

# 造波機에 의하여 發生된 先端波의 展開

박인규\* 최항순\*\*

## 1. 서론

2차원 수조에서 조파기를 정현파형으로 가동시키면 조파기에서 멀리 떨어진 점에서는 초기의 천이과정을 거쳐 상당한 시간이 경과한 다음 파고와 주기가 일정한 정현파가 전파되어 나간다. 초기의 천이과정에는 비교적 파장이 긴 파성분이 전파하며 감쇄하는데, 이 파성분은 정상파형과 다른 특성을 보인다. 이를 상세히 고찰하기 위하여 선단파(leading waves)의 전개방정식(evolution equation)을 구하여 수치계산을 수행한 다음 실험치와 비교하였다.

이러한 중력파의 천이거동에 대하여 Wu(1957)는 심해파에 대한 연구를 하였으며, Miles(1962)는 선형해를 해석적으로 구하였다. Hasimoto & Ono(1972)는 균일수심에서 중력파의 느린변조 (slow modulation)가 비선형 Schrödinger 방정식으로 표현됨을 보였으며, Longuet-Higgins(1974)는 실험에 의해 선단파의 균속도가 Miles의 해석해와 일치함을 보였다. Yue & Mei(1980)와 Chee & Choi(1991)는 무한수심에 놓인 쇄기에 의한 산란문제를 비선형 Schrödinger 방정식으로 기술하여 파전개를 해석하였다. 본 연구에서는 임의의 수심에서 비선형성이 선단파의 전개에 미치는 영향을 중점적으로 고찰하였다.

## 2. 전개방정식

포텐셜 유동을 가정한 다음 평면진행파의 전개방정식은 다척도 전개 기법(multiple-scale expansion techniques)을 이용하여 유도할 수 있다. 서서히 변조하며 전파하는 파의 특성을 고려하여 전파방향의 길이와 시간을 다음과 같이 정의한다.

$$(x_1, t_1) = \varepsilon(x, t), \quad (x_2, t_2) = \varepsilon^2(x, t), \quad \dots \quad (1)$$

여기서  $\varepsilon$ 는 파의 기울기(= $ka$ )이며 작은 양이라 가정한다.

---

\* 현대 선박해양 연구소

\*\* 서울대학교 공과대학

속도포텐셜과 자유수면을  $\varepsilon$  에 대하여 점근 전개하고 이를 다시 위상 ( $\theta = kx - \omega t$ )에 대한 조화항으로 전개한다.

$$(\bar{\phi}, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=-n}^n e^{im\theta} (\phi_{nm}, \zeta_{nm}). \quad (2)$$

이들을 지배방정식인 Laplace 방정식과 자유표면 경계조건에 대입하여 정리하면 각  $\varepsilon$ 의 차수와  $\theta$ 의 조화항에 대한 초기 및 경계치 문제를 얻게 된다. 해의 전개방정식은 긴 유도과정을 거쳐 3차항의 경계치 문제에서 Schrödinger 방정식으로 귀착됨을 보일 수 있다(Mei, 1983).

$$-i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (3)$$

여기서  $\tau = t_2$ ,  $\zeta = x_1 - C_g t_1$  그리고  $C_g$ 는 군속도이며  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha = -\frac{1}{2} \omega^*(k) = \frac{C_g^2}{2\omega} - \frac{\omega kh \cosh^2 kh}{k^2 \sinh 2kh} + \frac{kh \sinh kh}{k \cosh kh} C_g \quad (4)$$

$$\beta = \frac{\omega k^2}{16 \sinh^4 kh} (\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh) - \frac{\omega}{2 \sinh^2 2kh} \frac{(2\omega \cosh^2 kh + k C_g)^2}{(gh - C_g^2)} \quad (5)$$

윗식에서 비선형항을 무시하면 선형 Schrödinger 방정식이 되며, 이 방정식의 해는 Fresnel 적분을 이용하여 표시할 수 있다(Miles).

$$\left| \frac{A}{a} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + C(m) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} + S(m) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (6)$$

여기서  $C(m)$ 과  $S(m)$ 은 각각 Fresnel cosine 과 sine 적분이다.

### 3. 수치 계산

수치계산의 편의를 위해 변수들을 다음과 같이 무차원화시킨다.

$$\bar{A} = \frac{A}{a}, \quad \bar{\xi} = k\xi, \quad \bar{\tau} = \omega\tau \quad (7)$$

무차원화된 방정식은 다음과 같다.

$$\text{지배방정식: } -i \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{\tau}} + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \bar{\xi}^2} + \bar{\beta} |\bar{A}|^2 \bar{A} = 0, \quad \bar{\alpha} = \frac{k^2}{\omega} \alpha, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\omega k^2} \quad (8)$$

$$\text{초기 조건: } \bar{A}(\bar{\xi}) = 0.5 \{ 1 + \tanh(-\bar{\xi}/\lambda) \}, \quad \lambda \approx 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{경계 조건: } \bar{A} &\rightarrow 0 & \text{as } \bar{\xi} &\rightarrow \infty \\ \bar{A} &\rightarrow \exp(-i\bar{\tau}/2) & \text{as } \bar{\xi} &\rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (10)$$

Crank-Nicolson 알고리즘을 사용하여 수치계산을 수행하였다. 계통적인 수치실험을 통해  $\epsilon$ 의 크기에 따라 격자간격  $\Delta\bar{\xi} = 0.02 - 0.1$  과 시간간격  $\Delta\bar{\tau} = 0.001 - 0.005$  에서 수치계산 과정없이 안정된 수치해를 얻었다.

$\bar{a}$  와  $\bar{b}$  의 수심에 따른 변화가 Fig. 1 에 표시되고 있다. 분산항의 계수  $\bar{a}$ 는 항상 양의 값을 가지며  $\bar{b}=0$  이 되는  $kh = 1.36$  근처에서 최대치가 되며,  $kh$ 가 커짐에 따라 점근치 1/8에 접근한다. 한편 비선형항의 계수  $\bar{b}$ 는  $kh < 1.36$  에서는 음의 값을 가지나,  $kh > 1.36$ 에서는 양의 값을 가지며 점근치 1/2에 접근한다. 특히  $kh = 1.36$ 에서는  $\bar{b}$ 가 0이 되어 선형 문제가 된다.

#### 4. 결과 및 고찰

실험은  $kh=1.0, 1.363, 2.0$  및  $3.0$  에 대하여 수행하였다. 매  $kh$ 에 대하여 2개의 서로 다른 반송파 기울기를 선택하였다. 하나는 작은 기울기를 다른 하나는 조파기가 쇄파현상없이 만들 수 있는 최대 기울기를 택하였다.

실험결과의 일부를 Fig. 2 에 도시하였는데, 종축은 무차원화된 파진폭이고 횡축은 무차원화된 시간으로 파고계의 위치에서 환산한 값이다. 실선 및 점선은 각각 비선형 및 선형 계산값을 나타내고, 작은 원은 실험치를 표시한다. Fig. 2 는,  $kh=2.0$  이고  $ka=0.146$ 일때의 결과가 그려져 있다. 반송파의 기울기가 작을때는 비선형결과와 선형결과는 크게 다르지 않다. 그러나 가파른 파에서는 비선형의 경우 진폭은 더 커지고 위상은 앞서가는데 이 현상은 실험으로 잘 확인해 주고 있다.

수치 및 실험결과로부터 3차 Schrödinger 방정식은  $kh$ 의 넓은 범위에 걸쳐 조파기에 의해 발생된 선단파의 전개를 묘사하는 적절한 수학 모델임을 알 수 있다.

## 5. 참고 문헌

- Chee, W. S. and Choi, H. S., 1991, Nonlinear diffraction of incident waves with side-band disturbances by a thin wedge, J of Korean Soc. of Coastal and Ocean Engineers, Vol.3, No.1
- Hashimoto, H. and Ono, H. 1972, Nonlinear modulation of gravity waves, J. of Physical Society of Japan Vol.33, No3: pp805-811
- Longuet-Higgins M. S. 1974, Breaking waves - in deep or shallow waters, Proc. 10th Symp. on Naval Hydrdynamics, pp.579-605.
- Mei C. C. 1983, The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, John Wiley & Sons, Chap. 2 and Chap. 12.
- Miles, J. W. 1962, Transient gravity wave response to an oscillating pressure, J. of Fluid Mechanics, 13:145-150
- Wu, T. Y. 1957, Water waves generated by the translatory and oscillatory surface disturbance, Caltech, Eng. Div. Report 85-3.
- Yue, D. K. P. and Mei, C. C. 1980, Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge, J. Fluid Mechanics, Vol.99, pp.32-52

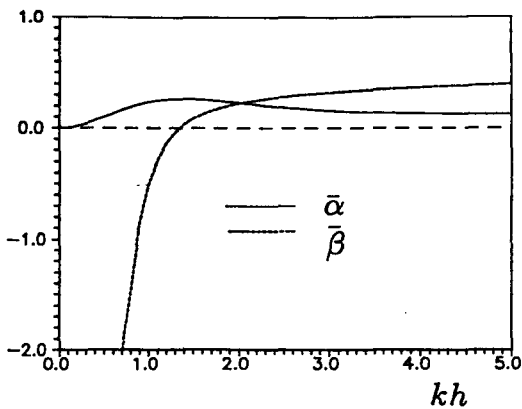


Fig. 1 Variation of  $\bar{\alpha}$  and  $\bar{\beta}$

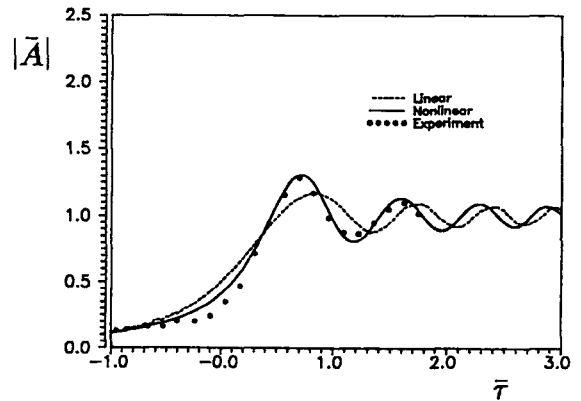


Fig. 2 Evolution of Leading Waves for  $kh=2.0$  and  $ka=0.146$