

Multirate 표본 데이터시스템에 대한 제어기 설계

이상정, 김영백^{*}
 충남대학교 공과대학 전자공학과

A Controller Design for Multirate Sampled-data Systems

Sang Jeong Lee, Young Baek Kim^{*}
 Dept. of Electronics Eng., Chungnam National Univ.

ABSTRACT

In this paper, we design a multirate controller for a given multirate sampled-data system which has a periodic output measurement scheme. A sufficient condition for maintaining observability in multirate sampled-data systems is given first. The design strategy for disturbance rejection is proposed. The proposed controller has IMC structure, and can be decomposed into a disturbance estimator and the inverse of fast plants.

1. 서론

일반적으로 디지털 제어 시스템을 설계할 때 이산 제어기의 제어신호가 플랜트에 가해지는 주기와 플랜트의 출력신호를 측정하여 이산 제어기로 변환하는 주기는 일정하다고 가정한다. 그러나 이런 가정은 현실적이지 못할 뿐 아니라 주기적인 모델로 표현되는 공정들도 많으므로 주기성을 갖는 multirate 제어 방식을 연구하는 것이 필요하다. 최근 들어 선형 시불변 시스템에 대한 영점 배치[3][4][5], 강인성 개선[3][6][7], 모델 matching과 비결합[8]등의 여러 제어문제에 종래의 선형 시불변 제어기보다 주기성을 갖는 multirate 제어기가 우수하다는 것이 입증되었다.

본 논문에서는 특이한 출력 측정 방식을 갖는 샘플 데이터 시스템의 multirate 제어기를 설계한다. 2장에서 제어기 설계시 고려할 문제를 기술하고, 3장에서는 주기성을 갖는 multirate 플랜트에 대한 안정한 periodic/multirate 제어기의 매개변수화 결과를 살펴보고 지금까지의 결과로는 최적 외란제거가 불가능한 경우가 있음을 보인다. 4장에서는 이 문제를 해결하기 위해 개루프 상태에서 안정한 플랜트에 대한 2단계 설계 과정을 제안한다. 다시 말해 설계문제는 어떤 일정한 샘플링 주기로 외란을 추정하는 외란 추정기와 uniform sampling 경우의 플랜트 역으로 해결될 수 있음을 보인다. 외란을 서로 다른 주파수를 갖는 유한한 개수의 정현파들의 합으로 가정하면 주기적인 샘플링 주기가 Shannon 샘플링 주기의 평균값을 만족할 때 외란은 어떤 일정한 샘플링 주기를 갖는 것으로 추정할 수 있다. 그러면 외란을 제거하기 위해서 일정한 샘플링 주기를 갖는 샘플 데이터 플랜트의 전달함수 행렬을 이용할 수 있으므로 외란을 추정하는 Kalman 필터를 설계하고 간단한 예제를 보인다

다. 그리고 5장에서 결론을 맺는다.

2. 설계문제

그림 2.1의 multirate 샘플 데이터 변환시스템을 고려해 보자. 여기서 G_p 는 안정한 시불변 시연속 플랜트, K 는 이산 제어기, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 는 제어입력, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 는 플랜트 출력, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ 는 외란, $r(t) \in \mathbb{R}^m$ 는 기준입력, H_T 는 주기가 Δ 인 zero-order hold 이다.

본 논문에서는 다음과 같은 방식으로 출력을 샘플링한다.

$$y(k) = \begin{cases} y_1(k\Delta) & \text{if } k=0, 2m-1, 2m, 4m-1, \dots \\ y_1(k\Delta) & \text{if } k=1, 2m-2, 2m+1, 4m-2, \dots \\ \vdots \\ y_m(k\Delta) & \text{if } k=m-1, m, 3m-1, 3m, \dots \end{cases}$$

이런 방식의 주기적인 측정은 산업 공정에서 자주 사용된다. 한 예로 hot-dip의 이연 도금 과정과 paper machine에서 사용되는 zig-zag 측정 방식은 위와 같은 주기적 측정방식이다[9][10]. 이제 $G_p(s)$ 를 zero-order hold를 갖는 상태 공간 모델로 등가 변환하면

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.1)$$

$$y(k) = Cx(k) + d(k) \quad (2.2)$$

이 된다.

측정된 출력 $z(k)$ 는

$$z(k) = P(k)y(k) \quad (2.3)$$

로 표시할 수 있는데 여기서 $P(k)$ 는

$$P(k) = \text{diag}\{P_i(k)\} \text{ for } i = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

$$P_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k=i-1, 2m-i, 2m+i-1, 4m-i, 4m+i-1, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.5)$$

이때 주기적인 측정을 하는 샘플 데이터 시스템의 상태 공간 모델식은

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.6)$$

$$z(k) = Cx(k) + P(k)d(k) \quad (2.7)$$

로 표현되고 여기서

$$C(k) = P(k)C,$$

$$C(k+N) = C(k), P(k+N) = P(k), N=2m$$

이다. $C(k)$ 와 $P(k)$ 는 주기적인 측정 방식때문에 주기성과 모든 k 에서 한 행의에는 모든 행이 영이 되는 특징을 갖는다. 이제 본 논문에서 다룰 제어기 설계문제를 정리해 보면

“인정된 시연속 플랜트 G_p 가 있으면, 페루프 시스템을 internally 안정되게 하고 외란의 영향을 최소화할 수 있는 이산제어기 K 를 설계하는 것”

으로 정리할 수 있다.

3. 제어기 매개변수화 결과

이절에서는 주기성을 갖는 시스템을 안정화하는 제어기의 매개변수화 결과를 살펴보고 최적 외란 제어를 위해 IMC 구조를 사용하는 것에 대한 문제점을 설명한다.

많은 사람들이 신형 주기 시스템의 안정화 문제에 관심을 기울여 왔고[3][4][13], 특히 M.A.Dahleh는 주기성을 갖는 제어기가 주기적 특성을 갖고 있는 시스템을 안정화하는 이유를 규명하였다[13]. 주기시스템의 최적 제어에 대해서는 S.Bittanti등이 infinite horizon LQ problem의 최적 제어 법칙은 주기 Riccati식의 해를 구함으로 주기적인 제어법칙을 구할 수 있음을 보였다[14]. 또한 S.Bittanti등은 주기 시스템에 대한 LQG 문제의 해도 주기적임을 보였고 L.Xie와 C.E. de Souza는 주기 시스템의 infinite horizon H_∞ 상태 추정 문제는 주기성을 갖는 sign indefinite Riccati식의 해를 통해 주기성을 갖는 상태 추정기로 구할 수 있음을 보였다. 잘 알려진대로 LQG 또는 H_2 문제에서는 잡음을 백색 잡음으로 가정하고, H_∞ 문제에서는 모든 잡음원을 유한한 에너지를 갖는 것으로 가정하여 최악의 조건일 때의 성능지수를 최소화할 수 있는 제어기를 설계한다. 다시 말하면 최적 제어기는 성능지수나 잡음의 특성에 상관없이 주기성을 갖는다. 이런 의미에서 주기적 제어기는 주기 시스템을 안정화하는 데 바람직하다 할 수 있다. 최근들이 multirate 샘플 데이터 시스템[11][12]과 주기 시스템[13]에 대한 안정화 제어기의 매개변수화 결과가 보고되었다. 이런 결과들은 Youla parametrization을 lifting technique을 이용하여 multirate나 주기 시스템의 경우로 확장한 것이다[3][4]. 참고논문 [13]에서는 주기적인 플랜트에 대한 최적 성능은 주기적인 제어기에 의해서 얻어짐을 보여주고 있다. 매개변수화 결과는 다음과 같이 정리 할 수 있다.

정리 3.1 [11][12][13]: $\bar{G}(z)$ 를 주어진 multirate/periodic 플랜트의 lifting technique을 이용한 shift-invariant equivalent라 하고 $N(z)M^{-1}(z) = \bar{M}^{-1}(z)\bar{N}(z)$ 를 다음 식을 만족하는 $\bar{G}(z)$ 의 right, left coprime factorization이라 한다.

$$\begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{S} \\ -\bar{N} & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -S \\ N & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

여기서 $\bar{S}(\omega) = S(\omega) = 0$, $R(\omega) = \bar{R}(\omega) = M(\omega) = \bar{M}(\omega) = I$, $N(\omega) = \bar{N}(\omega) = \bar{G}(\omega)$ 이다. 이때 모든 multirate/periodic 안정화 제어기는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\bar{C}_s = (\bar{R} + \bar{Q}\bar{N})^{-1}(S - \bar{Q}\bar{M}) = (S - M\bar{Q})(R + N\bar{Q})^{-1} \quad (3.2)$$

여기서 $Q(z)$ 는 $Q(\omega)$ 가 (P_i, M_j) causality condition[11]을 만족하는 임의의 안정한 전달함수 행렬이다.

만약 주기적인 프란트가 안정화하면 안정화 주기 제어기는 그림 3.1같이 IMC 구조를 갖는다. 여기서 모델이 정확하다면 즉, $G = G_M$ 이면 $Q = G_M^{-1}$ 이 되고 언제나 최적의 외란 제어를 행할 수 있다. 그러나 플랜트 모델 전달함수의 역은

비최소위상 영점이나 무한대의 궤환 이득등과 같은 여러가지 이유로 IMC 제어기 Q 로 직접 사용하는 것이 불가능할 경우가 많다. 본 논문에서 다루는 문제는 lifted system의 전달함수 행렬의 역을 취하는 것이 불가능한 경우이다.

정리 3.2 : 식 (2.6) - (2.7)으로 표현되는, N 주기의 측정 방식을 취하는 시스템에 대한 lifted system의 전달함수 행렬은 singular하다.

증명 : lifted system의 전달함수 행렬 \bar{G} 는 다음과 같다.

$$\bar{G} = \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} \quad (3.3)$$

여기서

$$\bar{A} = A^N \quad (3.4)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & AB & B \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C(0) \\ C(1)A \\ \vdots \\ C(N-1)A^{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C(1)B & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C(2)AB & C(2)B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C(3)A^2B & C(3)AB & C(3)B & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(N-1)A^{N-2}B & C(N-1)A^{N-3}B & C(N-1)A^{N-4}B & \dots & C(N-1)B & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad C(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad C(m-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix}$$

$$C(m) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C_{m+1} \end{bmatrix} \quad C(m+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C_{m+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad C(N-1) = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

이고 식 (3.8)에서 C_i 는 C 행렬의 i 번째 열이다. $\Phi = (zI - \bar{A})^{-1}$ 라하면 전달함수 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} C(0)\Phi A^{N-1}B & C(0)\Phi A^{N-2}B & \dots & C(0)\Phi B \\ C(1)(A\Phi A^{N-1+1})B & C(1)A\Phi A^{N-2}B & \dots & C(1)A\Phi B \\ C(2)(A\Phi A^{N-1+1})B & C(2)(A^2\Phi A^{N-2+1})B & \dots & C(2)A^2\Phi B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(N-1)A^{N-2}(A\Phi A^{N-1+1})B & C(N-1)A^{N-3}(A^2\Phi A^{N-2+1})B & \dots & C(N-1)A^{N-1}\Phi B \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

\bar{G} 의 i 번째 블록은 $C(i)H_{ij}$ 형태를 갖는다. 이때 H_{ij} 는 A와 B 행렬로 구성되는 $n \times m$ 행렬이다. $C(i)$ 는 식 (3.8)의 형태를 취하므로 \bar{G} 는 $N(m-1)$ 개의 0 행을 갖는다. 그러므로 \bar{G} 는 singular이다. ■

4. IMC 구조를 갖는 제어기

이절에서는 단일 입출력을 갖는 개루프 안정 플랜트에 대해서 lifted system의 전달함수 행렬이 singular인 문제점을 해결하기 위한 설계과정을 제안한다. 먼저 간단한 예를 살펴본다.

예 4.1 : 두번에 한번씩 측정 샘플이 빠지게 되는 스칼라 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= a x(k) + \beta u(k) \\ y(k) &= x(k) + d(k) \quad \text{for } k \text{ even} \end{aligned}$$

lifted system은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{x}(k+1) = a^2 \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} a\beta & \beta \end{bmatrix} \bar{u}(k)$$

$$\bar{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{d}(k)$$

여기서

$$\bar{x}(k) = x(2k), \quad \bar{u}(k) = [u(2k) \ u(2k+1)]^T,$$

$$\bar{y}(k) = [y(2k) \ y(2k+1)]$$

$$\bar{d}(k) = [d(2k) \ d(2k+1)]^T$$

이다.

전달함수 행렬은 명백히 singular이다. 만약 외란을 적절히 예측할 수 있다면 lifted system의 전달함수 대신 uniform sampling의 전달함수를 사용할 수 있다. 외란이 매우 천천히 변한다면 실제적인 예측방식은 zero-order hold를 사용하는 것이다. 그림 4.1은 이것을 나타낸다. 그림에서 \bar{G} 는

lifted system의 전달함수이고 \bar{G}_M 은 lifted system의 모델이고 G_p 는 uniform 샘플로 구한 전달함수이다. 여기서 $G_p = \beta / (z - a)$ 이다. λ 는 $[1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots]$ 와 같은 형태로 행하는 샘플링을 나타낸다. 이 예에서 IMC 제어기 Q를 외란을 예측하는 부분과 플랜트의 역을 나타내는 부분으로 분리하는 것이 유용한 설계 방안임을 알 수 있으며 제어 성능은 외란을 예측하는 능력에 좌우된다. zero-order hold가 실제적이기는 하지만 일반적으로 더 좋은 제어 성능을 얻기 위해서는 보다 정확한 예측이 필요하다. 따라서 2절에서 구성하였던 설계문제를 다시 정리하면

“안정한 단일 입출력 시연속 시스템의 이산 제어기를 주기적 샘플링으로 설계할 경우 외란을 예측하는 바람직한 방안을 구하는 것”

이라 할 수 있다.

uniform 샘플링 경우 대역폭이 ω_b 인 신호를 Nyquist 샘플링 주기보다 빠르게 샘플하면 본래의 신호는 샘플 데이터로부터 noncausal 필터를 이용하여 복원할 수 있다. 그러나 신호가 유한개의 사인파로 구성되어 있다면 causal, finite dimensional, robust 필터로 즉, Kalman 필터로 복원할 수 있다.

다음의 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = C x(t) + v(t) \quad (4.2)$$

여기서

$$A_c = \text{diag}[A_{c1} \ A_{c2} \ \dots \ A_{cn}] \quad (4.3)$$

$$A_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{for } i=1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

$$C = [c_1 \ 0 \ c_2 \ 0 \ \dots \ c_n \ 0] \quad (4.5)$$

$$x^T(0) = [0 \ \omega_1 \ 0 \ \omega_2 \ 0 \ \dots \ \omega_n \ 0] \quad (4.6)$$

이고 $v(t)$ 는 스펙트럼 밀도가 r 인 white Gaussian noise이며 $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ 라고 가정한다. 위의 시스템을 uniformly 샘플하면 다음과 같은 시스템이 된다.

$$x(k+1) = A_d x(k) \quad (4.7)$$

$$y(k) = C x(k) + v(k) \quad (4.8)$$

여기서

$$A_d = \text{diag}[A_{d1} \ A_{d2} \ \dots \ A_{dn} \ 1] \quad (4.9)$$

$$A_{di} = \begin{bmatrix} \cos \omega_i \Delta & 1/\omega_i \sin \omega_i \Delta \\ -\omega_i \sin \omega_i \Delta & \cos \omega_i \Delta \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

이고 $v(k)$ 의 공분산(covariance)은 r/Δ 이다. Δ 는 샘플링 주기이다. 일반적으로 샘플링 이후에 시스템은 가관측성을 상실할 수 있다. 그러나 위의 시스템에서 Nyquist 주기는 가관측성을 유지하는 데 충분조건이 된다.

정리 4.1 : 샘플링 주기 Δ 가 $\omega_n \Delta < \pi$ 인 조건을 만족하면 식 (4.7) - (4.8)로 표현되는 시스템은 가관측성을 갖는다.

증명 : 부록 참조

정리 4.1은 uniform 샘플링 경우에 외란이 정현파이면 외란을 추정하는 Kalman filter를 설계할 수 있다는 것을 말한다. 주기적인 샘플링 경우에도 유사한 결과를 얻을 수 있다. 식 (4.1) - (4.2)로 표현되는 샘플 시스템이 multirate 출력 측정 방식을 취했을 경우를 고려해 보자.

$$x(k+1) = A_d x(k) \quad (4.11)$$

$$y(k) = P(k) C x(k) + P(k) v(k) \quad (4.12)$$

여기서 $P(k)$ 는 N 을 주기로 갖고 즉, $P(k+N) = P(k)$ 이고 1 또는 0 의 값을 갖는다. 이 주기 시스템을 shift-invariant 형태로 변환하면

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) \quad (4.13)$$

$$\bar{y}(k) = \bar{C} \bar{x}(k) + \bar{v}(k) \quad (4.14)$$

으로 표현된다.

여기서

$$\bar{x}(k) = x(kN) \quad (4.15)$$

$$\bar{y}^T(k) = [y(kN) \ y(kN+1) \ \dots \ y(kN+N-1)]^T \quad (4.16)$$

$$\bar{v}^T(k) = [P(0)v(kN) \ P(1)v(kN+1) \ \dots \ P(N-1)v(kN+N-1)]^T \quad (4.17)$$

$$\bar{A} = A_d^N = \text{diag}[A_{d1}^N \ A_{d2}^N \ \dots \ A_{dn}^N] \quad (4.18)$$

$$A_{di}^N = \begin{bmatrix} \cos N\omega_i \Delta & 1/\omega_i \sin N\omega_i \Delta \\ -\omega_i \sin N\omega_i \Delta & \cos N\omega_i \Delta \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} P(0) C \\ P(1) C A_d \\ \vdots \\ P(N-1) C A_d^{N-1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

주파수의 증첩을 피하기 위해서는 샘플주기가 평균 Nyquist 주기를 만족해야 한다[17]. 즉,

$$\omega_n \Delta < (M/N)\pi \quad (4.21)$$

여기서 M은 주기 Nd 내에서 행한 샘플의 수이다. 또한 위의 조건은 주기적인 샘플 이후에 가관측성을 유지하기 위한 충분조건이 된다.

정리 4.2 : $N\omega_n \Delta < M\pi$ 조건을 만족하면 식 (4.13)-(4.14)로 표현되는 lifted system은 가관측성을 갖는다.

증명 : 부록 참조

이제 정현파 형태의 외란이 가해진다면 주기적으로 샘플링된 신호로부터 외란을 재구성할 수 있다. 식 (4.13) - (4.14)로 표현된 외란 모델은 가관측성을 갖고 있지만 non-stabilizable하고 모든 근이 z 평면상의 단위원 위에 존재하므로 uncontrollable 하다. 이 경우에 대한 Kalman 필터는 다음과 같이 구성할 수 있다.

정리 4.3[16] : 시스템의 출력 행렬과 시스템 행렬을 각각 C, A라 할 때

- 1) (C, A)가 관측가능하고
- 2) $(\Sigma_0 - \Sigma_s) > 0$, $\Sigma_0 = \Sigma_s$

이면

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma(k) = \Sigma_s$$

이다.

여기서 $\Sigma(k)$ 는 Σ_0 를 초기 조건으로 갖는 Riccati difference equation의 해이고 Σ_s 는 ARE의 unique strong solution 이다.

증명 : 참고문헌 [16] 참조

정리 4.3으로 부터 식 (4.13) - (4.20)의 lifted 시스템에 대한 Kalman 필터는 다음과 같이 구성할 수 있다.

Σ_s 는 식 (4.25)의 해로 주어지고

$$\Sigma = A\Sigma A^T - A\Sigma C^T(C\Sigma C^T + R)^{-1}C\Sigma A^T \quad (4.25)$$

Kalman 필터의 동역학 식은 다음과 같이 표현된다.

$$x(k+1) = Ax(k) + K(k)[y(k) - Cx(k)] \quad (4.26)$$

$$K(k) = A\Sigma(k)C^T(C\Sigma(k)C^T + R)^{-1} \quad (4.27)$$

$$\Sigma(k+1) = A\Sigma(k)A^T - A\Sigma(k)C^T(C\Sigma(k)C^T + R)^{-1}C\Sigma(k)A^T$$

$$\Sigma(0) = \Sigma_0 \quad (4.28)$$

여기서 K(k)는 Kalman 필터 이득 행렬이다.

이제 간단한 예제를 통해 본 결과를 검증해본다.

예제 4.1

외란이 같은 크기의 서로 다른 주파수를 갖는 두개의 정현파의 합으로 주어지고 출력 측정 방식은 $P(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 인 즉, 출력이 측정주기(N=5) 동안에 3번만(M=3) 샘플되는 경우를 고려해보자. 이때 외란을 구성하는 정현파의 각주파수는 $\omega_1 = 1 \text{ rad/sec}$, $\omega_2 = 2 \text{ rad/sec}$ 라 가정한다.

외란의 시연속 모델식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) \quad (4.29)$$

$$y(t) = C x(t) + v(t) \quad (4.30)$$

여기서

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$C = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (4.32)$$

$$x^T(0) = [0 \ 1 \ 0 \ 2] \quad (4.33)$$

이다. 정리 4.2의 조건을 만족하도록 샘플 주기를 $t_s=0.5$ 초로 하여 이산 모델식으로 변환하면 다음과 같이 된다.

$$x(k+1) = A_d x(k) \quad (4.34)$$

$$y(k) = C x(k) + v(k) \quad (4.35)$$

여기서

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.87758 & 0.47943 & 0 & 0 \\ -0.47943 & 0.87758 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.54030 & 0.42074 \\ 0 & 0 & -1.68294 & 0.54030 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

이다. 이제 이것을 lifted 모델로 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) \quad (4.37)$$

$$\bar{y}(k) = \bar{C} \bar{x}(k) + \bar{v}(k) \quad (4.38)$$

여기서

$$\bar{x}(k) = x(5k) \quad (4.39)$$

$$\bar{y}^T(k) = [y(5k) \ y(5k+1) \ y(5k+2) \ y(5k+3) \ y(5k+4)]^T \quad (4.40)$$

$$\bar{v}^T(k) = [P(0)v(5k) \ P(1)v(5k+1) \ P(2)v(5k+2) \ \dots \ P(3)v(5k+3) \ P(4)v(5k+4)]^T \quad (4.41)$$

$$\bar{A} = A_d^5 = \begin{bmatrix} -0.8011 & 0.5985 & 0 & 0 \\ -0.5985 & 0.8011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2837 & -0.4295 \\ 0 & 0 & 1.9178 & 0.2837 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} P(0)C \\ P(1)C A_d \\ P(2)C A_d^2 \\ P(3)C A_d^3 \\ P(4)C A_d^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0.8776 & 0.4794 & 0.5403 & 0.4207 \\ 0.5403 & 0.8415 & -0.4161 & 0.4546 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

이다.

식 (4.37) - (4.42)로 표현된 lifted 시스템은 가관측성을 갖으므로 정리 4.3과 식 (4.25) - (4.28)을 이용하여 Kalman 필터를 설계할 수 있다. 설계한 Kalman 필터를 통해 추정할 수 있는 상태는 식 (4.39)에서 알 수 있듯이 측정주기에 해당하는 것이므로 나머지 상태는 식 (4.34) - (4.36)으로부터 보간(interpolation)해 내야 한다. 이렇게 추정해 낸 외란과 시연속 모델로 표현된 외란의 파형을 비교하면 그림 4.2와 같다. 이때 Kalman 필터의 루프 전달함수 행렬의 이득을 주파수 영역에서 그려 보면 그림 4.3과 같이 Kalman 필터가 대역 통과 필터의 특성을 나타냄을 알 수 있다. 그림 4.4는 샘플 주기 $t_s = 2.0$ 초 인 경우이다. 그림 4.2와 그림 4.4를 비교해 보면 샘플 주기가 정리 4.2의 조건을 만족하면 설계한 Kalman 필터는 외란을 잘 추정해 낼 수 있다.

이와같이 multirate/periodic 샘플 시스템에서 정리 4.2의 조건을 만족하면 정현파의 합으로 주어지는 외란을 추정할 수 있는 Kalman 필터를 설계할 수 있으므로 IMC 구조에

서 IMC 제이거 Q를 외란 추정기 - Kalman 필터 - 와 uniform 샘플 모델의 역으로 주어지는 IMC 제이거로 분리해서 설계하여 외란 제거 문제를 해결할 수 있다. 이때의 IMC 구조는 그림 4.5와 같다. 이때 \bar{G}_i 은 플랜트의 lifted 모델이고, G_d^{-1} 은 플랜트를 uniform 샘플로 이산화한 모델의 역이다. 외란 추정기는 Kalman 필터와 보간기로 구성된다.

5. 결론

지금까지 주기적인 출력 측정방식을 갖는 multirate 샘플 데이터 시스템의 가관측성 유지를 위한 충분조건을 제시하고 외란이 정현파의 합으로 주어질 때 외란을 추정할 수 있는 방안으로 Kalman 필터를 제시하였다. 또한 외란을 Kalman 필터로 추정할 수 있으면 multirate 시스템의 lifted 모델 대신에 플랜트를 일정한(uniform) 샘플주기로 이산화한 모델의 역을 IMC 제이거로 사용할 수 있으므로 외란 제거 문제를 해결할 수 있음을 보였다.

참고문헌

[1] K. Onogi and M. Matsubara, "Structure analysis of periodically controlled chemical process", Chem. Eng. Sci., vol. 34, pp.1009-1019, 1980.

[2] K. Schadlich, U. Hoffmann and H. Hoffmann, "Periodical operation of chemical process and evaluation of conversion improvements", Chem. Eng. Sci., vol. 38, pp. 1375-1384, 1983.

[3] B.A. Francis and T.T. Georgiou, "Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-33, pp. 820-832, 1988.

[4] P.P. Khargonekar, K. Poolla and A. Tannenbaum, "Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, pp. 1088-1096, 1985.

[5] C. Zhang, "A dual rate digital compensator for zero assignment", Systems and Control Letters, vol. 19, pp. 225-232, 1992.

[6] P. Albertos, "Block multirate input-output model for sampled-data control systems", IEEE Trans. Automatic Contr., vol. AC-33, pp. 1085-1088, 1990.

[7] T. Mita, Y. Childa, Y. Kaku and H. Namasato, "Two delay robust digital control and its applications -avoiding the problem on unstable zeros", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-33, pp. 962-970, 1990.

[8] D.G. Meyer, "A new class of shift-varying operators, their shift-invariant equivalents and multirate digital systems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-35, pp. 429-433, 1990.

[9] W.J. Edwards et al., "Coating mass control design for a continuous galvanizing line", Automatica, vol. 12, pp. 225-235, 1976.

[10] C. Lindenberg, "A process model of moisture variations", Pulp and Paper Canada, vl. 87, no. 4, T142-147, 1986.

[11] D.G. Meyer, "A parametrization of stabilization controllers for multirate sampled-data systems",

IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-35, no. 2, pp. 233 - 236, Feb. 1990.

[12] R. Ravi, P.P. Khargonekar, K.D. Minto and C.N. Nett, "Controller parametrization for time-varying multirate plants", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-35, no. 11, pp. 1259-1262, Nov. 1990.

[13] M.A. Dahleh, P.G. Voulgaris and L.S. Valavani, "Optimal and robust controllers for periodic and multirate systems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-37, no. 1, pp. 90-99, Jan. 1992.

[14] S. Bittani, P. Colani and G. De Nicolao, "Periodic regulators with incomplete and noisy measurements" in Proc. 29th Conf. Decision Contr., Honolulu, USA, 1990.

[15] L. Xie and C.E. Souza, "H_∞ state estimation for linear periodic systems", in Proc. 29th Conf. Decision Contr., Honolulu, USA, 1990, pp. 1388-1393.

[16] S.W. Chan, G.C. Goodwin and K.S. Sin, "Convergence properties of the Riccati difference equation in optimal filtering of nonstabilisation systems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 29, no. 2 pp. 110-118 1984.

[17] Abdul J. Jerri, "The Shannon sampling theorem - its various extensions and applications: a tutorial review", Proc. IEEE, vol. 65, no. 11, pp. 1565-1596, Nov. 1977.

부록

정리 4.1의 증명

식 (4.1)-(4.2)로 표현되는 시연속 시스템이 가관측성을 갖는다는 것은 쉽게 알 수 있다. 샘플 데이터 시스템이 가관측성을 갖으려면 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i I - A_d \\ C \end{bmatrix} = 2n \quad \text{for all } \lambda_i, i=1, 2, \dots, 2n \quad (A.1)$$

여기서 λ_i 는 A_d 의 고유값으로 다음과 같다.

$$\lambda_i = \cos \omega_i \Delta \pm j \sin \omega_i \Delta \quad \text{for } i=1, 2, \dots, n \quad (A.2)$$

$\begin{bmatrix} \lambda_i I - A_d \\ C \end{bmatrix}$ 의 열은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$b_{2j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos \omega_j \Delta - \cos \omega_j \Delta + j \sin \omega_j \Delta \\ \omega_j \sin \omega_j \Delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C_j \end{bmatrix} \begin{matrix} (2j-1)\text{th} \\ 2j\text{th} \\ \\ \\ (2n+1)\text{th} \end{matrix} \quad (A.3)$$

$$b_{2j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -(1/\omega_j) \sin \omega_j \Delta \\ \cos \omega_j \Delta - \cos \omega_j \Delta + j \sin \omega_j \Delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (2j-1)\text{th} \\ 2j\text{th} \\ \\ \\ (2n+1)\text{th} \end{matrix} \quad (A.4)$$

for $j=1, 2, \dots, n$

다음의 식을 고려해보자.

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i = 0 \quad (\text{A.5})$$

여기서 a_i 은 복소수이다. 위 식으로 부터 다음의 식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \cos\omega_i\Delta - \cos\omega_j\Delta \pm j\sin\omega_i\Delta & -(1/\omega_j)\sin\omega_j\Delta \\ \omega_j \sin\omega_j\Delta & \cos\omega_i\Delta - \cos\omega_j\Delta \pm j\sin\omega_i\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2j-1} \\ a_{2j} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.6})$$

for $j=1,2, \dots, n$ and $j \neq i$

$$\begin{bmatrix} \pm j\sin\omega_i\Delta & -(1/\omega_i)\sin\omega_i\Delta \\ \omega_i \sin\omega_i\Delta & \pm j \sin\omega_i\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2i-1} \\ a_{2i} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{i=1}^n c_i a_{2i-1} = 0 \quad (\text{A.8})$$

식 (A.7)은 다음과 같이 줄일 수 있다.

$$(\omega_i \sin\omega_i\Delta \quad \pm j \sin\omega_i\Delta) \begin{bmatrix} a_{2i-1} \\ a_{2i} \end{bmatrix}_P = 0 \quad (\text{A.9})$$

식 (A.6)-(A.9)의 계수는 0 이 아니고 식 (A.6)의 좌변 행렬은 $\omega_n\Delta < \pi$ 로 가정기 때문에 nonsingular 이다. 그러므로 식 (A.6)에서 a_i 은 $i = 2i-1, 2i$ 를 제외한 모든 i 에서 0 이다. 따라서 식 (A.8)은

$$c_i a_{2i-1} = 0 \quad (\text{A.10})$$

이 되고 식 (A.9)와 (A.10)로 부터 $a_{2i-1} = a_{2i} = 0$ 을 얻을 수 있다. ■

정리 4.2증명 :

식 (4.13)-(4.14)로 표현되는 lifted system이 가관측성을 갖기 위해서는

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i I - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = 2n \text{ for all } \lambda_i, i=1,2, \dots, 2n \quad (\text{A.11})$$

여기서 λ_i 는 \bar{A} 의 고유값으로 다음과 같다.

$$\lambda_i = \cos N\omega_i\Delta \pm j \sin N\omega_i\Delta \text{ for } i=1,2, \dots, n \quad (\text{A.12})$$

$\begin{bmatrix} \lambda_i I - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$ 의 열은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$b_{2j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \cos\omega_i\Delta - \cos\omega_j\Delta \pm j \sin\omega_i\Delta & (2j-1)\text{th} \\ \omega_j \sin\omega_j\Delta & 2j \text{ th} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ P(0)C_j & (2n+1)\text{th} \\ P(1)C_j \cos\omega_i\Delta & (2n+2)\text{th} \\ \cdot \\ P(N-1)C_j \cos\omega_i\Delta & (2n+N)\text{th} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$b_{2j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ -(1/\omega_j)\sin\omega_j\Delta & (2j-1)\text{th} \\ \cos\omega_i\Delta - \cos\omega_j\Delta \pm j \sin\omega_i\Delta & 2j \text{ th} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ P(1)C_j(1/\omega_j)\sin\omega_j\Delta & (2n+1)\text{th} \\ \cdot \\ P(N-1)C_j(1/\omega_j)\sin(N-1)\omega_j\Delta & (2n+2)\text{th} \\ \cdot \\ \cdot & (2n+N)\text{th} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

for $j=1,2, \dots, n$

이제부터 $\lambda_i = \cos N\omega_i\Delta + j \sin N\omega_i\Delta$ 만 고려한다.

다음의 식을 고려해보자.

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i = 0 \quad (\text{A.15})$$

여기서 a_i 는 복소수이다. 위 식으로 부터 다음의 식을 구할 수 있다.

$$(\omega_i \sin N\omega_i\Delta \quad \sin N\omega_i\Delta) \begin{bmatrix} a_{2i-1} \\ a_{2i} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{bmatrix} \cos N\omega_i\Delta - \cos N\omega_j\Delta + j\sin N\omega_i\Delta & -(1/\omega_j)\sin N\omega_j\Delta \\ \omega_j \sin N\omega_j\Delta & \cos N\omega_i\Delta - \cos N\omega_j\Delta + j\sin N\omega_i\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2j-1} \\ a_{2j} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.17})$$

for $j=1,2, \dots, n$ and $j \neq i$

$$P(\ell) \sum_{i=1}^n (C_j \cos N\omega_j\Delta \quad C_j(1/\omega_j)\sin N\omega_j\Delta) \begin{bmatrix} a_{2i-1} \\ a_{2i} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.18})$$

for $\ell=0,1,2, \dots, N-1$

$N\omega_i\Delta < \pi$ 일 때 모든 a_i 의 값이 0 이 됨은 쉽게 알 수 있다. 따라서 lifted system은 가관측성을 갖는다. 그러므로 $M \geq 2$ 로 둘 수 있다.

먼저, $\sin N\omega_j\Delta \neq 0$ 이라 가정하자. 그러면 식 (A.17)에서 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$a_{2j-1} = a_{2j} = 0 \text{ if } \cos N\omega_i\Delta \neq \cos N\omega_j\Delta \quad (\text{A.19})$$

$$a_{2j} = j\omega_j a_{2j-1} \text{ if } \cos N\omega_i\Delta = \cos N\omega_j\Delta \quad (\text{A.20})$$

$\sin x \neq 0$ 이고 $\cos x = \cos y$ 이면 $\sin y = \pm \sin x$ 인 관계식 (A.20)은 $N\omega_j\Delta < M\pi$ 이므로 $j \neq i$ 인 모든 j 에 대해서 최대 $M-1$ 번만 성립한다. 또한 식 (A.16)에서 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$a_{2i} = j\omega_i a_{2i-1} \quad (\text{A.21})$$

여기서 $i = 1$ 이라 하고 식 (A.20)이 $j = 2,3, \dots, m$ 에 대해서 성립한다고 가정한다.

이때 m 의 최대값은 M 이다. 그러면 식 (A.19)로 부터 다음의 관계식을 얻는다.

$$a_j = 0 \text{ for } j=2m+1, 2m+2, \dots, 2n \quad (\text{A.22})$$

이제 식 (A.18)은 다음과 같이 된다.

$$P(\ell) \sum_{k=1}^m C_k e^{-j\ell\omega_k\Delta} a_{2k-1} = 0 \quad (\text{A.23})$$

for $\ell = 0,1,2, \dots, N-1$

$\ell = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_M$ 에서 $P(\ell) = 1$ 이라 가정하면 식 (A.23)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} e^{-j\ell_1\omega_1\Delta} & -j\ell_1\omega_2\Delta & \dots & -j\ell_1\omega_m\Delta \\ e^{-j\ell_2\omega_1\Delta} & -j\ell_2\omega_2\Delta & \dots & -j\ell_2\omega_m\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\ell_M\omega_1\Delta} & -j\ell_M\omega_2\Delta & \dots & -j\ell_M\omega_m\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\alpha_1 \\ C_2\alpha_2 \\ \vdots \\ C_m\alpha_{2m-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.24})$$

식 (A.24)의 좌변 행렬이 nonsingular이므로 모든 α_i 는 0의 값을 갖는다. ■

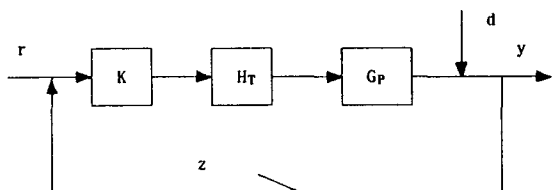


그림 2.1 주기적인 측정을 하는 샘플 데이터 시스템

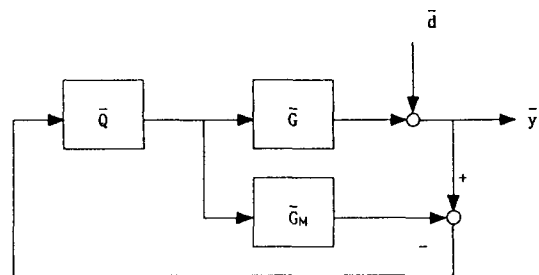


그림 3.1 lifted system의 IMC 구조

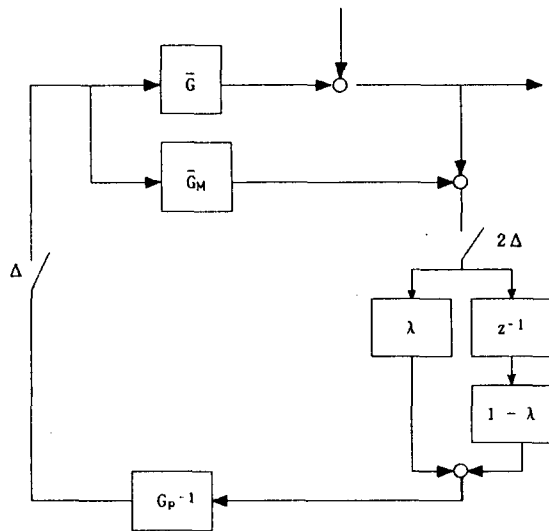


그림 4.1 실제적인 IMC 구조

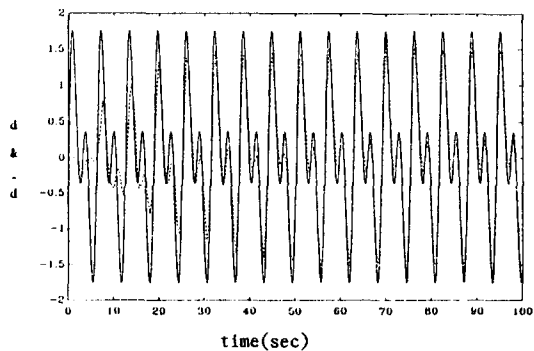


그림 4.2 $t_s=0.5$ 초 일때 추정 외란과 실제 외란의 비교

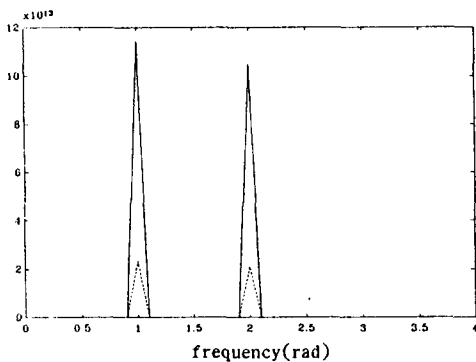


그림 4.3 $t_s=0.5$ 초 일때 Kalman 필터의 루프 이득 특성

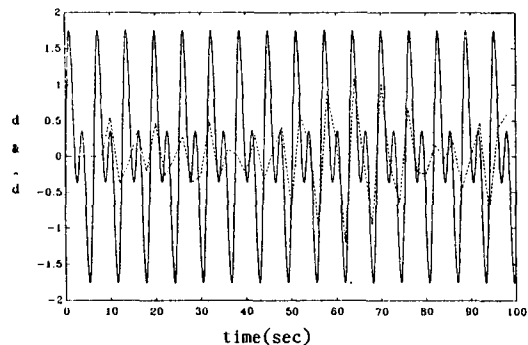


그림 4.4 $t_s=2.0$ 초 일때 추정 외란과 실제 외란의 비교

