

비선형 측정에 대한 반복 계수추정 기법

°정태호*, 제창해*, 유준**

*국방과학연구소 **충남대학교

Iterative Parameter Estimation for Nonlinear Measurements

°Tae-Ho Chung, Chang-Hae Je, Joon Lyu

Agency for Defense Development, Chungnam National University

Abstracts

In this paper, the IPE(Iterative Parameter Estimation) methods for the nonlinear measurements are proposed. The IPE methods convert the problems of the parameter estimation for the nonlinear measurements to that of the solution of the nonlinear equations approximately and use several iterative numerical solutions, such as fixed points theory, Newton's methods, quasi-Newton's methods and steepest descent techniques, the IPE methods for the nonlinear measurements in the case of the error estimation for the inertial navigation systems are simulated, and it is found that the estimation errors for the nonlinear measurements decrease rapidly and converge to almost that of the linear LSE(Least Squares Estimation) when the IPE methods are applied.

1 서론

선형측정에 대한 계수추정시 측정잡음이 백색잡음인 경우 측정값과 추정값의 차이의 제곱의 합이 최소가 되도록 계수를 추정하는 최소자승추정기법(Least Squares Estimation)이 있다[1][2]. 이 추정기법은 시스템의 교정과 같이 측정수가 추정할 계수의 수보다 크고, 오프라인(off-line)으로 계수를 추정하여도 무방할 경우에 측정오차를 최소화 하는 방법으로 널리 이용되고 있다. 그런데 대부분의 시스템 측정에서 측정범위가 넓어지면 비선형성이 나타나서 선형측정을 유지하지 못하고 비선형 측정이 된다. 이러한 경우 비선형성을 무시하고 선형측정으로 가정하여 최소자승기법을 그대로 사용하면, 비선형성은 유색잡음의 측정오차로 간주되어 계수 추정오차가 급격히 증가하게 된다.

본 논문에서는 측정수가 추정계수의 수보다 큰 비선형 측정에 대한 계수 추정문제를 비선형 연립방정식의 해를 구하는 문제로 근사적으로 변환하여, 비선형 연립방정식의 해를 반복적으

로 구하기 위한 수치해석 기법[3]인 고정점정리, Newton 기법, quasi-Newton 기법 및 최경사 하강법(Steepest Descent Technique) 등을 적용함으로써, 비선형 측정에 대한 계수추정 성능을 크게 개선할 수 있는 반복 계수추정기법(Iterative Parameter Estimation Method)를 제시하였다.

그리고 오차가 큰 경우 비선형측정이 되는 관성항법장치의 오차를 추정함에 있어서 고정점정리를 이용한 반복계수추정기법을 적용하는 전산시뮬레이션을 수행하여, 본 논문에서 제시한 반복 계수추정기법의 유용성을 확인하였다.

II 선형측정에 대한 최소자승 추정기법

다음과 같은 선형측정방정식에서 측정값 Z의 수는 추정계수 X의 수보다 크며, 측정잡음 V는 백색잡음으로 가정하자.

$$Z = HX + V \tag{1}$$

Z : m차 측정벡터

X : n차 변수벡터

H : m x n행렬, m>n, (H^TH)⁻¹존재

V : m차 측정잡음 벡터, 백색잡음

식(1)에 최소자승 추정기법[1][2]을 적용하여 계수를 추정하면

$$\hat{X} = (H^T H)^{-1} H^T Z \\ = H^* Z \quad (H^* = (H^T H)^{-1} H^T \text{로 정의}) \tag{2}$$

이고 계수추정오차의 공분산은

$$P = E[(\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T] \\ = H^* E[VV^T] (H^*)^T \tag{3}$$

이다. 이때 E[X]는 X의 기대치이며

$$E[VV^T] = \sigma^2 I \tag{4}$$

이면 식(3)은

$$P = \sigma^2 (H^* H^*)^T \tag{5}$$

가 된다.

III 비선형 측정에 대한 반복 계수추정기법

(1) 문제의 변환

측정수가 추정계수의 수보다 큰 비선형 측정방정식에서 측정잡음 V 는 백색잡음으로 가정하자.

$$Z = HX + N(X) + V \quad (6)$$

$Z = m$ 차 측정벡터

$X = n$ 차 변수벡터

$H = m \times n$ 행렬, $m \times n$, $(H^T H)^{-1}$ 존재

V : m 차 측정잡음벡터, 백색잡음

$N(X)$: 비선형항, $N(X) = [n_1(x), n_2(x), \dots, n_m(x)]$

식 (6)의 비선형 측정방정식에서 $N(X)$ 를 좌변으로 이항하고, 선형측정방정식으로 간주하여 최소자승법을 적용하면

$$Z_1 = Z - N(X) = HX + V \quad (7)$$

$$\hat{X} = H^T Z_1 \quad (8)$$

$$= H^T Z - H^T N(X)$$

식 (8)과 같이 되는데, 식 (8)에서 \hat{X} 를 구하려면 비선형항 $N(X)$ 를 정확히 알 수 있어야 한다. 그러나 정확한 비선형항 $N(X)$ 는 알 수 없으므로

$$N(X) \cong N(\hat{X}) \quad (9)$$

로 근사하여 식 (8)에 적용하면

$$\hat{X} \cong H^T Z - H^T N(\hat{X}) \quad (10)$$

이 된다. 식 (10)은 다음과 같이 변수가 n 개인 비선형 연립방정식의 해이다.

$$X = H^T Z - H^T N(X) \quad (11)$$

그러므로 비선형항 $N(X)$ 를 식(9)와 같이 근사시킬 경우, 식(6)의 비선형 측정방정식의 해는 근사적으로 식(10)의 비선형 연립방정식의 해가 된다.

(2) 계수 추정오차 공분산

식 (6)의 비선형 측정방정식에 대해 식(10)과 같이 계수를 측정하면 계수 추정오차의 공분산 P 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P &= E\{(\hat{X}-X)(\hat{X}-X)^T\} \quad (12) \\ &= E\{H^T((Z-N(\hat{X}))-X)\}\{H^T((Z-N(\hat{X}))-X)\}^T \\ &= E\{H^T(N(X)-N(\hat{X}))+V)\}\{H^T(N(X)-N(\hat{X}))+V)\}^T \end{aligned}$$

식 (11)에서 $E[X]$ 는 X 의 기대치이며, 또한 $(N(X)-N(\hat{X}))$ 는 상관관계가 없으며,

$$E[V] = 0 \quad (13)$$

이므로 식 (11)은

$$\begin{aligned} P &= H^T E\{[VV^T]\}(H^T)^T \\ &+ H^T E\{(N(X)-N(\hat{X}))(N(X)-N(\hat{X}))^T\}(H^T)^T \quad (14) \end{aligned}$$

가 되어 식 (3)과 비교할때 $(N(X)-N(\hat{X}))$, 즉 비선형 항에 의한 측정값의 보상오차에 의한 계수추정오차가 증가된다.

(3) 수치해석기법 적용

식 (11)과 같은 비선형 연립방정식의 해를 직접 구하는 방법은 없으나, 고정점정리, Newton법 등 수치해석 기법을 적용하여 반복적으로 해를 구할 수 있는 방법이 있다[3]. 만약 $X \in D$ 이면 $[H^T(Z-N(k))] \in D$ 인 영역 $D \in R^n$ 에서 $N(X)$ 가 연속이고, 각각의 $n_i(X)$ 에 대해

$$\left| \frac{\partial n_i(X)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n}, \quad K < 1, \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,n \quad (15)$$

인 K 가 존재하면 고정점 정리에 의하여 식 (11)의 해는 식 (16), 식 (17), 식 (18)과 같이 고정점 \hat{X}_0 수렴하므로 식(16), 식(17)를 이용하여 반복적으로 \hat{X} 를 구할 수 있다.

$$\hat{X}_0 = H^T Z \quad (16)$$

$$\hat{X}_{k+1} = H^T Z - H^T N(\hat{X}_k) \quad (17)$$

$$\| \hat{X}_k - \hat{X} \|_{\infty} \leq \frac{K^k}{1-K} \| \hat{X}_1 - \hat{X}_0 \| \quad (18)$$

식 (18)은 반복적으로 \hat{X} 를 구할 때 수렴하는 정도를 알려 주는 관계식이다.

그리고 기본적으로는 고정점정리를 응용한 것이지만, 비선형 연립방정식의 해를 반복적으로 구할 때 식 (18)보다 빨리 수렴하도록 제안된 것으로 Newton 법이 있다. 식 (11)의 해를 Newton 법을 적용하여 구하기 위하여 함수 $F(X)$, 함수 $G(X)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$F(X) = X - H^T(Z-N(X)) \quad (19)$$

$$(F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)])$$

$$G(X) = X - J^{-1}(X)F(X) \quad (20)$$

$$(G(X) = [g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X)]^T)$$

여기서 $J(X)$ 는 Jacobian 행렬로서 식 (21)과 같이 정의된다.

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (21)$$

만약 영역 $N_6 \in \mathbb{R}^n, N_6 = \{X \mid \|\hat{X} - X\| < \delta, \delta > 0\}$ 에서, $i=1, 2, \dots, n$

$j=1, 2, \dots, n, l=1, 2, \dots, n$ 에 대해 $\frac{\partial^2 g_i(X)}{\partial x_l \partial x_1}$ 가 연속이고 절댓값이 상수 M 보다 작으며, $\frac{\partial g_i(\hat{X})}{\partial x_j} = 0$

이면, \hat{X}_0 를 N_6 영역에서 선정가능하고 $J^{-1}(\hat{X}_k)$ 가 존재하면 Newton법을 적용할수 있으며 식(11)의 해 \hat{X} 는 식(16), 식(22), 식(23)과 같이 반복적으로 구할 수 있다.

$$\hat{X}_{k+1} = G(\hat{X}_k) = \hat{X}_k - J^{-1}(\hat{X}_k)F(\hat{X}_k) \quad (22)$$

$$\|\hat{X}_{k+1} - \hat{X}\|_{\infty} \leq \frac{n^2 M}{2} \|\hat{X}_k - \hat{X}\|_{\infty}^2 \quad (23)$$

식(23)은 반복적으로 \hat{X} 를 구할 때 수렴하는 정도를 알려주는 관계식으로서 추정오차가 제곱적(quadratically)으로 감소하므로, 식(16)에 의하여 \hat{X}_0 를 N_6 영역내에서 선정할수 있는 경우 고정점 정리를 이용한 식(18)의 방법보다 빠르게 수렴한다.

이상과 같이 식(6)의 비선형 측정에 대한 계수추정을 식(16)(17), 또는(16)(22)에 의하여 반복적으로 추정하는 방법을 제시하였다.

수치해석 기법에 의한 비선형 연립방정식의 해를 구하는 방법에는 고정점 정리 및 Newton법 이외에도 quasi-Newton법 및 최경사 하강법이 있는데 이러한 방법들도 본 논문에서 제시한 비선형 측정방정식에 대한 반복계수 추정기법에 이용될 수 있으나 상세한 설명은 생략 하였다.

IV 시뮬레이션

(1) 측정방정식

비선형측정에 대해 본 논문에서 제시한 반복 계수추정기법의 유용성을 확인하기 위하여 김블형 관성항법장치(GINS)의 오차추정문제에 반복계수추정기법을 적용하였다. 식(1)에서 추정할 계수 X 는 가속도계 바이어스(2), 가속도계 척도계수오차(2), 자이로 바이어스(3), 자이로 질량불균형오차(4)등 11차로 구성하였다. INS오차를 측정함에 있어서 속도오차에 따른 플랫폼 자세오차에 의하여 가속도계 척도계수 오차나 자이로 질량불균형오차들 측정할 수 있도록 그림 1. 과 같이 항법초기에 큰 속도오차 1500ft/sec를 인가하였다. 그리하여 INS에 4가지 속도오차

($V_x(0), V_y(0), -V_x(0), -V_y(0)$)를 인가한 각각의 경우에 대해 두 축 INS의 속도오차 $V_{mx}(t), V_{my}(t)$ 를 매 3분마다 90분간 30회씩 측정하여, 오차가 없는 INS에 초기속도오차가 인가된 경우의 속도오차 변화 $V_{mx}(t), V_{my}(t)$ 계산값과의 차이를 측정방정식의 측정값으로 하여 240차 Z 를 가정하였다. 그리고 그림1.의 INS를 INS 모델로 대체하여 불규칙상수로 정의되는 11개 오차요소 각각의 단위입력에 대한 측정값 Z 를 계산하여 240x11행렬로서 측정행렬 H 를 구성하였다. 측정행렬 구성시 사용한 INS오차의 단위입력은 표1.과 같다.

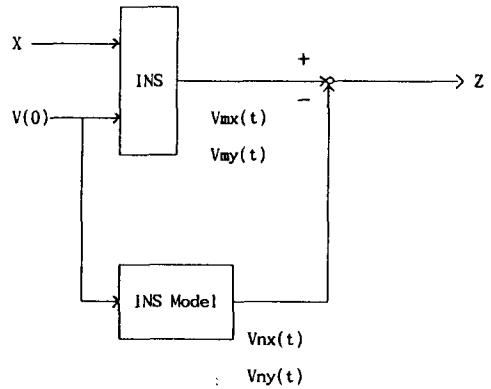


그림1. INS 오차추정

항 목	단위입력
가속도계 바이어스	$1 \times 10^{-4}g$
가속도계 척도계수오차	100ppm
X, Y축 자이로 바이어스	0.01deg/hr
Z 축 자이로 바이어스	0.1deg/hr
자이로 질량불균형오차	0.2deg/hr/g

표1. INS오차의 단위입력

(2) 시뮬레이션

전산시뮬레이션은 몬테칼로 방식으로 수행하였다. INS오차요소 각각의 표준편차가 측정행렬구성시 사용한 단위입력인 INS를 대상 시스템으로 가정하였다. 그리고 그림1.에서 INS를 INS모델로 대체하여 불규칙상수로 가정한 11개의 오차계수 X 를 입력으로 측정값 Z 즉 $Z(X)$ 를 계산하였다. 그리하여 식(16), (17)의 고정점 정리를 이용한 반복 계수추정기법을 적용하여 추정한 계수 \hat{X} 와 가정한 입력 X 와의 차이를 비교하였다. 식(17)과 같이 계수추정에는 $N(\hat{X}_k)$ 의 계산이 필요한데, 본 논문에서는 $N(X)$ 를

모델링 하지 않은 상황에서 $N(\hat{x}_k)$ 를

$$N(\hat{x}_k) = Z(\hat{x}_k) - I\hat{x}_k \quad (24)$$

과 같이 계산하여 사용하였다. 식(24)에서 $Z(\hat{x}_k)$ 는 계수추정 값 \hat{x}_k 에 대한 측정값을 계산한 것이다. 측정오차는 양자화 오차 0.075ft/sec를 가정하였다. 이와 같은 시뮬레이션을 시스템 성능에 따라 INS오차요소 각각의 표준편차가 0.1, 1, 10, 33, 100 배인 경우에 대해 반복하였다.

시뮬레이션 결과 INS성능에 따른 식(16)에 대한 초기 추정 오차는 그림2.와 같고, 식(17)에 의하여 본 논문에서 제시한 반복 추정기법을 적용하여 계수를 추정된 결과는 그림3.과 같다. 그림2, 그림3에서의 $\sigma^2(H^T H)^{-1}$ 의 값은 Z 측정에 따른 양자화 오차를 추정오차로 하여 계산한 값이다. 그림2.에 의하면 이 측정 시스템은 INS오차요소 각각의 표준편차가 측정행렬 구성시 사용한 단위입력 이하에서는 계수추정오차가 식(5)와 같이 나타나서 선형성을 유지하는 것으로 판단되지만 그보다 오차가 큰 경우에는 추정오차가 급격히 증가하여 비선형 측정이 됨을 알 수 있다. 그림3.에 의하면 INS오차추정 문제에서는 비선형측정시 본 논문에서 제시한 반복 계수추정기법을 적용할 경우 추정오차가 크게 감소하여 식(14)의 문제의 변환과정에서 식(9)와 같이 근사시키는데 따른 영향은 거의 나타나지 않으며, 식(5)와 같이 선형측정에 대한 계수 추정오차와 거의 동일한 값으로 수렴하는 것으로 나타났다. 그리하여 INS오차 추정문제의 경우 비선형항 $N(X)$ 의 모델링이 가능하면 본 논문에서 제시한 반복추정기법은 매우 유용한 것으로 확인되었다.

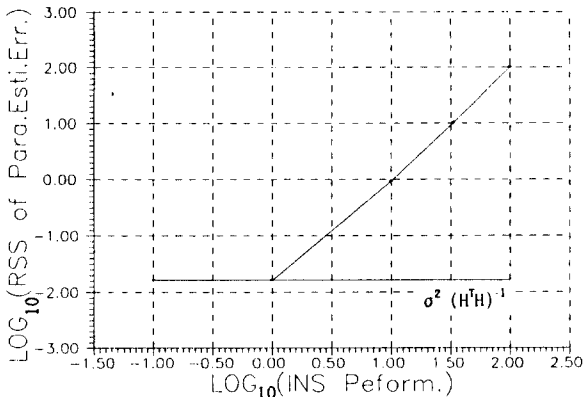


그림2. INS성능변화에 따른 초기 계수추정 오차

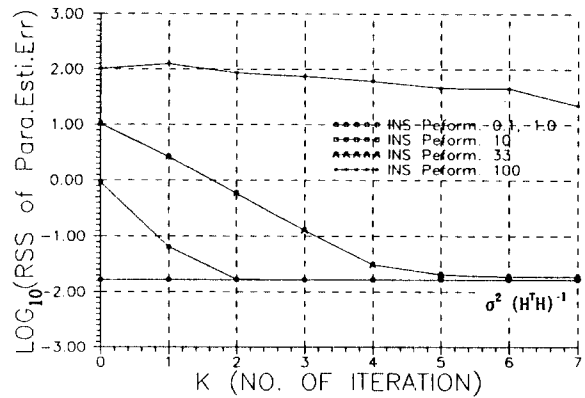


그림3. 반복 계수추정에 의한 계수추정 오차

V 결 론

본 논문에서는 비선형측정에 대한 계수추정문제를 비선형 연립방정식의 해를 구하는 문제로 근사적으로 변환하여, 고정점정리, Newton법, quasi-Newton법 및 최경사하강법등 다양한 수치 해석기법을 적용하는 반복 계수추정기법을 제시하였다.

이 추정기법의 유용성을 검증하기 위하여 오차가 큰 경우 비선형 측정으로 나타나는 INS의 오차를 추정하는 문제에, 고정점정리를 이용한 반복추정기법을 전산시뮬레이션을 통하여 적용한 결과, 반복 계수 추정기법을 적용할 경우 추정오차가 급격히 감소하였으며, 수렴할 경우 반복횟수를 충분히 크게 하면 비선형 측정에 대해서도 선형측정과 거의 동등한 수준의 추정성능으로 계수추정이 가능한 것으로 확인되었다.

한편 비선형 측정방정식이 전제되어야 본 논문에서 제시한 반복 계수추정기법을 적용할 수 있으므로, 이 추정기법을 실제에 적용하기 위해서는 모델링오차를 최소화 하는 비선형 측정방정식에 대한 모델링이 새로운 과제라고 말할수 있다.

참 고 문 헌

- [1] P. S. Maybeck, Stochastic Models, Estimation, and control, New York:Academic Press, vol. 1, pp. 120-121, 1979.
- [2] A. Gelb, Applied Optimal Estimation, Cambridge : The M.I.T. Press, pp. 23-24,1979.
- [3] R. L. Burden and J. D. Faires, Numerical Analysis, Boston:PWS-KENT Publishing Company, chap. 10, 1989.