

유도탄의 속도크기 V_m 이 일정하다고 가정하면 그림 1로부터

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= -V_m \cos(\sigma_m(t) - \sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) &= V_m \sin(\sigma(t) - \sigma_m(t)) / R(t) \quad (1) \\ \dot{y}(t) &\equiv \dot{z}(t) / V_m = -\sin \sigma_m(t) \end{aligned}$$

이고, 식 (1) 은 σ, σ_m 이 작은 경우 $R(t) \approx V_m t_{go}$ 이므로

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\sigma_m(t), & y(0) &= y_0 \\ \dot{\sigma}(t) &= (\sigma - \sigma_m) / t_{go}, & \sigma(0) &= \sigma_0 \end{aligned} \quad (2)$$

와 같이 선형화 할 수 있다(여기서 $t_{go} = t_f - t$, t_f 는 목표물과의 충돌시점).

또한, 그림 1 에서 $y(t) = R(t) / V_m \sin \sigma(t)$ 이므로 $y(t) = (t_f - t) \sigma(t)$ 로 간략화할 수 있다. 이제 PNG 유도법칙은

$$a_c(t) = N V_m \dot{\sigma}(t) \quad (3)$$

와 같이 주어진다([2]). 여기서 N 은 항법상수이며, 통상적으로 3~5 사이의 값이 사용된다. 식 (3) 의 PNG 유도명령 a_c 는 가속도명령이므로 자세제어방식 유도탄에 적용하려면 자세각명령의 형태로 계산해 주어야 한다. 자세각명령을 σ_c 라 할 때, $a_c(t) = V_m \dot{\sigma}_c(t)$ 가 되므로 식 (3) 의 PNG 법칙은

$$\dot{\sigma}_c(t) = N \dot{\sigma}(t) \quad (4)$$

과 같다. $\sigma(0) = 0$ 이므로 위 식을 적분하면

$$\sigma_c(t) = N \sigma(t) + \sigma_{c0} \quad (5)$$

이 되며 여기에서 σ_{c0} 는 PNG 유도명령 $\dot{\sigma}_c$ 에 대한 적분기의 초기치이다. 이제 식 (5) 의 유도명령을 시정수가 $1/\alpha$ 인 1 차 응답시간지연을 갖는 자세제어방식 유도탄에 적용할 경우에 유도거리오차를 고려하여 보자. 유도거리오차를 해석적으로 구하기 위하여 다음과 같이 선형화된 유도시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\sigma_m(t), & y(0) &= 0 \\ \dot{\sigma}_m(t) &= -\alpha \sigma_m(t) + \alpha \sigma_c(t), & \sigma_m(0) &= \sigma_{m0} \\ \sigma_c(t) &= N \sigma(t) + \sigma_{c0} = N y(t) / (t_f - t) + \sigma_{c0} \end{aligned} \quad (6)$$

여러 t_f 값에 따른 유도거리오차 $y(t_f)$ 를 살펴보

기 위하여 Adjoint 기법을 사용하자(아래에 설명하는 해석방법은 [2] 에 기술된 가속도제어방식 유도탄에 대한 PNG 유도오차 해석방법을 응용한 것이다). 식 (6) 에 대한 Adjoint System 은 그림 2 와 같다

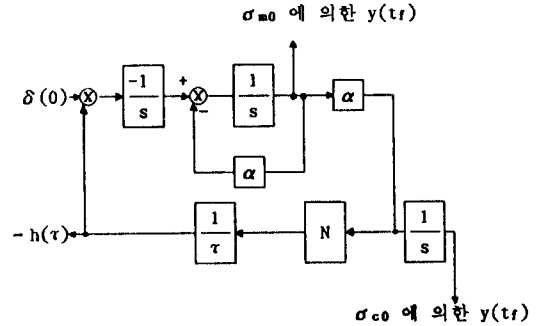


그림 2. PNG 유도법칙에 대한 Adjoint System

그림 2 는 그림 3 과 같이 간략하게 표현할 수 있다. 따라서

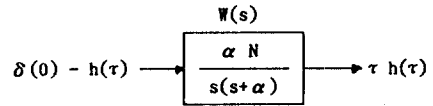


그림 3. 간략하게 표현한 블록선도

$$\tau h(\tau) = \int_0^\tau w(x) [\delta(\tau-x) - h(\tau-x)] dx \quad (7)$$

의 관계식을 얻을 수 있고, 이를 Laplace 변환하면

$$-\frac{d}{ds} H(s) = W(s) [1 - H(s)] \quad (8)$$

와 같다. 식 (8) 의 미분방정식을 풀면

$$H(s) - 1 = -\left[\frac{s}{s + \alpha} \right]^N \quad (9)$$

가 된다([2] 참조). σ_{m0} 와 σ_{c0} 에 의한 $y(t_f)$ 를 각각 MD_{m0} , MD_{c0} 라 하면 식 (9) 과 그림 2로부터

$$MD_{m0}(s) = -\frac{s^{N-1}}{(s+\alpha)^{N+1}}, \quad MD_{c0}(s) = -\frac{\alpha s^{N-2}}{(s+\alpha)^{N+1}} \quad (10)$$

가 되며, t_f 에 따른 $MD_{m0}(t_f)$ 및 $MD_{c0}(t_f)$ 는 식 (10) 을 역 Laplace 변환을 하여 쉽게 구해진다. 예를 들어, $N=3$ 인 경우에는

$$\begin{aligned}
 MD_{m0}(t_f) &= -\exp(-\alpha t_f) [\alpha t_f - (\alpha t_f)^2 + (\alpha t_f)^3/6] / \alpha \\
 MD_{c0}(t_f) &= \exp(-\alpha t_f) [-(\alpha t_f)^2/2 + (\alpha t_f)^3/6] / \alpha
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

이다. 따라서, $MD_{m0}(t_f) + MD_{c0}(t_f) = 0$ 가 되는 σ_{c0} 는

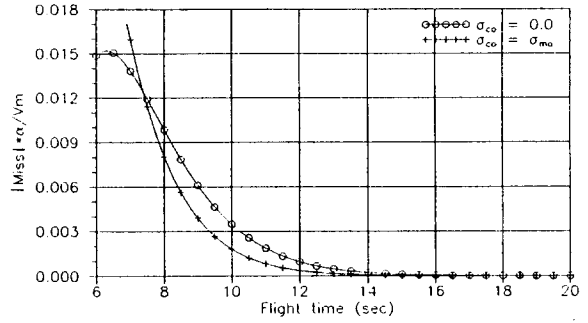
$$\sigma_{c0} = \frac{-6 + 6\alpha t_f - \alpha^2 t_f^2}{3\alpha t_f - \alpha^2 t_f^2} \sigma_{m0}
 \tag{12}$$

과 같이 주어진다. 그러나, 식 (12) 을 실제로 적용하려면 총 비행시간 t_f 를 비행 전에 예측하여야 하는 문제점이 있으며, t_f 의 정확한 추정 은 일반적으로 쉽지 않다. $N \geq 2$ 인 경우에 식 (10) 을 Partial Fraction 으로 전개하면 $1/(s+\alpha)^{N+1}$ 항의 계수가 $MD_{m0}(t_f)$ 와 $MD_{c0}(t_f)$ 의 경우에 크기가 같고 부호가 반대됨을 알 수 있다. 따라서 역 Laplace 변환을 하였을 때 t_f 의 최고 차항의 크기가 역시 크기가 같고 부호가 반대가 된다. 따라서 t_f 가 충분히 큰 경우에는 유도거리오차를 최소화하기 위하여

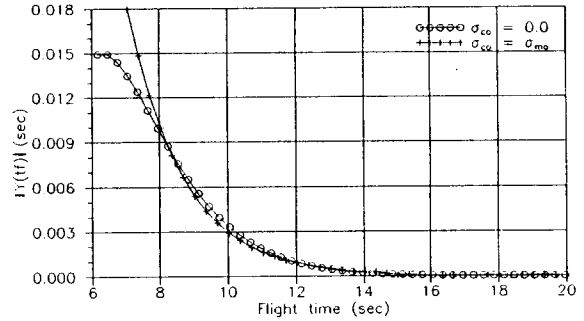
$$\sigma_{c0} = \sigma_{m0}
 \tag{13}$$

와 같이 근사적으로 설정하여도 됨을 알 수 있다. 그러나 $N=1$ 인 Pursuit Guidance 의 경우에는 총 유도거리오차가 $MD_{c0} \approx -1/\alpha$ 이므로 ($MD_{m0} \approx 0$ for $t_f \gg 1$) $\sigma_{c0} = 0$ 으로 하여야 할 것이다. t_f 가 큰 경우에 유도명령의 적분기 초기값 σ_{c0} 를 σ_{m0} 와 같게 설정하는 것이 타당한 것인지 살펴보기 위하여 $N=3$ 인 경우에 식 (10) 에서 구한 Closed-Form Solution 을 이용한 유도거리오차와 비선형 Kinematics(식(1)) 를 사용한 유도거리오차를 비교하여 보았다.

그림 4 의 결과를 보면 두 가지 경우의 결과가 거의 비슷한 경향을 보인다. (b) 의 결과에서는 $\sigma_{c0} = 0$ 인 경우와 $\sigma_{c0} = \sigma_{m0}$ 인 경우의 차이가 (a) 에 비해 매우 미미한 것으로 보이나 유도탄의 속도와 시간지연이 매우 큰 경우를 고려하면 그에 비례하여 유도거리오차도 커지므로 $\sigma_{c0} = \sigma_{m0}$ 로 하는 것이 바람직하리라 본다. 더우기, 그림 5 의 결과에서 보듯이 t_f 에 대하여 유도거리오차의 경향을 보는 대신에 유도거리에 대한 유도거리오차의 경향을 본다면 $\sigma_{c0} = \sigma_{m0}$ 로 하는 것이 유도거리오차를 줄일 수 있는 방안이 된다. 그 이유는 $\sigma_{c0} = \sigma_{m0}$ 인 경우가 $\sigma_{c0} = 0$ 인 경우에 비해 동일한 초기 유도거리를 놓고 볼 때 총 비행시간 t_f 가 증가하기 때문에 같은 t_f 에 대하여 비교하는 것보다 유도거리오차가 감소하기 때문이다. 가속도명령에 제한을 가하는 경우에는 그림 6 에서 보는 바와 같이 $\sigma_{c0} = \sigma_{m0}$ 인 경우가 $\sigma_{c0} = 0$ 인 경우에 비해서 유도거리오차가 크게 감소하였다.



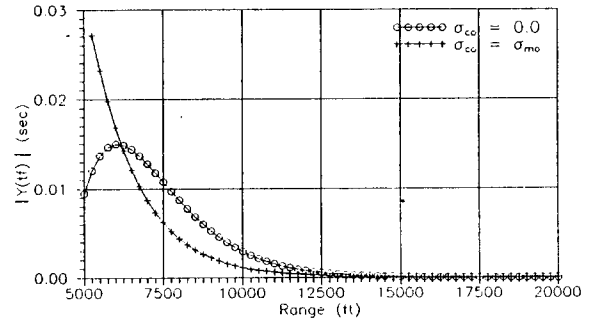
(a) Closed-Form Solution ($\sigma_{m0}=1$)



$\sigma_{m0}=1, V_m=1000$ (ft/sec), $\alpha=1$

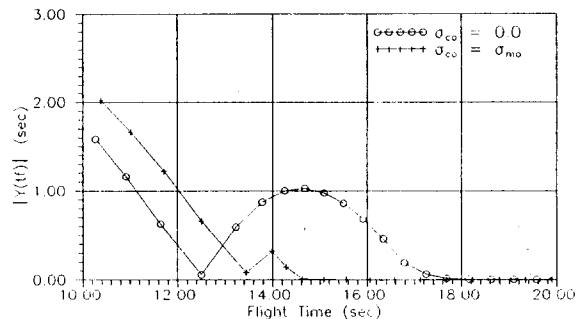
(b) 비선형 Kinematics 를 고려한 경우

그림 4. PNG 를 사용하였을 때 유도거리오차

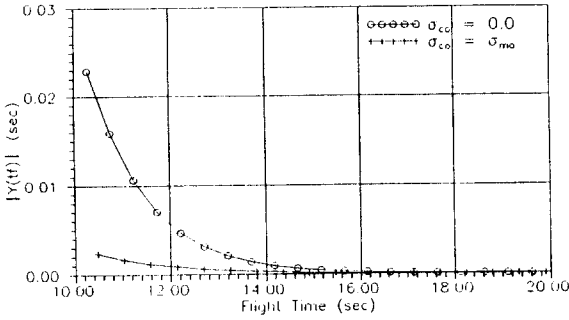


$\sigma_{m0}=1, V_m=1000$ (ft/sec), $\alpha=1$

그림 5. 초기유도거리에 따른 유도거리오차 (비선형)



(a) 가속도 제한이 5g 인 경우



(b) 가속도 제한이 10g 인 경우

$$\sigma_{m0}=1, V_m=1000 \text{ (ft/sec)}, \alpha=1$$

그림 6. 가속도 제한에 따른 유도거리오차 비교

3. 총돌각을 고려한 최적유도법칙 적용시의 선정

Soft Constraint 로서 거리유도오차 이외에 표적총돌각을 고려하는 최적유도법칙은 여러 유도상황에 적절하도록 각 구속조건의 가중치를 조절할 수 있다는 장점을 가진다. 표적총돌각을 고려한 최적유도법칙 또한 가속도 형태의 유도명령을 산출하므로 이를 자세제어방식 유도탄에 적용하기 위해서는 적분기를 필요로 하며, 이에 따른 적분기 초기값 선정문제가 대두된다. 본 절에서는 종말 거리유도오차와 총돌각오차를 최소화 할 수 있는 적분기 초기치 선정방법과 총 유도에너지를 최소화 할 수 있는 적분기 초기치 선정에 관하여 알아보고 종말 구속조건 가중치와의 관계를 기술한다.

운동방정식

식 (6) 에서 조종장치에 대한 자세각명령식을 다음과 같이 바꾸고

$$\dot{\sigma}_c(t) = u(t) (= a_c/V_m) \quad (14)$$

이를 $\sigma_m - \sigma_f = 0$ 부근에서 선형화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}}_m(t) &= -\alpha \bar{\sigma}_m(t) + \alpha \bar{\sigma}_c, \quad \bar{\sigma}_m(0) = \bar{\sigma}_{m0} \\ \dot{\bar{\sigma}}_c(t) &= u(t), \quad \bar{\sigma}_c(0) = \bar{\sigma}_{c0} \\ \dot{\bar{y}}(t) &= -\bar{\sigma}_m(t), \quad \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\bar{\sigma}_m = \sigma_m - \sigma_f, \quad \bar{\sigma}_c = \sigma_c - \sigma_f, \quad \bar{y} = R(\sigma - \sigma_f)/V_m$$

로 주어지며, $\sigma_f, \sigma_c, \sigma$ 는 각각 표적총돌각과 자세각명령 그리고 시선각이다.

최적유도법칙([3], [4])

$\bar{y}(t_f)$ 와 $\bar{\sigma}_m(t_f)$ 를 Soft Constraint 로 고려하는 최적제어문제는 다음과 같다.

Given t_f , minimize

$$J = \frac{a}{2} \bar{\sigma}_m(t_f)^2 + \frac{b}{2} \bar{y}(t_f)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt \quad (16)$$

subject to the system equation (15)

여기서 a, b 는 종말 총돌각오차와 거리유도오차 구속조건에 주어지는 가중치들이다. 위 최적제어문제를 풀면 다음과 같은 최적제어해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{b}{\alpha} \bar{y}(t_f) \{ \alpha t_{go} - 1 + \exp(-\alpha t_{go}) \} \\ &\quad - a \bar{\sigma}_m(t_f) \{ 1 - \exp(-\alpha t_{go}) \} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서

$$t_{go} = t_f - t,$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(t_f) &= \frac{1}{\Delta(t_f)} \left\{ -\frac{\bar{y}_0}{2\alpha} (2\alpha + aG(t_f)) \right. \\ &\quad + \frac{\bar{\sigma}_{m0}}{2\alpha^2} \left[(2\alpha + aG(t_f))h_2(t_f) - aG_1(t_f)\exp(-\alpha t_f) \right] \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\sigma}_{c0}}{2\alpha^2} \left[(2\alpha + aG(t_f))h_1(t_f) - aG_1(t_f)h_2(t_f) \right] \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_m(t_f) &= \frac{1}{\Delta(t_f)} \left\{ -\frac{\bar{y}_0}{2\alpha^2} b F(t_f) \right. \\ &\quad + \frac{\bar{\sigma}_{m0}}{2\alpha^3} \left[bF(t_f)h_2(t_f) - (2\alpha^3 + bF_1(t_f))\exp(-\alpha t_f) \right] \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\sigma}_{c0}}{2\alpha^3} \left[bF(t_f)h_1(t_f) - (2\alpha^3 + bF_1(t_f))h^2(t_f) \right] \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha t_f \\ h_1(t_f) &= 1 + \beta + \exp(-\beta) \\ h_2(t_f) &= 1 - \exp(-\beta) \\ F(t_f) &= 1 - 2\beta + \beta^2 - 2(1-\beta)\exp(-\beta) + \exp(-2\beta) \\ G(t_f) &= -3 + 2\beta + 4\exp(-\beta) - \exp(-2\beta) \\ F_1(t_f) &= 1 + 2\beta - 2\beta^2 + \frac{2}{3}\beta^3 - 4\beta\exp(-\beta) - \exp(-2\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1(t_f) &= F(t_f) \\ \Delta(t_f) &= -\left(1 + \frac{bF_1(t_f)}{2\alpha^3} + \frac{aG(t_f)}{2\alpha} + \frac{ab}{4\alpha^4} (F_1(t_f)G(t_f) \right. \\ &\quad \left. - F(t_f)G_1(t_f)) \right) \end{aligned}$$

실제 유도시스템에 적용하는 상태변수 변환 형태의 식은 위에 기술된 식을 이용하여 얻을 수 있다[3].

종말오차를 최소화하는 σ_{c0} 선정

자세제어방식 조종장치에 대한 유도명령은 자세각명령 σ_c 이며, 식 (17) 로 계산되는 u 는 한번 적분된 후 조종장치에 제공된다. 따라서 자세제어방식 조종장치를 사용하는 경우 유도명령 계산에 적분기가 존재하게 되며, 이 적분기의 초기치 σ_{c0} 는 궁극적인 유도성능에 영향을 미친다.

일반적으로 만족할 만한 유도오차를 얻기 위해서는 조종장치 시정수의 7 ~ 8 배의 t_f 가 확보되어야 하며,

따라서 $t_f \gg 1$ 인 가정하에서 식 (18) 와 식 (19) 은 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$\bar{y}(t_f) \approx \frac{12}{bt_f^2} \left\{ \frac{\bar{y}_0}{t_f} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{co} \right\}$$

$$\bar{\sigma}_m(t_f) \approx \frac{6}{at_f} \left\{ \frac{\bar{y}_0}{t_f} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{co} \right\}$$

여기에서

$$\bar{y} = \frac{R}{V_m} \sin(\sigma - \sigma_f) \approx t_{go}(\sigma - \sigma_f)$$

로 근사할 수 있다. 그리고 $\bar{\sigma}_{co} = \sigma_{co} - \sigma_f$ 이며

$\sigma(0) = 0$ 에 대해서 $\bar{y}_0 \approx -t_f \sigma_f$ 로 쓸 수 있으므로 이를 정리하면

$$\bar{y}(t_f) \approx -\frac{6}{bt_f^2} \left\{ \sigma_f + \sigma_{co} \right\} \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}_m(t_f) \approx -\frac{2}{at_f} \left\{ 2\sigma_f + \sigma_{co} \right\}$$

로 쓸 수 있다. 따라서 $\bar{y}(t_f)$ 또는 $\bar{\sigma}_m(t_f)$ 를 0 으로 하는 적분기 초기치는 다음과 같이 개략적으로 주어진다.

$$\sigma_{co} \approx -\sigma_f \text{ for } \bar{y}(t_f) = 0 \quad (21)$$

$$\sigma_{co} \approx -2\sigma_f \text{ for } \bar{\sigma}_m(t_f) = 0$$

총 유도에너지를 최소화하는 σ_{co} 선정

식 (20) 으로 근사된 거리유도오차와 총돌각오차를 식 (17) 에 대입하면 근사적인 가속도 유도명령을 얻을 수 있다.

$$u(t) \approx -\frac{6}{\alpha t_f^2} \left\{ \sigma_f + \sigma_{co} \right\} \left\{ \alpha t_{go} - 1 + \exp(-\alpha t_{go}) \right\}$$

$$+ \frac{2}{t_f} \left\{ 2\sigma_f + \sigma_{co} \right\} \left\{ 1 - \exp(-\alpha t_{go}) \right\} \quad (22)$$

총 유도에너지를 최소화하는 적분기 초기치는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{co}} \left[\int_0^{t_f} u^2 dt \right] = 0 \longrightarrow \sigma_{co} \approx -\sigma_f \quad (23)$$

이 결과는 종말 거리유도오차를 최소화하는 적분기 초기치와 동일하다.

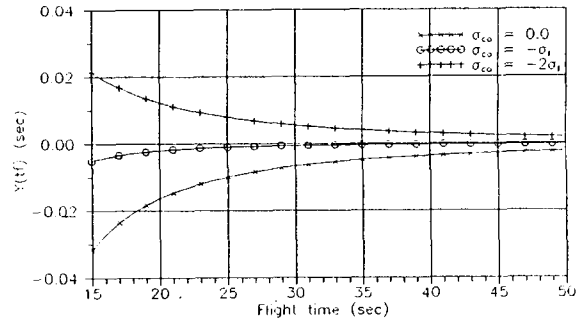
이상에서 언급한 바와 같이 $t_f \gg 1$ 인 경우 종말 오차를 최소화하는 적분기 초기치나 총 유도에너지를 최소화하는 적분기 초기치는 2 절에서 설명한 PNG 의 경우와는 달리 유도단의 초기헤딩오차 σ_{m0} 나, 각 구속조건의 가중치 a, b 의 영향보다 σ_f 에 의하여 크게 좌우된다. 가중치를 증가시키면 이론상 동일한 t_f 에 대해 유도오차나 총돌각오차를 모두 감소시킬 수 있으며 이 경우에도 동일한 경향을 나타낸다.

시뮬레이션

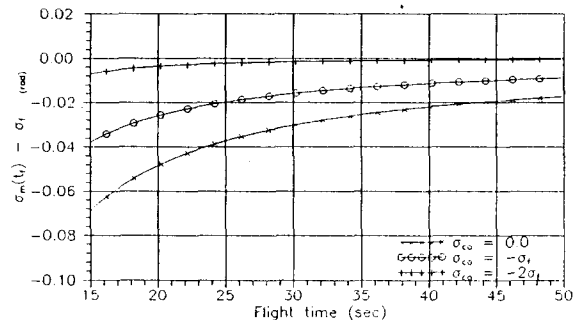
이상에서 설정한 적분기 초기치 설정의 타당성을 검증하기 위하여 선형화된 시스템 방정식의 Adjoint 시뮬레이션과 가속도명령제한을 포함하는 비선형 Kinematics 에 대한 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션을 위한 각 파라미터들은 다음과 같은 조건을 갖는다고 하였다.

$$\alpha = 1, a = 5, b = 1.2, \sigma_m(0) = \sigma_f, \sigma_f = 1 \text{ rad.}$$

그림 7 에 나타낸 바와 같이 Adjoint 시뮬레이션 결과는 $t_f \gg 10 \text{ sec}$ 이면 $\sigma_{co} = -\sigma_f$ 일 경우 $y(t_f)$ 를 가장 작게 하고, $\sigma_{co} = -2\sigma_f$ 일 경우 $\sigma_m(t_f)$ 를 σ_f 에 가장 근접하게 함을 알 수 있다. 그림 8 와 그림 9 에 나타낸 가속도명령제한을 포함하는 비선형 시스템에 대한 시뮬레이션 결과 또한 동일한 경향을 보여 준다. 특히 가속도명령제한값이 클 수록 Adjoint 시뮬레이션 결과에 근접하고 있음을 알 수 있다. 위 시뮬레이션 조건의 $\sigma_m(0)$ 를 변화시켜도 유사한 경향을 볼 수 있다.

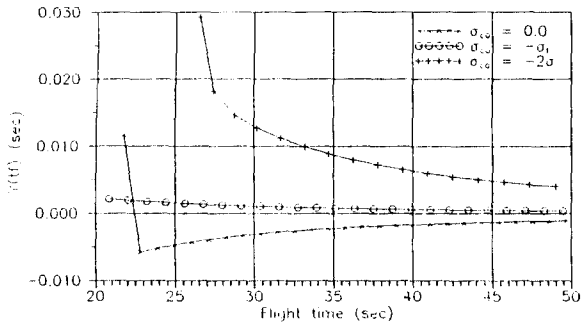


(a) $y(t_f)$ 의 Adjoint 시뮬레이션

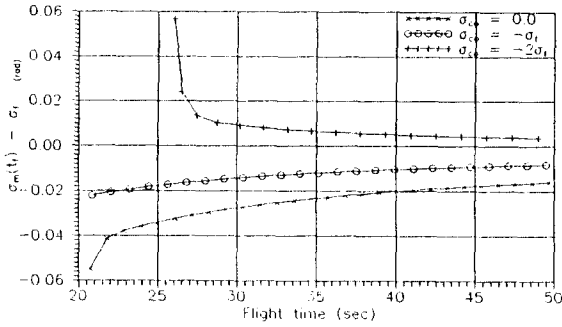


(b) $\sigma_m(t_f)$ 의 Adjoint 시뮬레이션

그림 7. 적분기 초기값 변화에 따른 최적유도법칙의 Adjoint 시뮬레이션 결과 비교

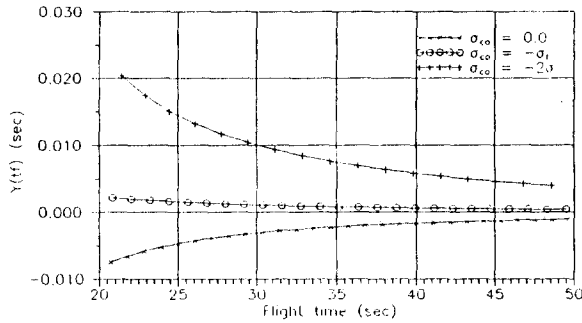


(a) 5g Limiter 를 가질 경우 $y(tr)$

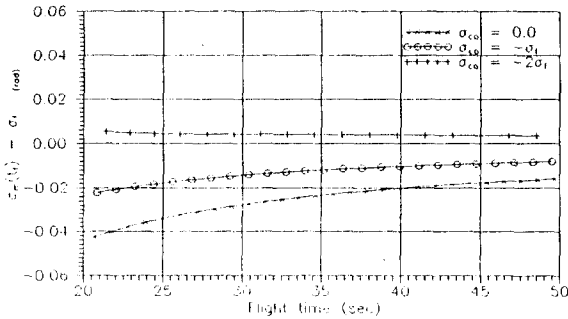


(b) 5g Limiter 를 가질 경우 $\sigma_m(tr)$

그림 8. 5g 가속도명령제한을 고려할때 유도오차 비교



(a) 10g Limiter 를 가질 경우 $y(tr)$



(b) 10g Limiter 를 가질 경우 $\sigma_m(tr)$

그림 9. 10g 가속도명령제한을 고려할때 유도오차 비교

4. 결론

이 논문에서는 자세제어방식 유도탄의 유도명령 계산에 사용되는 적분기 초기값을 적절히 선택함으로써 유도오차를 개선할 수 있음을 보였다. PNG 일 경우에는 유도명령의 초기값을 초기헤딩오차와 같게 놓음으로써 (즉 $\sigma_{co} = \sigma_{mo}$) 유도오차를 개선할 수 있음을 보였고, 충돌각을 고려한 최적제어유도법칙을 사용할 때에는 거리 유도오차를 줄이기 위하여 적분기의 초기값을 충돌각의 -1 배로, 충돌각오차를 줄이기 위해서는 충돌각의 -2 배로 함으로써 유도오차를 개선할 수 있음을 보였다.

위에서 제시한 방법들은 유도루우프의 구조에 변화가 없는 상태에서 손쉽게 적분기 초기치의 적절한 선정만으로 유도성능을 향상시킬 수 있다는 점에서 유용한 결과로 생각된다.

참고 문헌

- [1] A. E. Bryson, Jr., Y. C. Ho, Applied Optimal Control, John Wiley & Sons, 1975.
- [2] P. Zarchan, Tactical and Strategic Missile Guidance, AIAA, Inc., 1990.
- [3] 류창경, 조항주, "표적충돌각과 최대가속도제한을 고려한 최적유도기법," '92 한국자동제어 학술회의 논문집, 1992.
- [4] M. Kim, K. V. Grider, "Terminal Guidance for Impact Attitude Angle constrained Flight Trajectories," IEEE Tr. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-9, No. 6, 1973, PP 852-859.