

출력 시간 지연 시스템의 루우프 복구특성

이상정, 홍석민^{*}

충남대학교 공과대학 전자공학과

LTR Properties for Output-Delayed Systems

Sang Jeong Lee, Seok-Min Hong^{*}

Dept. of Electronics Eng., Chungnam National Univ.

ABSTRACT

This paper presents robustness properties of the Kalman Filter and the associated LQG/LTR method for linear time-invariant systems having delays in both the state and output. A circle condition relating to the return difference matrix associated with the Kalman filter is derived. Using this circle condition, it is shown that the Kalman filter guarantees $(\frac{1}{2}, \infty)$ gain margin and $\pm 60^\circ$ phase margin, which are the same as those for nondelay systems. However, it is shown that, even for minimum phase plants, the LQG/LTR method can not recover the target loop transfer function. Instead, an upper bound on the recovery error is obtained using an upper bound of the solution of the Kalman filter Riccati equations. Finally, some dual properties between output-delayed systems and input-delayed systems are exploited.

I. 서론

본 논문에서는 시간지연 시스템에 대한 LQG/LTR 방법에 관련된 새로운 결과들을 제시한다. LQG/LTR 방법은 시간지연이 없는 시스템들에 대해 많은 연구가 진행되어 왔으며[1~5], 이는 LQ 조정기와 칼만 필터의 강인성에 관한 결과[6, 7]와 LQ 조정기의 저가 제어(cheap control) 특성이나 칼만 필터의 maximum accuracy 특성에 관한 결과[8]에 이론적 근거를 두고 있다.

또한 이와 같은 상비방시스템에서의 LQG/LTR 방법을 시간지연 시스템으로 확장시켜 일반화하려는 연구도 진행되어 왔다. W. H. Kwon[9], K. Uhida와 E. Shimemura[10], W. H. Lee와 B. Levy[11] 등이 LQ 조정기에 대한 circle 조건을 유도하였고 시간지연이 없는 시스템에 대한 강인 안정 조건[1]을 이용하여 W. H. Lee와 B. Levy[11]는 상태에 시간지연이 있는 시스템에 대하여도 LQ 조정기가 동일한 안정도 여유를 보장함을 보였다. W. H. Kwon과 S. J. Lee[12]는 시간지연 시스템에 대한 강인 안정 조건을 이용하여 상태에 시간지연이 있는 시스템에 대한 강인성을 연구하였다. 특히, W. H. Kwon과 S. J. Lee[12]는 LQ 조정기의 저가 제어 특성을 규명하고 LQG/LTR 방법을 상태에 시간지연이 있는 시스템으로 확장시켰다. 입력에 시간지연이 있는 시스템에 대하여는 Lee등[13]이 LQ 조정기의 안정도 여유를 개루우프 안정한 시스템에 대해 시스템 파라미터들로서 명시적으로 표현하였으며 LQG/LTR 방법을 입력에 시간지연이 있는 시스템으로 확장시켰다.

S. J. Lee와 S. M. Hong[18]은 출력에 시간지연이 있는 시스템에 대한 칼만필터의 강인성에 대해 연구하였다. 특히 칼만필터의 궤환차행렬에 관련된 circle 조건을 유도하였으며 이 조건과 강인안정조건[12]을 이용하여 상태와 출력에 시간지연이 있는 시스템에 대한 칼만필터가 시간지연이 없는 시스템에 대한 칼만필터와 동일한 비발산여유(nondivergence margin)를 보장함을 보였다. 그러나 출력에 시간지연이 있는 시스템에 대한 LQG/LTR 방법에 대한 결과들은 알려진 바 없

다. 본 논문에서는 최소위상플랜트라 하더라도 출력에 시간지연이 있는 시스템에 대하여는 LQG/LTR 방법으로 목표루우프 전달함수(target loop transfer function)행렬로 완전히 복구할 수 없음을 보인다. 또 개루우프 안정한 시스템에 대해 칼만 필터 Riccati 방정식의 해의 상한값을 이용하여 복구 오차의 상한값을 유도하였다.

한편, 출력에 시간지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터는 입력에 시간지연이 있는 LQ 조정기와 쌍대(dual)의 관계에 있음이 잘 알려져 있다[15]. 특히, LQ 제어 문제와 칼만 필터 문제는 서로 adjoint 임이 알려져 있다. 이러한 특성을 이용하여 R. H. Kwong[15]은 stationary 칼만 필터의 안정도를 증명하는 바 있다. 본 논문에서는 출력 시간지연 시스템에 대한 칼만 필터와 입력 시간지연 시스템에 대한 LQ 조정기 사이의 새로운 쌍대 특성을 제시한다. 입력 시간지연 시스템에 대한 LQ 조정기는 시간지연이 없는 시스템에서와 동일한 안정도 여유를 보장하지 못한다. 반면에 LQG/LTR 방법을 적용하면 복구 오차없이 목표 루우프 전달함수로 완전히 복구됨이 알려져 있다[13]. 전술한 바와 같이 출력 시간지연 시스템에 대한 칼만 필터는 시간지연이 없는 시스템에서와 동일한 안정도 여유를 보장하나 LQG/LTR 방법 적용시 복구 오차를 완전히 제거할 수 없다. 본 논문에서는 출력 시간지연 시스템에 대한 LQG/LTR 방법의 복구 오차와 입력 시간지연 시스템에 대한 LQ 조정기의 궤환 이득이 서로 쌍대 관계에 있음을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 출력에 시간지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터의 강인성을 보인다. III장에서는 LQG/LTR 방법을 적용할 경우 LQ 제어기의 루우프 전달함수의 접근값에 관련된 공식을 유도한다. IV장에서는 LQG/LTR 방법과 관련하여 입력 시간지연 시스템과 출력 시간지연 시스템 사이의 쌍대 관계를 제시하며 V장에 결론을 맺는다.

II. 칼만필터의 강인성

본 논문에서 다루는 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + w(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = C_0 x(t) + C_1 x(t-h) + v(t) \quad (2.2)$$

여기서 $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^m$ 이고 A_0 , C_0 및 C_1 은 각각 $n \times n$, $m \times n$ 및 $m \times n$ 상수행렬이다. $w(t)$ 와 $v(t)$ 는 영평균 백색잡음으로 공분산 세기가 각각 Σ 및 Θ 이며 서로 독립적 프로세스로 가정한다. 식 (2.1) 및 (2.2)에 대한 칼만 필터는 시스템이 검증가능하다는 조건하에 다음과 같이 주어진다[14].

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0 \hat{x}(t) \\ &+ [P_0 C_0^T + P_1(-h)C_1^T] \Theta^{-1} [y(t) - C_0 \hat{x}(t) - C_1 \hat{x}(t-h)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t-h) &= \hat{x}(t-h/h) \\ &+ \int_{-h}^0 [P_1(-\sigma-h)C_0^T + P_2(-\sigma-h, -h)C_1^T] \Theta^{-1} \\ &[y(t+\sigma) - C_0 \hat{x}(t+\sigma/h+\sigma) - C_1 \hat{x}(t+\sigma-h/h+\sigma)] d\sigma \end{aligned} \quad (2.4)$$

여기서 $\dot{x}(\theta|0)=0$, $-h \leq \theta \leq 0$ 이며 P_0 , $P_1(\theta)$, $P_2(\eta, \theta)$ 는 다음과 같이 서로 연결된 Riccati 방정식의 해이다:

$$0 = A_0 P_0^T + P_0 A_0^T + E - [P_0 C_0^T + P_1^T(-h) C_1^T] \Theta^{-1} [C_0 P_0 + C_1 P_1(-h)] \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_1(\theta) = -P_1(\theta) A_0^T + [P_1(\theta) C_0^T + P_2(\theta, -h) C_1^T] \Theta^{-1} [C_0 P_0 + C_1 P_1(-h)] \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) P_2(\theta, \eta) = [P_1(\theta) C_0^T + P_2(\theta, -h) C_1^T] \Theta^{-1} [C_0 P_1^T(\eta) + C_1 P_2^T(\eta, -h)] \quad (2.7)$$

이와 같은 Riccati 방정식의 경계조건은 $-h \leq \theta \leq 0$ 에 대해 $P_1(0) = P_0$ (2.8)

$$P_2(\theta, 0) = P_1(\theta) \quad (2.9)$$

이며, $-h \leq \theta \leq 0$, $-h \leq \eta \leq 0$ 에 대해 $P_0^T = P_0$ (2.10)

$$P_1^T(\theta, \eta) = P_2(\eta, \theta) \quad (2.11)$$

과 같은 대칭성을 갖는다. 그림 2.1에 칼만 필터의 블록선도를 보였으며, 여기서 $\mu(t)$ 는 innovation 벡터로서 다음과 같이 정의된다.

$$\mu(t) = y(t) - C_0 \hat{x}(t|t) - C_1 \hat{x}(t-h|t) \quad (2.12)$$

추정된 출력 $\hat{y}(t)$ 와 innovation 벡터 $\mu(t)$ 는 주파수 영역에서 다음과 같은 관계로 표현될 수 있다.

$$\hat{y}(s) = [(C_0 + C_1 e^{-sh}) \Phi(s) H_1 + C_1 e^{-sh} H_2(s)] \mu(s) \quad (2.13)$$

여기서, $\Phi(s) = (sI - A_0)^{-1}$ (2.14)

$$H_1 = (P_0 C_0^T + P_1^T(-h) C_1^T) \Theta^{-1} \quad (2.15)$$

$$H_2(s) = (\bar{P}_1(-s) C_0^T + \bar{P}_2(-s) C_1^T) \Theta^{-1} \quad (2.16)$$

$$\bar{P}_1(s) = \int_{-h}^0 e^{s\theta} P_1(\theta) d\theta \quad (2.17)$$

$$\bar{P}_2(s) = \int_{-h}^0 e^{s\theta} P_2(\theta, -h) d\theta \quad (2.18)$$

이다. 또, 이와 같은 칼만 필터의 입력단, 즉 루우프 절단점 X에서의 궤환차 행렬(return difference matrix)은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$T(s) = I + (C_0 + C_1 e^{-sh}) \Phi(s) H_1 + C_1 e^{-sh} H_2(s) \quad (2.19)$$

식 (2.19)와 같이 정의된 궤환차 행렬에 관련된 circle 조건을 유도하기 위해 식 (2.6) 및 식 (2.7)로 주어지는 연산자 형태의 Riccati 방정식을 주파수 영역에서 대수적인 표현식으로 변환하는 것이 필요하다.

보조정리 2.1 : 경계조건 식 (2.8)과 식 (2.9)를 갖는 연산자 형태의 미분방정식 (2.6)과 식 (2.7)은 주파수 영역에서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$0 = \bar{P}_1(s) A^T(s) + P_1(-h) e^{-sh} - P_0 + [\bar{P}_1(s) C_0^T + \bar{P}_2(s) C_1^T] \Theta^{-1} [C_0 P_0 + C_1 P_1(-h)] \quad (2.20)$$

$$0 = \bar{P}_1^T(s) - \bar{P}_2^T(s) e^{sh} + \bar{P}_1(-s) - \bar{P}_2(-s) e^{-sh} - [\bar{P}_1(-s) C_0^T + \bar{P}_2(-s) C_1^T] \Theta^{-1} [C_0 \bar{P}_1^T(s) + C_1 \bar{P}_2^T(s)] \quad (2.21)$$

여기서 $A(s) = sI - A_0$ (2.22)

이다. **증명** : 식 (2.6)의 양변에 $e^{s\theta}$ 를 곱하고 θ 에 대해 $-h$ 부터 0까지 적분하면

$$\int_{-h}^0 e^{s\theta} \frac{d}{d\theta} P_1(\theta) d\theta = -\bar{P}_1(s) A_0^T + [\bar{P}_1(s) C_0^T + \bar{P}_2(s) C_1^T] \Theta^{-1} [C_0 P_0 + C_1 P_1(-h)] \quad (2.23)$$

이 되는데 좌변에 경계조건 식 (2.8)을 대입하여 정리하면 식 (2.20)이 된다. 또 식 (2.7)의 양변에 $e^{s(\eta-\theta)}$ 를 곱하고 η 와 θ 에 대해 $-h$ 부터 0까지 적분하면

$$\int_{-h}^0 \int_{-h}^0 e^{s(\eta-\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) P_2(\theta, \eta) d\theta d\eta = [\bar{P}_1(-s) C_0^T + \bar{P}_2(-s) C_1^T] \Theta^{-1} [C_0 \bar{P}_1^T + C_1 \bar{P}_2^T(s)] \quad (2.24)$$

가 되며 경계 조건 식 (2.9)를 이용하여 식 (2.21)을 얻는다. 이상으로 증명은 완료된다. ▽▽▽

상태에만 시간지연이 있는 시스템에서 칼만필터의 Riccati 방정식은 주파수 영역에서 다음과 같은 대수적 관계를 갖는다 [12].

$$T_H(s) \Theta T_H(-s) = \Theta + C_0 \Phi(s) E \Phi^T(-s) C_0^T \quad (2.25)$$

여기서 $T_H(s)$ 는 칼만필터의 궤환차 행렬이고 $\Phi_1(s)$ 는 $\Phi_1(s) = (sI - A_0 - A_1 e^{-sh})^{-1}$ (2.26)

식 (2.25)의 결과로 부터 상태에 시간지연이 있는 시스템을 위한 칼만필터는 시간지연이 없는 시스템에 대한 칼만필터와 동일한 비발산여유를 보장함을 알 수 있다.

불행히도 출력에 시간지연이 있는 시스템의 경우는 상태에 시간지연 여부와 관계없이 칼만필터의 Riccati 방정식 식 (2.5) ~ 식 (2.7)이 보조정리 2.1 에서와 같이 하나의 대수 방정식으로 변환될 수 없다. 그러나 식 (2.25)와 유사하게 궤환차 행렬에 관련된 다음의 관계식을 유도할 수 있다.

정리 2.1 : 상태 및 출력에 시간지연이 있는 시스템 (2.1) 및 (2.2)에 대한 칼만필터는 주파수 영역에서 다음의 관계를 만족시킨다.

$$T(j\omega) \Theta T(j\omega) = \Theta + (C_0 + C_1 e^{-jsh}) \Phi(j\omega) \Phi^*(j\omega) (C_0 + C_1 e^{-jsh})^* \quad (2.27)$$

여기서 *는 복소공액 전치(complex-conjugate transpose)를 의미하며 $0 \leq \omega \leq \infty$ 이다.

증명 : 궤환차 행렬의 정의식 (2.19)와 보조정리 2.1의 결과 및 식 (2.5)를 이용하여 구한다[18]. ▽▽▽

일반적으로 입력지연 시스템에 대한 LQ 조정기와 출력지연 시스템에 대한 칼만필터는 쌍대성을 갖는다고 알려져 있다 [14]. 입력 지연 시스템에서 LQ 조정기에 관계된 궤환차 행렬은 다음과 같은 관계식을 만족한다[13].

$$T_F^*(j\omega) [I + F_1(j\omega)]^* R [I + F_1(j\omega)] T_F(j\omega) = R + (B_0^T + B_1^T e^{jsh}) (-j\omega I - A_0^T)^{-1} Q (j\omega I - A_0)^{-1} (B_0 + B_1 e^{-jsh}) \quad (2.28)$$

여기서 R과 Q는 경비함수에서의 가중행렬(weighting matrix)이고 $F_1(j\omega)$ 는

$$F_1(j\omega) = R^{-1} [B_0^T \int_{-h}^0 e^{j\omega\theta} E_1(\theta) d\theta + B_1^T \int_{-h}^0 e^{j\omega\theta} E_2(0, \theta) d\theta] B_1 \quad (2.29)$$

이다. 식 (2.29)에서 $E_1(\theta)$ 및 $E_2(0, \theta)$ 는 Riccati 방정식의 해이다. 따라서 입력지연 시스템의 경우에 LQ 조정기는 시간지연이 없는 시스템의 경우와는 다른 강인성을 갖는다. 출력에 시간지연이 있는 시스템에서 칼만필터는 다음과 같은 circle 조건을 만족시킨다[18].

$$T(j\omega) \Theta T^*(j\omega) \geq \Theta \quad (2.30)$$

이로부터 시스템 (2.1) 및 (2.2)에 대한 칼만필터는 시간지연이 없는 시스템에서와 동일한 비발산 여유를 가짐을 알 수 있다.

정리 2.2 : 상태 및 출력에 시간지연이 있는 시스템 (2.1) 및 (2.2)에 대한 칼만필터 식 (2.3) 및 (2.4)는 시간지연이 없는 시스템에 대한 칼만필터와 동일한 비발산 여유를 보장한다. 즉 H가 대각행렬인 경우에 각 입력 루우프에 역시 대각행렬을 갖는 비간섭 교환에 대해 $(1/2, \infty)$ 의 이득여유와 $\pm 60^\circ$ 이상의 위상여유를 보장한다.

증명 : 이는 시간지연시스템에 대한 강인안정도 조건[12]과 circle 조건 식 (2.30)으로부터 직접적으로 구할 수 있다. ▽▽▽

$$V_1(\theta) = \begin{bmatrix} C_1 N C_1^T & C_1 \Phi^T(-\theta) N C_1^T \\ C_1 N \Phi(-\theta) C_1^T & C_1 N C_1^T \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

이다.

증명 : 식 (3.19)로부터 $0 \leq \omega < \infty$ 영역에서 $\bar{\sigma}(D) \leq m \cdot v(D)$ 조건을 이용하면

$$\bar{\sigma}[E(j\omega)] \leq \bar{\sigma}(\theta^{-1}) \cdot \bar{\sigma} \left[\int_{-h}^0 e^{s\theta} C_1 P_2(-\theta-h, -h) C_1^T ds \right] \quad (3.50)$$

$$\leq m \cdot \sigma(\theta^{-1}) \cdot \int_{-h}^0 v[C_1 P_2(-\theta-h, -h) C_1^T] ds$$

이 된다. 보조정리 3.2를 이용하면 식 (3.48)로 부터 식 (3.50)이 유도 된다. 이상으로 증명은 완료 된다. $\nabla \nabla \nabla$

이 장에서는 루우프 전달 복구(LTR) 절차를 출력에 시간지연이 있는 시스템에 적용할 때 민감도 함수 행렬의 점근적 특성을 명백히 제시하였다. 최소 위상 플랜트 임에도 불구하고 출력에 시간지연이 있는 시스템에 대해서는 목표 루우프 전달 함수 행렬로 완전히 복구될수 없음을 보였으며 상대적 오차 함수 행렬의 상한값을 시스템 파라미터의 함수로 명시적으로 표현하였다.

IV. 칼만필터와 LQ 제어기의 쌍대성

선형 확률적 (stochastic) 시간 지연 시스템에 대한 최적 필터와 2차경비 함수를 갖는 선형 시간지연 시스템에 대한 최적 제어기 사이의 쌍대성은 이미 잘 알려져 있다. 상태 지연 시스템에 대하여 R.H.Kwong 과 A.S.Willsky[14]는 역시 쌍대 최적제어 문제로서 칼만 필터 이득과 점근적 안정도를 증명하였다. R.H.Kwong과 A.S.Willsky[14]는 역시 쌍대 최적 제어 문제에서 잘 알려져 있는 안정도 특성을 이용하여 상태 지연 시스템에 대한 칼만 필터의 점근적 안정도를 증명하였다. 상태와 출력에 시간지연이 있는 시스템에 대하여는 R.H.Kwong[15]이 stationary 칼만 필터가 쌍대인 무한시간 제어 문제에 대한 최적 폐회로 시스템과 adjoint 관계에 있음을 보였다.

한편 W.H.Kwon과 S.J.Lee[12]는 상태지연 시스템에 대한 칼만 필터와 LQ 조정기가 구조를 갖지 않는 불확실성 (unstructured uncertainty)에 대해 쌍대의 강인성을 갖고 있음을 보였다. 만약 출력에 시간 지연이 있는 경우 칼만 필터는 쌍대인 입력에 시간지연이 있는 시스템에 대한 LQ 조정기와는 다른 강인성을 갖는다. 그러나 이 경우에 있어서는 강인성과 루우프 전달 복구 특성 사이에 관련된 쌍대성을 갖는다. 이를 보이기 위하여 먼저 입력에 시간지연이 있는 시스템을 위한 LQ 조정기의 강인성과 LQG 조정기의 루우프 전달 복구 특성을 살펴본다.

입력에 시간 지연이 있는 다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + B_1 u(t-h) \quad (4.1)$$

이때 초기조건은

$$u(\theta) = \psi(\theta), \quad -h \leq \theta < 0 \quad (4.2)$$

이고 여기서 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 이며 A_0 , B_0 및 B_1 은 적절한 차수의 상수행렬이다. 2차 경비함수를

$$J(u) = \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (4.3)$$

로 두고 $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ 로 놓으면 가안정성 (stabilizability) 조건하에서 LQ 조정기의 해는 다음과 같이 주어진다[15, 17].

$$u(t) = -R^{-1} [B_0^T E_0 + B_1^T E^T(0)] x(t)$$

$$-R^{-1} \int_{-h}^0 [B_0^T E_1(\theta) + B_1^T E_2(0, \theta)] B_1 u(t+\theta) d\theta \quad (4.4)$$

여기서 괄호 이득들은 다음과 같이 서로 결합되어 있는 일련의 Riccati 방정식의 해로 주어진다.

$$0 = E_0 A_0 + A_0^T E_0 + Q - [E_0 B_0 + E_1(0) B_1] R^{-1} [B_0^T E_0 + B_1^T E^T(0)] \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{d\theta} E_1(\theta) = A_0^T E_3(\theta)$$

$$-[E_0 B_0 + E_1(0) B_1] R^{-1} [B_0^T E_1(\theta) + B_1^T E_2(0, \theta)] \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) E_2(\eta, \theta) = -[E_1^T(\eta) B_0 + E_2(\eta, 0) B_1] R^{-1} \cdot [B_0^T E_1(\theta) + B_1^T E_2(0, \theta)] \quad (4.7)$$

이때 $-h \leq \eta \leq 0$ 와 $-h \leq \theta \leq 0$ 의 구간에서 경계조건은 식 (3.30) - 식 (3.31)과 같고 대칭조건은 식 (3.32) - (3.33)과 같다.

플랜트 입력단에서 루우프를 절단하였을 때 LQ조정기의 개환차 행렬은

$$T_F(s) = I + F(s) \Phi(s) (B_0 + B_1 e^{-sh}) \quad (4.8)$$

가 되고 여기서

$$F(s) = [I + F_1(s)]^{-1} F_0 \quad (4.9)$$

$$F_0 = R^{-1} [B_0^T E_0 + B_1^T E^T(0)] \quad (4.10)$$

$$F_1(s) = R^{-1} [B_0^T E_1(s) + B_1^T E_2(s)] B_1 \quad (4.11)$$

$$E_1(s) = \int_{-h}^0 e^{s\theta} E_1(\theta) d\theta \quad (4.12)$$

$$E_2(s) = \int_{-h}^0 e^{s\theta} E_2(0, \theta) d\theta \quad (4.13)$$

이다.

이제 개환차 행렬과 관련한 circle 조건을 유도한다.

정리 4.1 : 식 (4.1)과 같은 시스템에 대한 LQ조정기는 주파수 영역에서 다음과 같은 관계를 만족시킨다 :

$$T_F^*(j\omega) [I + F_1(j\omega)]^* R [I + F_1(j\omega)] T_F(j\omega) \geq R, \quad 0 \leq \omega < \infty \quad (4.14)$$

증명 : 참고문헌 [13] 참조. $\nabla \nabla \nabla$

따라서 입력에 시간지연이 있는 시스템에 대한 LQ조정기의 안정도 여유 (stability margin)는 상태에 시간지연 여부와 무관하게 $F_1(j\omega)$ 의 크기에 의존함을 알 수 있다. 특히 안정도 여유는 다음과 같이 유도된다.

정리 4.2 : 시스템 (4.1)이 개루우프 안정하다고 가정하면 플랜트 입력단에 비간섭교란이 발생할 때 LQ 조정기의 식 (4.4)는 입력 가중 행렬 R 이 대각 행렬인 경우에 다음과 같은 안정도 여유를 갖는다:

$$\text{이득여유} = \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}, \frac{1+\alpha}{\alpha} \right) \quad (4.15)$$

$$\text{위상여유} = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2(1+\alpha)^2} \right] \quad (4.16)$$

여기서

$$\alpha = m \cdot \bar{\sigma}(R^{-1}) \frac{\bar{\sigma}(R^{\frac{1}{2}})}{\underline{\sigma}(R^{\frac{1}{2}})} \int_{-h}^0 (\bar{\sigma}[M_1(\theta)] + \bar{\sigma}[M_2(\theta)]) d\theta \quad (4.17)$$

$$M_1(\theta) = \begin{bmatrix} B_1^T N B_1 & B_1^T \Phi^T(-\theta) N B_1 \\ B_1^T N \Phi(-\theta) B_1 & B_1^T N B_1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$M_2(\theta) = \begin{bmatrix} B_0^T N B_0 & B_0^T \Phi^T(h+\theta) N B_1 \\ B_1^T N \Phi(h+\theta) B_0 & B_1^T N B_1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

이고 N 은 식 (3.40) 과 같이 정의되는 식이다.

$B_0=0$ 의 경우에도 정리 4.1의 결과가 적용될 수 있다. 그러나 정리 4.2에서는 $B_0=0$ 일때 $F_1(s) = R^{-1} B_1^T E_2(s) B_1$ 으로 주어지므로

$$\alpha = m \cdot \bar{\sigma}(R^{-1}) \frac{\bar{\sigma}(R^{\frac{1}{2}})}{\underline{\sigma}(R^{\frac{1}{2}})} \int_{-h}^0 \bar{\sigma}[M_1(\theta)] d\theta$$

로 변경되어야 한다.

증명 : 참고문헌[13] 참조. $\nabla \nabla \nabla$

이제 다음과 같은 시스템에 대한 LQG조정기의 루우프 전달 복구 특성을 살펴 본다.

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_1 u(t-h) + w(t) \quad (4.20)$$

$$y(t) = C_0 x(t) + v(t) \quad (4.21)$$

이때 초기조건은 식(4.2)와 같고 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$ 이다. 또한 $w(t)$ 와 $v(t)$ 는 공분기 세기를 각각 Σ 와 Θ 로 갖는 영평균 백색 잡음이다.

위의 시스템에 대해 $Q = Q^T \geq 0$ 이고 $R = R^T > 0$ 인 2차 경비함수

$$J(u) = E \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (4.22)$$

를 최소화하는 LQG조정기는 가안정성과 가검출성 (detectability)조건하에서 다음과 같이 주어진다 [15].

$$u(t) = -R^{-1}B^T[E_1^T(0)\dot{x}(t) + \int_{-h}^0 E_2(0, \theta)B_1u(t+\theta)d\theta] \quad (4.23)$$

여기서 궤환이득 행렬들은 $B_0=0$ 일때의 식 (4.5) ~ 식(4.7)로부터 구할 수 있고 칼만 필터도 식 (2.3)-식(2.7)에서 $C_1=0$ 로 두어 구할 수 있다. LQG 조정기는 그림 4.1과 같이 표현할 수 있으며 여기서 H 는 칼만 필터 이득으로

$$H = \Sigma C_0^T \Theta^{-1} \quad (4.24)$$

이 되고 Σ 는 다음과 같은 대수 Riccati 방정식의 해이다.

$$A_0\Sigma + \Sigma A_0^T - \Sigma C_0^T \Theta^{-1} C_0 \Sigma + \Sigma = 0 \quad (4.25)$$

플랜트 입력단에서 루우프를 절단할 때 LQG 조정기의 궤환차 행렬은

$$T_{LQG}(s) = I + F(s)[\Phi^{-1}(s) + HC_0 + B_1e^{-sh}F(s)]^{-1}HC_0\Phi(s)B_1e^{-sh} \quad (4.26)$$

가 된다.

정리 4.3 : $C_0\Phi(s)B_1$ 이 개루우프 안정하고 최소 위상이며 left invertible하다고 가정하고 플랜트 입력단에 루우프 전달 복귀 절차를 적용하면 LQG 제어기의 궤환차 행렬은 LQ 조정기의 궤환차 행렬과 같아진다.

증명 : 참고문헌[13] 참조. ▽▽▽

따라서 시스템 (4.33)-(4.34)에 대한 LQG 조정기의 궤환차 행렬은

$$T_{LTR}(j\omega) [I + F_1(j\omega)]^* R [I + F_1(j\omega)] T_{LTR}(j\omega) \\ = R + B^T e^{j\omega h} \Phi^*(j\omega) Q \Phi(j\omega) B_1 e^{-j\omega h} \quad (4.27)$$

이 되고 반면에 시스템 (3.1)-(3.2)에 대한 LQG 조정기의 궤환차 행렬은

$$T_{LTR}(j\omega) [I + E(j\omega)] \Theta R [I + E(j\omega)]^* T_{LTR}(j\omega) \\ = \Theta + C_1 e^{-j\omega h} \Phi(j\omega) E \Phi^*(j\omega) C_1^T e^{j\omega h} \quad (4.28)$$

가 됨을 알 수 있다. 이제 쌍대성 관계에 대한 다음의 정리로 본 장을 결론 짓는다.

정리 4.4 : 만약 상태와 출력이 시간지연이 있는 시스템에 대한 LQG 조정기와 그의 쌍대 시스템에 대한 LQG 조정기에 루우프 전달 복귀 절차를 적용하면 결과의 LQG 조정기는 동일한 강인성을 갖는다.

증명 : 이는 정리 3.1, 식(4.27), 식(4.28), 정의식(3.19) 및 $B_0=0$ 일때의 식(4.11)로부터 쉽게 증명될 수 있다. ▽▽▽

정리 4.4는 출력이 시간지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터의 강인성과 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 쌍대 LQ 조정기의 강인성이 쌍대가 아니라도 출력이 시간지연이 있는 시스템에 대한 LQG 조정기와 입력에 시간 지연이 있는 쌍대 시스템에 대한 LQG 조정기에 루우프 전달 복귀 절차를 적용시켰을 때 강인성 측면에서 서로 쌍대의 관계로 복귀됨을 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 출력이 시간 지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터의 강인성과 LQG 조정기의 루우프 전달 복귀 특성을 연구하였다. 이 경우에 칼만 필터가 (1/2, ∞)의 이득여유와 ±60° 이상의 위상여유를 보장함을 보였으며 최소 위상 시스템인 경우에도 LQG/LTR 방법으로 목표 칼만 필터 루우프 전달 함수로 완전히 복귀시킬 수 없음을 보였다. 또 개루우프 안정한 시스템에 대해 복귀 오차의 상한값을 유도하였다. 마지막

으로 출력이 시간 지연이 있는 시스템에 대한 LQG/LTR 방법의 복귀 오차가 쌍대인 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 LQ 조정기의 궤환이득과 쌍대 관계에 있음을 보였다.

본 연구는 한국과학재단(KOSF) 및 국방과학 연구소(ADD)의 연구비 지원에 의해 수행된 연구입니다.

참고문헌

1. J. C. Doyle and G. Stein, "Robustness with observers," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.24, pp. 607-611, Aug. 1979.
2. Z. Zhang and J. S. Freudenberg, "Loop transfer recovery for nonminimum phase plants," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.35, pp. 547-533, May 1990.
3. G. Stein and M. Athans, "The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.32, pp. 105-114, Feb. 1987.
4. A. Saberi, B. M. Chen and P. Samuti, "Theory of LTR for nonminimum phase systems, recoverable target loops, and recovery in a subspace," Int. J. Contr., Vol.53, No.5, pp. 1067-1160, 1991.
5. H.H. Niemann and O. Jannerup, "An analysis of pole/zero cancellation in LTR-based feedback design," in Proc. American Control Conference, 1990, San Diego, California, pp. 848-853.
6. M.G. Safonov and M. Athans, "Gain and phase margin of multiloop LQG regulators," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.22, pp. 173-179, Apr. 1977.
7. N. A. Lehtomaki, N. R. Sandell and M. Athans, "Robustness results in LQG based multivariable control designs," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.26, pp. 75-93, Feb. 1981.
8. H. Kwakernaak and R. Sivan, "The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.17, pp.79-86, Feb. 1972.
9. W. H. Kwon, "Infinite-time regulator for a class of functional differential systems and a minimum control energy problem for ordinary differential systems," Ph. D dissertation, Brown Univ., Providence, RI, June 1976.
10. K. Uchida and E. Shimemura, "Closed-loop properties of the infinite-time linear quadratic optimal regulator for systems with delays," Int. J. Contr., Vol.43, No. 3, pp. 773-779, 1986.
11. W. H. Lee and B. Levy, "Robustness properties of linear quadratic hereditary differential systems," in Proc. 21st IEEE Conf. on Decision and Control, 1982, Orlando, FL, pp. 1267-1272.
12. W. H. Kwon and S. J. Lee, "LQG/LTR methods for linear systems with delay in state," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.47, No. 5, pp.1179-1184, 1988.
13. S. J. Lee, W. H. Kwon and S. W. Kim, "LQG/LTR methods for linear input-delayed systems," Int. J. Contr., Vol.47, No. 5, pp. 660-681, July 1988.
14. R. H. Kwong and A. S. Willsky, "Estimation and filter stability of stochastic delayed systems," SIAM J. Contr., Vol.16, pp. 660-681, July 1978.
15. R. H. Kwong, "A stability for the linear-quadratic-Gaussian problem for systems with delay in the state, control and observations," SIAM J. Contr., Vol.18, No.1, pp. 49-75, 1980.
16. G. J. Nazzaroff, "Inverse differential-delay systems," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.19, pp. 87-88, Feb. 1974.
17. M. A. Soliman and W. H. Ray, "Optimal feedback control for linear-quadratic systems having time delays," Int. J. Contr., Vol.15, No.4, pp. 609-627, 1972.
18. S. J. Lee and S. M. Hong, "Robustness properties of Kalman filters for systems with delays in state

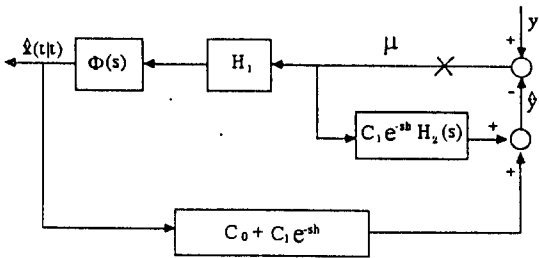


그림 2.1 칼만필터의 블록선도

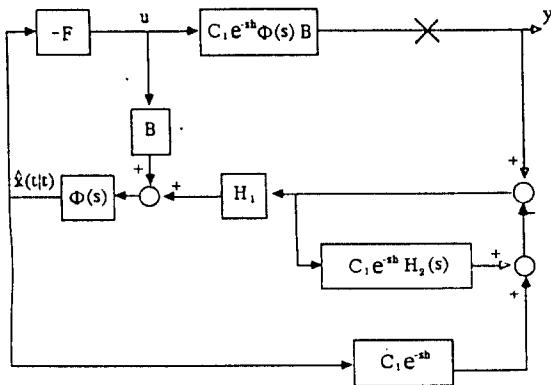


그림 3.1 LQG 조정기의 블록선도

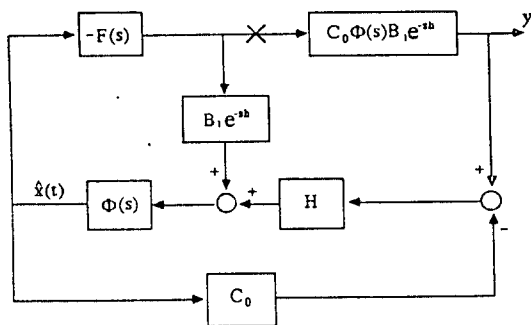


그림 4.1 LQG 조정기의 블록선도