. Sandwell and M. Athan, "Robustness Results in Linear Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs," IEEE Trans. Auto. Control, AC-26, pp 75-92, 1982.
- [4] D. Brett Ridgely, Siva S. Banda, Timothy E. McQuade, and P.J. Lynch, "Linaer Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery Methodology for an Unmanned Aircraft" Journal of Guidance, VOL. 10, No. 1, Jan.-Feb.,1987.
- [5] 김 중식, "선형 제어시스템 공학", 청문각, 1991

부록

$$A = [-3.25E+0, 1.98E+0, 8.03E-1, 1.94E-1, 1.53E+0, 1.65E+0, 0, 0, \\ -4.73E-1, -2.88E+0, 1.63E+0, 2.30E-1, 2.27E+0, -1.00E+0, 0, 0, \\ 4.64E-2, 3.66E-2, -8.99E-1, 7.38E-4, 7.44E-3, 2.48E-3, 0, 0, \\ -9.72E-4, -1.32E-2, 5.35E-2, -2.76E-1, 8.16E-4, -4.17E-3, 0, 0, \\ -1.54E-3, -4.49E-2, 1.81E-1, 3.14E-2, -1.00E+0, -1.43E-2, 0, 0, \\ 1.43E-2, 8.82E-3, 1.34E-1, 8.86E-3, 7.01E-2, -7.02E-1, 0, 0, \\ 1.43E-4, 1.72E-5, 4.91E-5, 1.16E-5, 8.82E-5, 9.24E-5, -1.00E+2];$$

$$B = [6.58E+2, 2.76E+1; \\ 7.56E+2, 2.10E+1; \\ 2.69E+0, -2.68E-1; \\ 2.71E+1, 4.32E-1; \\ 9.38E+1, 1.48E+0; \\ 2.70E+1, 3.13E-1; \\ 4.17E-2, -7.72E-3];$$

$$C = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 100];$$

$$D = [0, 0; \\ 0, 0];$$

$$S_Y = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix}$$

$$S_U = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.0023 \end{bmatrix}$$

$$G_{BW} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \mu I \quad (\mu = 0.5)$$

$$L = \begin{bmatrix} C_S^T (C_S C_S^T)^{-1} G_{BW} \\ -(C_S A_S^T C_S)^{-1} G_{BW} \end{bmatrix}$$

$$R = \frac{1}{\rho} \cdot (\rho = 10^{-7}) \quad Q = C_S^T C_S$$