

# CADET를 이용한 가로방향 힘의 Saturation에 대한 미사일의 성능해석

김진호  
인하대학교 항공우주공학과

## Covariance Analysis Describing Function Technique for Missile Performance

Jinho Kim  
Aerospace Engineering Department, Inha University

### 요약

CADET is used to analyze the performance of the missile. Miss distance is calculated for a given lateral fin force saturation level due to the aerodynamic characteristics, target acceleration, and glint and fading noises which is assumed as Gaussian noises. As  $\alpha - \beta$  filter is studied to attenuate the noises, the results are compared with those of without filter. For the easy simulation, the transfer function of a discrete  $\alpha - \beta$  filter is converted into the continuous model. Simulation results show that the results of CADET simulation is similar to those of Monte-Carlo simulation. Moreover CADET is the better in computing time demand.

### 1 개요

일반적으로 비선형특성을 갖는 시스템의 성능 해석은 Monte-Carlo 시뮬레이션을 통하여 구해졌다. 이 방법은 우선 주어진 확률분포를 갖는 여러가지 입력을 사용하여 출력을 구한후에 출력의 확률분포도를 구하여 시스템의 성능을 해석하게된다. 이 방법의 단점은 우선 computer 시뮬레이션을 가능한 한 많이 수행하여야하고 적절한 입력을 만들어 내어야 하며 부가적인 출력해석을 필요로 한다. 특히 여러종류의 입력들이 있을 경우에는 시뮬레이션의 숫자는 기하급수적으로 증가하게 된다.

이런 여러가지 단점들을 보완하기 위하여, 비선형 요소들 Describing Function으로 변환시킨후에 직접 Covariance 미분방정식을 풀어서 시간에 대한 출력들의 표준편차를 구하여 전체시스템의 성능을 해석할수있다. 이 방법으로 미사일 Fin의 항공역학적 특성에 의한 가로방향 힘의 Saturation 요소들 Describing Function으로 변환하여 일정한 시정수를 갖는 목표물추적시에 Miss Distance의 표준편차를 구하였다. 본 연구에서는 이에 첨가로 line of sight의 정확도를 떨어뜨리는 glint noise 나 fading noise 같은 외부 noise를 줄이기 위하여 알파-베타 필터를 사용하였다. 또한 이에 대한 성능해석과 필터의 cut-off 주파수 설계를 CADET 시뮬레이션을 통하여 수행하였다.

CADET은 여러가지 다르고 많은 입력의 미분방정식을 푸는 대신에 평균값과 표준 편차를 변수로 하는 미분방정식을 푸는 방법으로서 주어진 입력의 표준편차에 대하여 한번의 시뮬레이션을 통하여 출력의 표준편차를 얻을 수 있게된다.

알파-베타 필터는 Discrete Time 필터이므로 그대로 시뮬레이션 모델을 만들면 hybrid 시스템이 되어 시뮬레이션이 어려워지게 된다. 이 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 Discrete time Transfer Function을 continous time transfer function 모델로 변환시켜 시뮬레이션에 사용하였다.

이 시뮬레이션의 출력은 시간에 따른 가로방향 힘과 여러 상태변수들(Miss Distance, Miss Distance Velocity, Commanded Ac-

celeration 과 line of sight angle)와 표준편차이다. 알파-베타 필터에 대하여서는 주어진 필터특성을 만족시키는 알파와 베타의 값이 주어진 필터의 sampling 시간과 감쇄비와 cut-off 주파수에 대하여 계산된다.

### 2 Covariance Analysis Describing Function Technique

CADET는 선형시스템의 표준편차 해석방법과 다중입력의 describing function을 혼합한 방법으로 비선형 시스템의 통계해석을 직접하는 방법이다. 여기서 얻어지는 해는 물론 근사치이지만 계산용량은 Monte Carlo 방법에 비하여 훨씬 적다. 특히 한쪽으로 치우치지 않은 대칭형의 비선형요소에 대하여서는 입력의 평균값이 변하지 않으므로 평균값에대한 미분방정식은 풀지않아도 된다. 비선형요소는 입력의 통계적인 확률특성과 표준편차와 평균값과 주어진 비선형 특성에 의해서 적절한 describing function으로 대체되었다.

#### 2.1 Multiple Describing Function

일반적인 시스템의 형태는 그림 1과 같이 주어지는데  $x$ 는 상태변수 벡터이고  $\omega$ 는 입력벡터로써 상수이고  $f(x)$ 는 비선형 벡터함수이다. [5] 여기서의 목적은  $x(t)$ 의 평균값이고 2차모멘트값등의 통계를 결정해야 한다.

여기서 이용된 가정은  $m$ 은 평균값이고  $r$ 은 평균이 영인 불규칙 변수(random number) 라고 할때 이를 사용하여 대략화된 출력함수  $f_a(x)$ 를 한개는  $m$ 에 대한 선형함수와 다른 한개는  $r$ 에 대한 선형함수의 합으로 나타내었다. 이때 multiple describing function 이득  $N_m$ 과  $N_r$ 을  $f(x) - f_a(x)$ 의 mean square를 극소화 시키도록 다음과 같이 선택한다.

$$e = f(x) - f_a(x) = f(x) - N_m m - N_r r \quad (1)$$

$$N_m(m, S)m = E[f(x)] \quad (2)$$

$$N_r(m, S) = E[f_a(x)]S^{-1} \quad (3)$$

여기서  $S(t)$ 는  $E[r(t)r(t)^T]$  이고 덧셈의 오른쪽항의 기대값을 구하기 위해서는  $x$ 의 확률분포가 필요하다. 여기서는  $x$ 가 Gaussian 확률분포를 갖는다고 가정되었지만 Gaussian이 아니라도 필터를 통과한 대부분의 변수들이 Gaussian에 가깝게 되므로 Gaussian이라고 가정하는것이 좋다. 그러면 미분방정식은

$$\dot{m} = N_m(m, S)m + b \quad (4)$$

$$\dot{S} = N_r(m, S)S + SN_r(m, S) + Q \quad (5)$$

여기서

$$E[u(t)u(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau)$$

$$b = E[w(t)]$$

$u$ 는 잡음  $w$ 의 평균값이 0인 부분이고 위의 미분방정식에서 초기조건도  $C_x(0)$ ,  $m(0)$ , 그리고  $S(0) = E[r(0)r^T(0)]$ 에 의해 결정된다. 위의 과정을 통해 미분방정식을 풀면 각각의 상태변수들의 통계분포를 직접 구할 수 있다.

이 방법의 한계는 우선 확률분포를 Gaussian이라 가정했을때 확률분포가 다르게 되며 그에 따른 확률로써 표시하여야 한다. 만일 여러 가지 확률분포가 중첩된 상태의 경우에는 다음과 같이 joint function의 선형합으로써  $N_m$ 과  $N_r$ 을 다시 계산할 수 있다.

$$p(x) = ap_1(x) + (1-a)p_2(x) \quad \text{where } 0 \leq a \leq 1 \quad (6)$$

$$N_m(b, \sigma) = aN_{m_1}(b, \sigma_1) + (1-a)N_{m_2}(b, \sigma_2) \quad (7)$$

$$N_r(b, \sigma) = \alpha N_{r_1}(b, \sigma_1) + (1-\alpha)N_{r_2}(b, \sigma_2) \quad (8)$$

그림 3에서와 같이 미사일의 Fin에 의한 비선형 요소는 항공역학의 특성으로부터오는 가로방향의 포화현상에 의하여 일어난다. (그림 1) 이 비선형요소들 다음과 같이 describing function으로 변환시킬 수 있다.

$$f_{nr}(\sigma_x, n_{LIM}) = \text{erf}\left(\frac{n_{LIM}}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) \quad (9)$$

입력신호가 sine 함수와 같이 주기적인 함수이면 Describing function의 정확도와 안정성은 불확실하게 된다. 그러나 미사일 추적물의 기동력은 미사일이 추적하는 짧은 시간동안에 주기적인 기동을 거의 할 수 없으므로 Describing function을 시뮬레이션에 사용하여 문제가 없을 것이다.

### 3 $\alpha - \beta$ filter

Kalman filter와는 다르게  $\alpha - \beta$  filter는 고전적인 설계방법으로 필터가 주어진 Bandwidth와 감쇄비를 갖도록  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 구하는 방법으로서 필터의 구조는 그림 2로 나타낼 수 있다. 이 필터의 특성방정식의 연속적인 형태는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{K(s-z)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (10)$$

$$K = \omega_n(2\xi - \omega_n \Delta T), \quad z = -\frac{\omega_n}{2\xi - \omega_n \Delta T} \quad (11)$$

$$\alpha = \omega_n \Delta T(2\xi - \frac{\omega_n \Delta T}{2}), \quad \beta = (\omega_n \Delta T)^2$$

여기서  $\omega_n$ 은 필터의 bandwidth이고  $\xi$ 는 감쇄비,  $\Delta T$ 는 sampling time이고, 최적의  $\alpha$ 와  $\beta$ 값이 식을 통하여 계산이 된다. 개발된 시뮬레이션은 자동적으로 주어진 bandwidth와 감쇄비를 따른  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 값이 구해지도록 프로그램 되어 있다. 그림 3과 4는  $\alpha - \beta$  필터의 특성을 Bode 선도이다.  $\alpha - \beta$  filter는 Constant Gain Kalman filter로서 Covariance weighting matrix를 반복적으로 계산하지 않아도 됨으로 외란의 주파수 특성을 일경우에는  $\alpha - \beta$  필터가 Kalman 필터보다 계산용 량도 작고 실제 응용시에도 훨씬 용이하다. 단지 SNR(Signal to Noise Ratio)가 시간에 따라 급격히 변할 경우에는  $\alpha - \beta$  filter의 성능이 더 이상 최적이지 아니다. 이러한 단점을 보완하기 위해서는 적응  $\alpha - \beta$  filter인  $\alpha - \beta - \gamma$  필터 또는 Kalman 필터를 사용하는 것이 낫다.

### 4 미사일의 동역학모델

본 시뮬레이션에 사용된 미사일의 수학적모델은 [2]로부터 모델을 사용하였다.  $\alpha - \beta$  필터는 Radome에서 나온 line of sight와 line of sight signal 사이에 설치되어 fading noise와 glint noise를 줄이는데 사용되도록 그림 5와 같이 설계되었다. 여기서 모든 noise는 Gaussian White Noise로 가정하였다. 이 모든 모델을 상태변수의 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x} = Fx + u \quad (12)$$

where

$$x^T = [n_T \dot{y} \ y \ x_{z1} \ x_{z2} \ D \ \dot{\lambda} \ n_L]$$

$$F = \begin{bmatrix} -2\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\xi\omega_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K(1-\alpha)}{V_c^2 t_{go}^2} & \frac{K}{V_c^2 t_{go}^2} & -\omega_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & -w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 w_2 & 0 & -w_1 w_2 & -w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 N' V_c f_{nr} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_3 \end{bmatrix}$$

$$u^T = [2\nu U_s \ 0 \ 0 \ k(U_{fn} + \frac{U_{fn}}{V_c t_{go}}) \ -kz(U_{fn} + \frac{U_{fn}}{V_c t_{go}}) \ 0 \ 0 \ 0]$$

(13)

여기서 시뮬레이션 전체모델의 계수들은 다음과 같다.  $\nu$ 는 목표물의 기동성을 나타내는 시정계수이고,  $w_1$ 는 추적안테나의 시정수이고,  $w_2$ 는 line of sight noise 필터의 시정수이고,  $w_3$ 는 미사일 autopilot의 시정수이고,  $V_c$ 는 근접속도이고,  $N'$ 는 proportional guidance gain이다. 목표물의 예상되는 가속도와 표준편차는  $b_1$ 이고, fading noise spectrum은  $fns$ , glint noise spectrum은  $gns$ 이다. 헷식으로 부터 Covariance 미분방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{P} = FP + PF^T + P \quad (14)$$

여기서

$$Q = \begin{bmatrix} 4\nu B^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2(\Phi_{fn} + \frac{\Phi_{fn}}{V_c^2 t_{go}^2}) & k^2 z(\Phi_{fn} + \frac{\Phi_{fn}}{V_c^2 t_{go}^2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 z(\Phi_{fn} + \frac{\Phi_{fn}}{V_c^2 t_{go}^2}) & k^2 z^2(\Phi_{fn} + \frac{\Phi_{fn}}{V_c^2 t_{go}^2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(15)

여기서 시뮬레이션의 입력 및 출력은 다음과 같이 정의되었다.

1. Program inputs
  - fin saturation acceleration (g)
  - time to hit the target (tf)
  - sampling time (sec) of alpha-beta filter
  - damping coefficient of alpha-beta filter
  - natural frequency (rad/sec) of alpha-beta filter
2. Outputs
  - target acceleration command
  - miss distance velocity
  - miss distance
  - filtered commanded seeker dish angle
  - actual seek dish angle
  - estimate of line of sight rate
  - actual missile lateral acceleration
3. System parameters
  - target time constant (v)
  - seeker dish angle time constant (w1)
  - LOS noise filter time constant (w2)
  - missile autopilot time constant (w3)
  - closing speed (Vc)
  - proportion guidance gain (N')
4. Noises and Target acceleration
  - fading noise spectrum (Gaussian) (fns)
  - glint noise spectrum (Gaussian) (gns)
  - target acceleration variance (b1)

## 5 시뮬레이션과 결과

입력 계수들은 다음과 같은 주어졌다.

1. System parameters
  - Seeker bandwidth,  $w_1$  20 rad/sec
  - Noise filter bandwidth,  $w_2$  10 rad/sec
  - Autopilot-airframe bandwidth,  $w_3$  10 rad/sec
  - Target maneuver bandwidth,  $2v$  0.2 /sec
  - RMS target acceleration,  $b$  161 ft/sec
  - Closing Velocity,  $v_c$  3000 ft/sec
  - Effective navigation ratio 3
  - Spectral density of Glint noise 4 ft /Hz
  - Spectral density of Fading noise 0.000001 rad/Hz
2. Inputs
  - Time of flight,  $t_f$  5 sec
  - Sampling time, 0.001 sec
  - Acceleration saturation limits 50 g
  - Alpha-Beta filter damping ratio 0.707
  - Alpha-Beta filter natural freq. 30 rad/sec

위의 시뮬레이션의 결과로서  $\alpha$ - $\beta$  필터가 없을 경우에는 miss distance는 9ft이고  $\alpha$ - $\beta$  필터가 있을 경우에는 8ft로 나왔다. 이를 통해서  $\alpha$ - $\beta$  필터를 통한 성능향상을 검증할 수 있었다. 여러가지 잡음에 대한 miss distance는 그림8에 제시되어 있다.

## 6 결론 및 제안

### 6.1 결론

- CADET은 효율적이고 시뮬레이션 시간을 줄일수있다.
- 비선형 요소는 describing function으로 대략화 하여 시뮬레이션한 결과는 Monte-Carlo 시뮬레이션 결과와 비슷하게 나왔다.
- $\alpha$ - $\beta$  filter 필터를 사용함으로써 noises에 의한 Miss Distance를 줄일수 있었다.

### 6.2 제안

- 여러가지 자동조종장치 및 완성된 미사일의 항공역학 모델에 대한 성능해석
- $\alpha$ - $\beta$  필터와 kalman 필터와의 성능해석 비교
- Adjoint 방법을 사용한 민감도 해석
- 향상된 guidance 법칙과 target 모델에 대한 성능해석

## 참고 문헌

- [1] Gelb, A., ed., "Applied Optimal Estimation", MIT press, Cambridge, Mass., 1974.
- [2] Zarchan, P., "Complete Statistical Analysis of Nonlinear Missile Guidance System - SLAM", J. Guidance and Control, Vol. 2, No. 1, Jan.-Feb. 1979.
- [3] Painter, J. H., Kerstetter, D. and Jowers, S., "Reconciling Steady-State Kalman and Alpha-Beta Filter Design", IEEE Trans. Aerospace and Electronic System, Vol. 26, No. 6 Nov. 1990.
- [4] Kailath, T., "Linear Systems", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980, pp 50-51.

- [5] Gelb, A. and R.S. Warren, "Direct Statistical Analysis of Nonlinear Systems:CADET", AIAA Journal, May 1973.

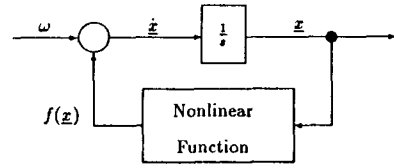


그림 1: Nonlinear Model

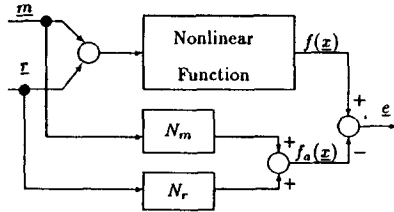


그림 2: Multiple Describing Function Approximation

lateral aerodynamic forces

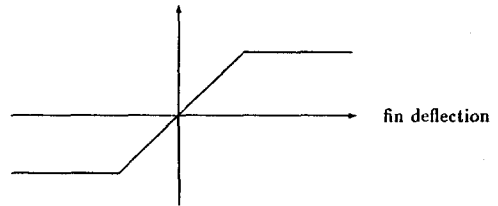


그림 3: Lateral Aerodynamic Force Saturation due to Missile Fin

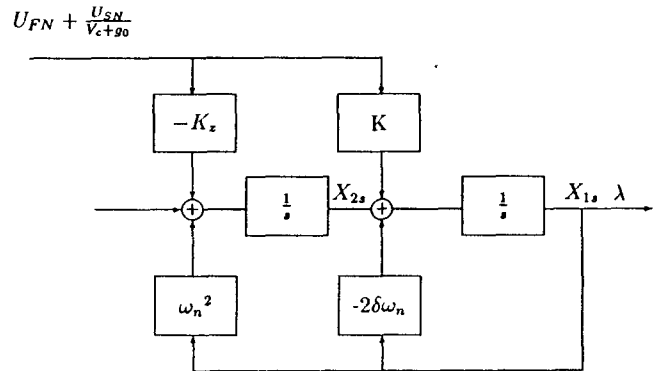


그림 4:  $\alpha$ - $\beta$  Filter Configuration

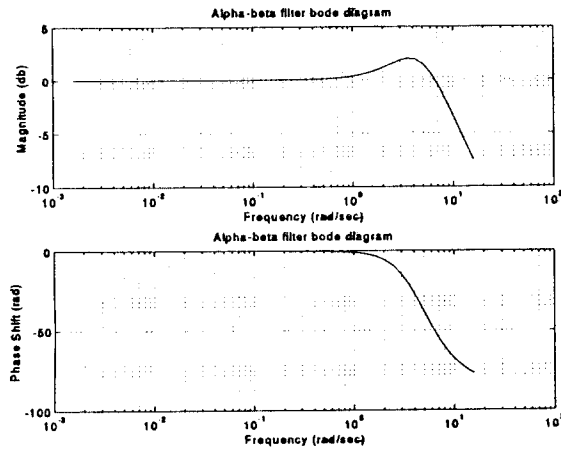
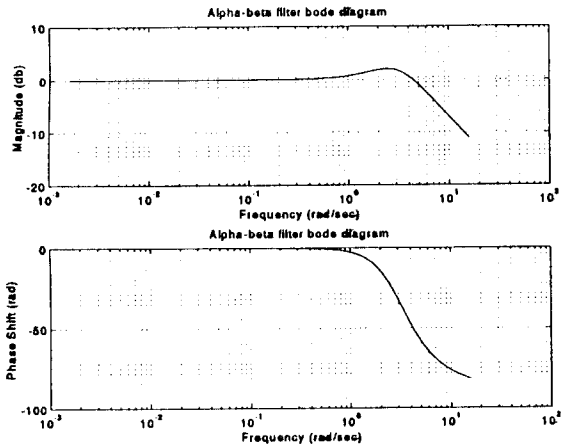
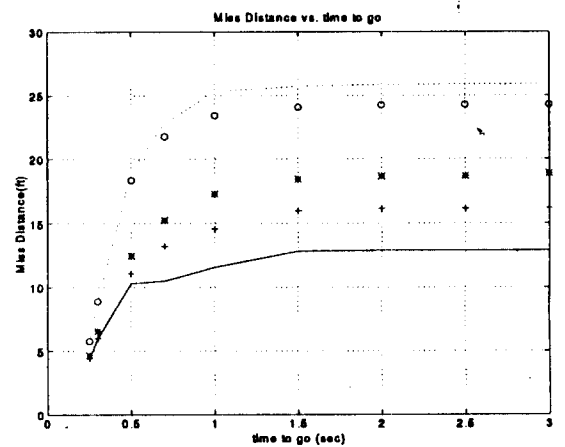
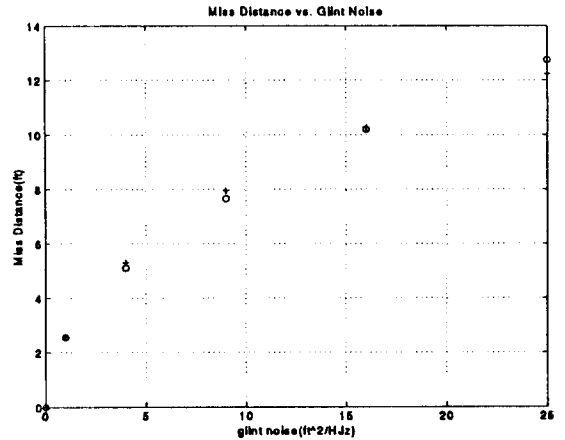


그림 5: Bode Diagram of  $\alpha - \beta$  Filter with  $\Delta T = 0.001$ ,  $\xi = 0.707$ ,  $\omega_n = 20 \text{ rad/sec}$ , then  $\alpha = 0.042$  and  $\beta = 0.0009$   
 그림 6: Bode Diagram of  $\alpha - \beta$  Filter with  $\Delta T = 0.001$ ,  $\xi = 0.707$ ,  $\omega_n = 30 \text{ rad/sec}$ , then  $\alpha = 0.0281$  and  $\beta = 0.0004$



8: Miss Distance vs. Various Noise Cases

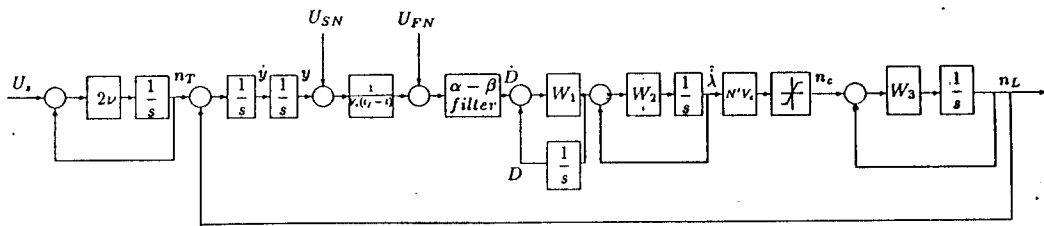


그림 7: Missile Guidance Loop Model