

효율적 모우드 제어를 위한 구동기 위치 결정법

노현석, 박영진

Placement of Actuator for Efficient Modal Control

Hyounsurk Roh and Youngjin Park
Center for Noise and Vibration Control(NOVIC)
Department of Mechanical Engineering, KAIST*

Abstract

A method of finding the optimal actuator location for efficient control of the modes of interest is presented. The proposed approach relies on certain quantitative measure of degree of controllability based on the controllability grammian. This measure proves to be useful for regulating problem of the undamped system and can be extended to cover the tracking problem of the viscous damped system. The example of the uniform cantilever beam is given to verify the effectiveness of the method.

1. 서론

유동계에 대한 능동 제어는 주로 주어진 구동기의 위치하에 원하는 성능을 만족시키는 제어 법칙을 찾는 데 주력해 왔다. 그러나, 구동기의 위치가 가제어성을 위반하는 경우 어떠한 입력으로도 원하는 제어 목적을 이룰 수 없음을 고려할 때, 가제어성을 고려한 구동기의 위치 선정은 중요한 의미를 갖게 된다.

그러나, 기존의 가제어성 검사방법은 2분법적 정보만을 얻을 수 있기 때문에 많은 후보들 가운데 구동기의 위치를 결정해야 하는 상황에서는 사용될 수 없다. 따라서, 구동기 위치 선정을 위해선 가제어성을 정량화하는 새로운 척도가 절실히 요구된다.

가제어성의 정도(degree of controllability)에 대한 연구로는 가제어 그래미언(controllability grammian)의 크기를 정량화한 Muller 등의 연구[1], 회복 영역(recovery region)과 관련된 Viswanathan 등의 연구[4], 입력벡터와 계의 우측 고유벡터사이의 부사값과 관련된 Hamdan 등의 연구[5] 등을 들 수 있다.

그러나, 기존의 방법들은 대부분 전체 모우드에 대한 제어를 목적으로 하기 때문에, 관심 모우드의 효율적 제어라는 측면에 미루어 볼 때 적합하지 못하였다.

따라서, 본문에서는 이 목적에 부합하는, 선택 모우드에 해당

하는 상태 변수(State Variable)의 영역과 가제어 그래미언의 지역 공간간의 거리와 관련된 새로운 모우드 가제어도(=가제어성의 정도)를 제안하고 그의 유용성을 증명하도록 하겠다.

2. 본론

2.1. 관심계

분산계(distributed system)에 대한 지배 방정식은 다음과 같다.

$$L(w(x,t)) + C(\dot{w}(x,t)) + m(x)\ddot{w}(x,t) = \sum_{i=1}^p F_i(t)\delta(x-x_i) \quad (0 < x < l) \quad (2.1.1)$$

여기서,

$w(x,t)$ 는 구조물내의 특정지점 x 의 시간 t 에서의 변위
 $L(\)$ 는 $2p$ 의 차수를 갖는 균질미분 강성연산자(homogeneous differential stiffness operator)
 $C(\)$ 는 균질미분 감쇠연산자
 $m(x)$ 는 질량 분포
 $F_i(t)$ 는 i 번째 점 구동기(point actuator)의 제어력의 크기
 x_i 는 i 번째 점 구동기의 위치

(2.1.1)식의 해 $w(x,t)$ 는 다음의 경계 조건을 갖는다.

$$B_i(w(x,t)) = 0, \quad x = 0, l, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.1.2)$$

여기서,

B_i 는 $2p-1$ 의 최고차수를 갖는 미분연산자

계에 대한 closed form의 고유해가 존재하지 않을 경우, 다음과 같은 근사해를 가정한다.

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(x)q_k(t) \quad (2.1.3)$$

여기서,

$\phi_k(x)$ 는 비교함수(comparison function)
 $q_k(t)$ 는 일반 좌표(generalized coordinate)

이를 (2.1.1)식에 대입하고, 양변에 $\phi_k(x)$ 를 곱한 뒤 적분을 취하

면 다음과 같은 n 개의 상미분 방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^n m_k \ddot{q}_k(t) + \sum_{k=1}^n c_k \dot{q}_k(t) + \sum_{k=1}^n k_k q_k(t) = Q_j(t) \quad (2.1.4)$$

($j = 1, 2, \dots, n$)

여기서,

$$m_k = \int_0^l m \phi_k dx = m_{k_0} \quad : \text{질량 계수}$$

$$c_k = \int_0^l \phi_k C(\phi_k) dx \quad : \text{감쇠 계수}$$

$$k_k = \int_0^l \phi_k L(\phi_k) dx = k_{k_0} \quad : \text{강성 계수}$$

$$Q_j(t) = \int_0^l \phi_j(x) \sum_{i=1}^m F_i(t) \delta(x-x_i) dx$$

$$= \sum_{i=1}^m F_i(t) \phi_j(x_i) \quad : \text{generalized force}$$

($j, k = 1, 2, \dots, n$)

(2.1.4)식을 행렬식으로 바꾸면

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = [B]^T\{F(t)\} \quad (2.1.5)$$

여기서,

$$[M] = [m_k] = [M]^T \quad : \text{질량 행렬}$$

$$[C] = [c_k] \quad : \text{감쇠 행렬}$$

$$[K] = [k_k] = [K]^T \quad : \text{강성 행렬}$$

$$[B]^T = [\phi_j(x_i)] \quad : \text{의사 모우드참여 행렬}$$

(pseudo modal participation matrix)

$$\{q(t)\} = \{q_1(t) \dots q_n(t)\}^T \quad : \text{일반 변위 벡터}$$

$$\{F(t)\} = \{F_1(t) \dots F_m(t)\}^T \quad : \text{제어 벡터}$$

다음과 같은 상태벡터 $\{x(t)\}$ 를 고려하면

$$\{x(t)\} = \{\{q(t)\}^T \ \{\dot{q}(t)\}^T\}^T \in \mathcal{R}^{2n} \quad (2.1.6)$$

(2.1.5)식을 상태 방정식으로 변환할 수 있다.

$$\{\dot{x}(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B]\{F(t)\} \quad (2.1.7)$$

여기서,

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2n \times 2n} \quad (2.1.8)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[B]^T \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2n \times m} \quad (2.1.9)$$

한편, $[A]$ 의 고유해는 $[A]$ 의 비대칭성때문에 좌,우측 고유해로 구성된다.

$$[A]\{u_i\} = \lambda_i \{u_i\}, \quad \{v_i\}^T [A] = \lambda_i \{v_i\}^T$$

$$(i = 1, 2, \dots, 2n) \quad (2.1.10)$$

여기서,

$\{u_i\}$ 는 우측 고유벡터

$\{v_i\}$ 는 좌측 고유벡터

좌,우측 고유벡터간에는 상대 직교성(biorthogormality)가 성립되는데, 상대 단위직교성(biothonormality)를 만족하도록 정규화(normalization)시켰다고 가정하자.

$$\{v_i\}^T \{u_j\} = \delta_{ij} \quad (2.1.11)$$

또한 $[A]$ 는 (2.1.8)식과 같은 특이한 구조를 가지므로 우측 고유벡터 $\{u_i\}$ 는 다음과 같은 구조를 가진다.

$$\{u_i\} = \{\{\psi_i\}^T \ \sigma_i \{\psi_i\}^T\}^T \quad (2.1.12)$$

여기서,

$$(\sigma_i^2 [M] + \sigma_i [C] + [K])\{\psi_i\} = [0]$$

σ_i 는 잠재치(latent value)

$\{\psi_i\}$ 는 잠재 벡터(latent vector)

점성 감쇠계의 경우 복소값을 갖는 고유해는 공액관계에 있는 해와 pair로 존재하므로, 좌,우측 고유벡터로 구성된 모우드 행렬 $[V], [U]$ 는

$$[V] = [\{v_i\}_1 \dots \{v_i\}_n \ ; \ \{\bar{v}_i\}_1 \dots \{\bar{v}_i\}_n]$$

$$[U] = [\{u_i\}_1 \dots \{u_i\}_n \ ; \ \{\bar{u}_i\}_1 \dots \{\bar{u}_i\}_n] \quad (2.1.13)$$

이다. 이들 모우드 행렬은 (2.1.11)식을 고려할 때 다음의 관계를 갖는다.

$$[V]^T [U] = [I], \quad [V]^T [A] [U] = [\Lambda] \quad (2.1.14)$$

여기서,

$$[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$$

그러므로, 다음의 선형 변환을 (2.1.7)식에 대입하고

$$\{x(t)\} = [U]\{\xi(t)\} \quad (2.1.15)$$

결과식에 $[V]^T$ 를 양변에 곱하면 원하는 모우드 상태방정식을 얻게 된다.

$$\{\dot{\xi}(t)\} = [\Lambda]\{\xi(t)\} + [\bar{B}]\{F(t)\} \quad (2.1.16)$$

여기서,

$$[\bar{B}] = [V]^T [B]$$

2.2 관심 모우드의 효율적 제어

(2.1.7)식으로 표현되는 계에 대해 $p (< n)$ 개의 모우드 제어에 관심을 두고자 하는 경우를 고려해 보자. 이는 관심 모우드에 대한 제어가 용이하기를 바란다는 의미이며, 이를 위해선 각 모우드에 대한 가제어도라는 새로운 척도가 필요하다.

Brockett [9]에 의하면 다음과 같이 정의되는 가제어 그레미언에 대해

$$[W_c(t, t_0)] = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} [B][B]^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \quad (2.2.1)$$

다음의 정리가 성립한다.

(2.1.7)식에 의해 정의되는 계에 대해 다음의 상태 전이(state transfer)가 가능하기 위해선

$$\{x_0\} \text{ at } t = t_0 \rightarrow \{x_i\} \text{ at } t = t_i$$

다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$\{\{x_0\} - \Phi(t_0, t_i)\{x_i\}\} \in \text{Range}\{[W_c(t_0, t_i)]\} \quad (2.2.2)$$

여기서,

$\Phi(\cdot)$ 는 상태전이 함수

$\Phi(\cdot)$ 는 제어력이 작용하고 있지 않은 경우의 상태벡터의 궤적을 결정하므로, $\Phi(t_0, t_1)\{x_1\}$ 는 $t=t_1$ 에서의 상태 $\{x_1\}$ 로부터 제어력이 작용하지 않았다는 가정하에 $t=t_0$ 로 역소급시켰을 때의 계가 가졌을 상태를 나타낸다. 따라서 $\{x_0\}$ 과 $\Phi(t_0, t_1)\{x_1\}$ 가 일치한다면 제어가 필요없다는 것을 의미한다. 관심 모우드의 제어를 tracking 관점에서 하고자 한다면 $\{x_0\} = \{0\}$

$$\{x_1\} = [U]\{\xi(t_1)\}$$

이므로 $\{x_0\} - \Phi(t_0, t_1)\{x_1\}$ 가 가제어 그래미언의 치역 공간 (range space)내에 속하지 않으면 어떠한 입력으로도 원하는 상태(관심 모우드에 해당하는 상태)로의 진이를 얻을 수 없다. 또한 regulating 관점의 모우드 제어에 관심을 둔다면 $\{x_0\} = [U]\{\xi(t_0)\}$
 $\{x_1\} = \{0\}$

이므로 (2.2.2)식을 고려할 때 이는 관심 모우드에 대해 상태벡터가 도달할 수 있는 영역과 가제어 그래미언의 치역공간사이의 관계에서 관심 모우드에 대한 가제어도가 유도될 수 있다는 것을 알 수 있다.

즉 두 공간이 서로 밀접한 관계를 가질 수록 관심모우드의 가치는 그만큼 쉬워진다.

Golub [1]에 의하면 서로 다른 차원을 가지는 공간사이의 관계를 정의하는 계수로서 최대 주요각(largest principal angle)이 존재한다.

최대 주요각은 각각의 공간에서 정의되는 주요 벡터사이의 각 중 가장 큰 값을 나타내므로 최대 주요각은 일반적인 의 미의 교차각(intersection angle)로 생각될 수 있다.

최대 주요각을 이용한 모우드 가제어도는 다음과 같다.

$$DOC_i = \cos(\theta_p) \quad (2.2.3)$$

여기서,

θ_p 는 i 번째 모우드에 대한 상태벡터의 영역과 가제어 그래미언의 치역공간사이의 최대 주요각

최대 주요각에 cosine을 취하는 이유는 제어가 용이하면 할수록 가제어도도 큰 값을 갖도록 하기 위함이다.

DOC는 모우드에 대한 제어의 용이도를 표시하므로 관심 모우드가 결정되면 그 모우드들에 대해 DOC값을 크게 하는 것이 필요하다.

따라서 구동기의 위치를 많은 후보들 사이에서 결정하고자 할 때 DOC값을 각 위치에 대해 계산해 봄으로써 구동기 위치후보가 제어점으로서 적절한 지를 확인할 수 있을 것이다. p 개의 관심 모우드의 효율적 제어를 위한 구동기의 위치 선정기준을 제안한다면 다음과 같다.

$$J = \overline{DOC} + \omega \sum_{i=1}^p (DOC_i - \overline{DOC})^2 / (p-1) \quad (2.2.4)$$

여기서,

\overline{DOC} 는 관심 모우드들에 대한 DOC의 평균값
 ω 는 사용자 정의 가중치

위의 식에서 두번째 항을 고려함으로써 관심모우드 모두 효과적으로 제어하는 것이 가능하다.

2.3 특정 모우드에 대한 상태벡터의 영역

2.2절에서 제안된 모우드 가제어도를 계산하기 위해선 관심 모우드에 대한 상태벡터의 영역을 구해야 한다.

(2.1.15)식은 모우드 상태벡터와 상태벡터사이의 관계를 나타내는데

$$\{x(t)\} = [U]\{\xi(t)\} \quad (2.1.15)$$

상태벡터는 physical 영역의 변수이므로 실수값을 가져야 한다. 따라서 특정 모우드에 해당하는 상태벡터의 영역을 결정하기 위해선 관심 모우드와 공액복소관계에 있는 모우드의 영향을 동시에 고려해야 한다.

그 결과 i 번째 모우드에 해당하는 상태벡터는

$$\{x_i(t)\} = c\{u\}_i + \bar{c}\{u\}_i = 2\text{Re}\{c\{u\}_i\} \quad (2.3.1)$$

여기서,

$\{x_i(t)\}$ 는 i 번째 모우드에 해당하는 상태벡터

$\{u\}_i$ 는 i 번째 우측 고유벡터

c 는 임의의 복소수

만일

$$c = c_R + jc_I$$

$$\{u\}_i = \{u\}_{iR} + j\{u\}_{iI}$$

라면 (2.3.1)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{x_i(t)\} = 2\{c_R\{u\}_{iR} - c_I\{u\}_{iI}\} \quad (2.3.2)$$

c_R 과 c_I 는 임의의 실수이므로 상태벡터가 i 번째 모우드와 관련해서 도달할 수 있는 영역은 $\{u\}_{iR}$ 과 $\{u\}_{iI}$ 로 span되는 평면이 된다.

상태벡터가 위와 같은 영역을 가질 경우 이와 관련해서 계의 일반 좌표(generalized coordinate)벡터가 가지는 영역을 살펴볼도록 하자.

(2.1.6)식과 (2.1.12)식에 의하면 상태벡터와 우측 고유벡터의 구조는 다음과 같다.

$$\{x_i(t)\} = \begin{Bmatrix} \{q(t)\} \\ \{\hat{q}(t)\} \end{Bmatrix}, \quad \{u\}_i = \begin{Bmatrix} \{\psi\}_i \\ \{\sigma\}_i \end{Bmatrix}$$

참제치와 잠제벡터를 실수항과 허수항으로 분리한 뒤

$$\sigma_i = \sigma_{iR} + j\sigma_{iI}$$

$$\{\psi\}_i = \{\psi\}_{iR} + j\{\psi\}_{iI}$$

이를 (2.1.12)식에 대입하면

$$\{u\}_i = \left\{ \begin{matrix} \{\psi\}_{iR} \\ \sigma_{iR}\{\psi\}_{iR} - \sigma_{iV}\{\psi\}_{iV} \end{matrix} \right\} + j \left\{ \begin{matrix} \{\psi\}_{iV} \\ \sigma_{iR}\{\psi\}_{iV} + \sigma_{iV}\{\psi\}_{iR} \end{matrix} \right\}$$

즉 점성감쇠의 경우 일반 변위, 속도벡터는 모두 i 번째 모우드와 관련해서 잠재벡터의 실수벡터와 허수벡터로 span되는 평면상에 영역을 가지게 된다.

한편 비감쇠계의 경우를 고려해 보면 $\{\psi\}_V = \{0\}$, $\sigma_{iR} = 0$

이므로, 이를 (2.1.13)식에 대입하면

$$\{u\}_i = \left\{ \begin{matrix} \{\psi\}_{iR} \\ \{0\} \end{matrix} \right\} + j \left\{ \begin{matrix} \{0\} \\ \sigma_{iR}\{\psi\}_{iR} \end{matrix} \right\}$$

즉 비감쇠계의 경우 특정 모우드와 관련된 일반변위, 속도벡터는 잠재벡터로 대표되는 1차원 공간상에 존재하게 된다.

끝으로 비례감쇠계를 고려해 보면 $\{\psi\}_V = \{0\}$

이므로, (2.1.13)식은

$$\{u\}_i = \left\{ \begin{matrix} \{\psi\}_{iR} \\ \sigma_{iR}\{\psi\}_{iR} \end{matrix} \right\} + j \left\{ \begin{matrix} \{0\} \\ \sigma_{iV}\{\psi\}_{iR} \end{matrix} \right\}$$

가 되어 비감쇠계의 경우와 마찬가지로 모우드에 관련된 일반 변위, 속도벡터의 영역은 1차원 공간이 된다는 것을 알 수 있다.

3. 모의실험

2장에서 소개된 개념을 미소한 비례감쇠를 가지는 균일 외팔보에 적용시켜 보자.

제어의 목적은 외란으로 인한 진동의 감쇠이고 외란이 주로 4개의 저차 모우드를 가진하기 때문에 이 모우드에 대한 집중적인 제어가 요구된다고 가정해 보자.

균일 외팔보의 경우 closed form의 고유해가 존재하므로 (2.1.3)식에 고유함수를 대입하면, 일반좌표 $q_d(t)$ 는 모우드 좌표(modal coordinate)가 된다.

3개의 구동기에 대한 위치 후보가 그림 1과 같이 주어진다 하자.

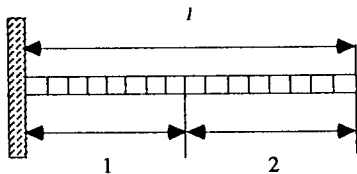


Fig. 1 Uniform cantilever beam

그림에서 보듯 구동기 후보의 개수는 모두 16개이다. 만일 2개의 구동기가 각각 1,2 구역중에서 선택된다고 하면 경우의 수는 모두 64이다. 이러한 표본에 대해 본문에서 제안된 목적

함수를 계산해 보았다.

가중치를 -2로 주었을 경우 최적해는

$$x_1 = \frac{4}{16}l, \quad x_2 = \frac{15}{16}l$$

이며 최소의 목적함수를 가지는 set은

$$x_1 = \frac{1}{16}l, \quad x_2 = \frac{13}{16}l$$

이다.

구동기를 최적의 위치와 최악의 위치에 둔 뒤 각 경우에 대해 동일한 가중치 행렬을 이용하여 다음의 Riccati eq.을 푼 뒤

$$-[Q] - [A]^T[K] - [K][A] + [K][B][R]^{-1}[B]^T[K] = [0]$$

여기서 구해지는 $[K]$ 를 이용해 레관이득 행렬 $[G]$ 를 구했다.

$$[G] = [R]^{-1}[B]^T[K]$$

레관이득 행렬을 구하는 방법으로는 여기서 이용된 LQR방법 이외에 pole placement에 의한 방법도 있으나, 시스템 행렬 $[A]$ 와 입력 행렬 $[B]$ 의 구조의 특징상 제어 낭비(control spillover)가 심해 원하는 극점으로의 이동이 불가능하다.

이렇게 설계된 폐루프계에 대해 관심 모우드에 해당하는 초기 변위가 주어졌을 때 응답을 살펴 보도록 하자.

그림 2는 최적의 위치에 구동기를 놓았을 경우 관심 모우드에 해당하는 모우드 좌표의 시간응답을 그린 것이고, 그림 3은 최악의 위치에 구동기를 위치시켰을 때의 시간응답을 그린 것이다.

두 그림의 비교를 통해 알 수 있는 것은 최적의 위치에 구동기를 위치시킨 경우가 관심 모우드의 효율적 제어라는 측면에서 볼 때 최악의 위치에 구동기를 놓은 것보다 우수하다는 것을 알 수 있다.

종합해 볼 때 관심 모우드의 효율적 제어라는 목적에 대해 제안된 모우드 가제어도는 타당한 정보를 제공하고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

효율적 모우드 제어를 위한 방법으로 가제어 그리미언의 지역 공간과 관심 모우드와 관련해 상태벡터가 가지는 공간사이의 최대 주요각과 관련된 새로운 모우드 가제어도를 제안하였다.

모우드와 관련해 상태벡터가 가지는 영역은 해당 모우드의 고유벡터의 실수항과 허수항이 span하는 평면이 된다.

모의 실험을 실행한 결과를 보였으며 이로부터 모우드 가제어도가 관심 모우드에 대한 선택적 제어라는 목적에 잘 부합하는 계수임을 확인할 수 있었다.

참고 문헌

- [1] P. C. Muller and H. I. Weber , "Analysis and Optimization of Certain Qualities of Controllability and Observability for Linear Dynamical System", *Automatica*, vol. 8, pp. 237-246, 1972
- [2] G. Schulz and G. Heimbold , " Dislocated Actuator/Sensor Positioning and Feedback Design for Flexible Structures ", *J. Guidance* , vol. 6 , pp. 361-367 , Sept.-Oct. 1983
- [3] R. E. Lindberg Jr. and R. W. Longman , " On the Number and Placement of Actuators for Independent Modal Space Control ", *J. Guidance* , vol. 7 , pp. 215-221 , March-April 1984
- [4] C. N. Viswanathan , R. W. Longman and P. W. Likins , " A Degree of Controllability Definition : Fundamental Concepts and Application to Modal Systems " , *J. Guidance* , vol. 7 , pp. 222-230 , March-April 1984
- [5] A. M. A. Hamdan and A. H. Nayfeh , " Measure of Modal Controllability and Observability for First- and Second- Order Linear Systems " , *J. Guidance* , vol. 12 , pp. 421-428 , May-June 1989
- [6] K. B. Lim , " Method for Optimal Actuator and Sensor Placement for Large Flexible Structures " , *J. Guidance* , vol. 15 , pp. 49-57 , Jan.-Feb. 1992
- [7] X. Guanqian and P. M. Bainum , " Actuator Placement Using Degree of Controllability for Discrete - Time System " , *Journal of Dynamical Systems, M. and C.*, vol. 114 , pp. 508-516 , Sept. 1992
- [8] A. Hac and L. Liu , " Sensor and Actuator Location in Motion Control of Flexible Structures " , in *Proceedings of the conf. on Motion and Vibration Control* , pp. 86-91 , 1992
- [9] R. W. Brockett , *Finite Dimensional Space*. New York : Wiley, 1970
- [10] L. Meirovitch , *Dynamics and Control of Structures*. New York : Wiley , 1990
- [11] G. H. Golub , C. F. Van Loan , *Matrix Computation*. Baltimore : Johns Hopkins Univ. Press , 1985

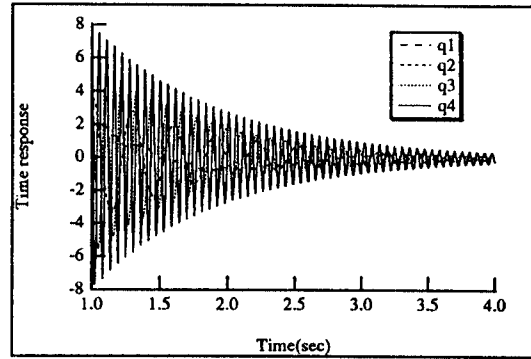


Fig. 2 (b) The generalized velocity of controlled mode when the actuators are set in the best points

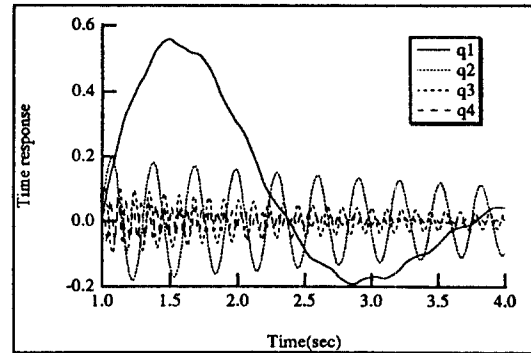


Fig. 3 (a) The generalized displacement of controlled mode when the actuators are set in the worst points

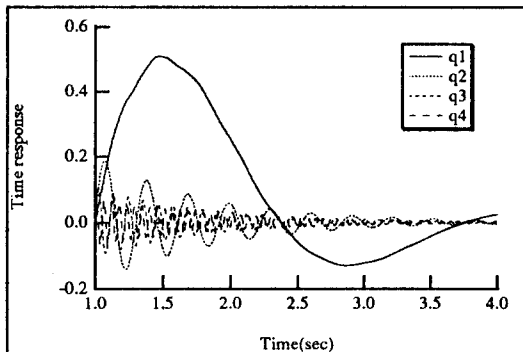


Fig. 2 (a) The generalized displacement of controlled mode when the actuators are set in the best points

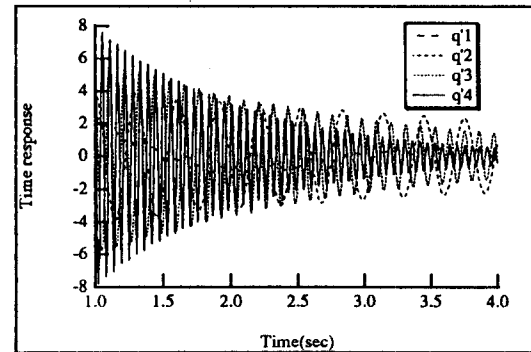


Fig. 3 (b) The generalized velocity of controlled mode when the actuators are set in the worst points