

Beta-Rayleigh分布에 대한 小考

A Review on the Beta-Rayleigh Distribution

朴恩珍* 韓相大* 片宗根*

1. 서론

Hughes와 Borgman(1987)이 淺海波高의 特性을 잘 나타낼 수 있는 統計的 表現으로 Beta-Rayleigh分布를 제안하였다. 本稿에서는 既存의 波浪理論을 利用하여 淺海波의 特性을 再照明하여 Beta-Rayleigh分布의 출발점을 確認하고 Beta-Rayleigh分布가 갖는 上限條件인 H_b 가 無限大가 되면 Rayleigh分布로 되어버리는 數學的인 過程을 밝힌 후 現場觀測值를 통한 檢證을 해보고자 한다.

2. Beta-Rayleigh分布

淺海波高分布의 特性을 보다 잘 나타내기 위해서는 다음과 같은 특징을 갖는 確率密度函數(pdf)가 바람직하다.

- 波高의 上限值를 갖는 pdf이어야 한다.
- 海洋條件이 Gauss條件에서 멀어짐에 따라 Rayleigh分布의 경우보다 더 高波高 쪽으로 치우치는 pdf이어야 한다.
- 最大波高가 無限大에 가까워짐에 따라, 즉 深海條件이 되면 Rayleigh分布에 접근하는 pdf이어야 한다.
- 數學的으로 다루기 용이하고 너무 복잡하지 않은 pdf이어야 한다.
- 決定論的 또는 推計學的 견지에서 物理的으로 정당성을 갖는 pdf이어야 한다.

Hughes와 Borgman(1987)은 이러한 다섯가지 조건을 만족하는 淺海波高에 대한 pdf로 다음과 같은 式을 제안하였고 beta分布의 變형이기 때문에 Beta-Rayleigh分布라 불렀다.

$$P_{BR}(H) = \frac{2\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{H^{2\alpha-1}}{H_b^{2\alpha}} \left[1 - \frac{H^2}{H_b^2} \right]^{\beta-1} \quad 0 < H < H_b \quad (1)$$

*明知大學校 土木工學科(Department of Civil Engineering, Myoung Ji Univ., Seoul 120-728 Korea)

式(1)에서 H_b 는 最大波高(또는 碎波高)를 나타내며 α 와 β 는 自乘平均제곱根(root-mean-square ; rms)波高와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\overline{H^2} = H_{rms}^2 = \int_0^{H_b} H^2 p_{BR}(H) dH = \frac{\alpha H_b^2}{\alpha + \beta} \quad (2)$$

또는

$$\beta = \alpha \left[\frac{H_b^2}{H_{rms}^2} - 1 \right] \quad (3)$$

α 와 β 의 관계식은 式(1)로 주어진 pdf의 다른 次數모멘트로부터도 주어진다. 1차와 3차 모멘트는 gamma函數 때문에 복잡하나 4차모멘트로부터 다음과 같은 간단한 형태의 관계식이 주어진다.

$$\overline{H^4} = H_{rmq}^2 = \int_0^H H^4 p_{BR}(H) dH = \frac{\alpha(\alpha+1)H_b^4}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \quad (4)$$

$$= \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i^4 \right]^{1/2} \quad (5)$$

여기서 H_{rmq} 는 4乘平均제곱根(root-mean-quad ; rmq)波高이다.

式(2)와 (4)로부터 α 와 β 는 다음과 같이 H_{rms} 및 H_{rmq} 와 연결된다.

$$\alpha = \frac{K_1(K_2 - K_1)}{K_1^2 - K_2} \quad (6)$$

$$\beta = \frac{(1 - K_1)(K_2 - K_1)}{K_1^2 - K_2} \quad (7)$$

여기서 $K_1 = \frac{H_{rms}^2}{H_b^2}$, $K_2 = \frac{H_{rmq}^2}{H_b^4}$ 이다.

따라서, 式(1)의 pdf는 H_b , H_{rmq} 및 H_{rms} 의 세 변수들을 사용하여 나타낼 수 있다. 이들 세 변수들과 海象條件과의 相互關聯性이 적절히 주어지면, 3-媒介變數分布인 式(1)은 Rayleigh pdf보다 더 실제에 가까운 淺海波高를 제공할 것이다.

위의 H_{rms} 와 H_{rmq} 를 Hughes와 Borgman은 다시 淺海에서 海象條件을 나타내는데 널리 사용되는 媒介變數인 에너지스펙트럼의 有義波高 $H_{m0}(=4\sigma)$, 여기서 σ^2 은 海水面의 分散), 스펙트럼의 尖頭週期 T_p 및 水深 d 를 사용하여 現場資料(Hughes and Ebersole, 1987)로부터 다음 式과 같이 回歸시켰다.

$$\frac{H_{rms}}{H_{m0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[a \left[\frac{d}{gT_p^2} \right]^{-b} \right] \quad (a=0.00089 \quad b=0.834, \quad r=0.848) \quad (8)$$

$$\frac{H_{rmq}}{H_{m0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[a \left[\frac{d}{gT_p^2} \right]^{-b} \right] \quad (a=0.000098 \quad b=1.208, \quad r=0.786) \quad (9)$$

여기서 r 은 相關係數이다.

이 식들의 特徵은 深海가 되면 Rayleigh分布로부터 유도할 수 있다시피

$$\frac{H_{rms}}{H_{mo}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad (10)$$

$$\frac{H_{rmq}^2}{H_{mo}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad (11)$$

로 되고, $d/gT^2 \leq 0.01$ 이면 Rayleigh分布에 의한 값보다 큰 값을 갖게된다. 이는 波가 淺海로 이동함에 따라 波의 非線形性이 增加하기 때문인 것으로 보인다. 波峰이 뾰족하게 솟고 波谷이 편평하게 퍼짐에 따라 개개의 波高는 增加하나 그에 따른 海水面分散(즉 H_{mo})의 增加는 일어나지 않는다. 그리고 碎波高

$$H_b = d \quad (12)$$

로 하였다.

3. 淺海波의 特性

淺海波의 非線形性和 海水面의 分散과의 關係를 보다 더 確實하게 이해하기 위하여 $H=1m$, $T=10sec$, $d=2m$ 인 경우의 1次 Cnoidal wave의 波形과 線形波의 波形을 Fig.1에 나타내고, 한 波長當의 海水面의 分散을 計算하여 보았다. 물론 波浪理論이 不同으로 因하여 波長 자체의 誤差는 勿리나 無次元化하여 그린 것이다.

예상대로 같은 波高의 경우 1次 Cnoidal wave의 分散이 線形波의 分散보다 적으므로 위의 言及內容을 間接적으로 立證한다 하겠다.

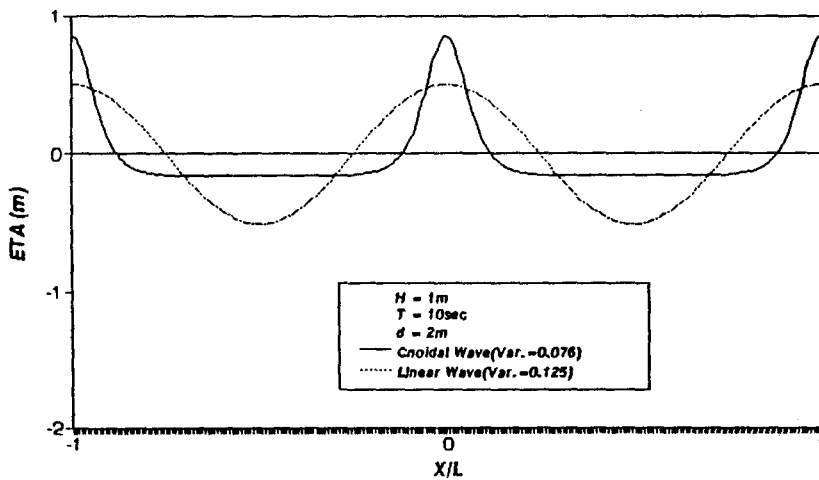


Fig.1 Comparison of Cnoidal wave and linear wave

4. Rayleigh分布의 數學的 過程

上限值 H_b 가 無限大가 되면

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{K_1 (K_2 - K_1)}{K_1^2 - K_2} \\ &= \frac{H_{rms}^2 (H_{rms}^2 - H_{rms}^2/H_b^2)}{H_{rms}^2 - H_{rms}^4} \end{aligned} \quad (13)$$

이어서

$$\lim_{H_b \rightarrow \infty} \alpha = \alpha_0 = \frac{H_{rms}^4}{H_{rms}^2 - H_{rms}^4} \quad (14)$$

이 되고

$$\beta = \alpha_0 \left[\frac{H_b^2}{H_{rms}^2} - 1 \right] \quad (15)$$

를 Beta-Rayleigh分布式 중 $\left[1 - \frac{H^2}{H_b^2} \right]^{\beta-1}$ 에 대입하면

$$\left[1 - \frac{H^2}{H_b^2} \right]^{\frac{\alpha_0}{H_{rms}^2} \frac{H_b^2}{H_b^2}} \cdot \left[1 - \frac{H^2}{H_b^2} \right]^{-\alpha_0-1} \quad (16)$$

를 거쳐

$$\begin{aligned} \lim_{H_b \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{H^2}{\frac{\alpha_0}{H_{rms}^2} \cdot \frac{\alpha_0}{H_{rms}^2} \frac{H_b^2}{H_b^2}} \right]^{\frac{\alpha_0}{H_{rms}^2} \frac{H_b^2}{H_b^2}} \\ = \exp \left[- \frac{H^2}{b_0} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

이고, 여기서

$$b_0 = \frac{H_{rms}^2}{\alpha_0} = \frac{H_{rms}^2 - H_{rms}^4}{H_{rms}^2} \quad (18)$$

이다. 마지막으로 $\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta) H_b^{2\alpha}}$ 를 고찰하여 보면

$$\begin{aligned} H_b^2 &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha} H_{rms}^2 \\ &= \beta \left[\frac{H_{rms}^2}{\beta} + \frac{H_{rms}^2}{\alpha} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{Hb \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\beta^\alpha \left[\frac{H_{rms}^2}{\beta} + \frac{H_{rms}^2}{\alpha} \right]^\alpha} \\ &= \frac{1}{b_0 \alpha_0} \end{aligned} \quad (20)$$

이 된다. 그러므로 一般化된 Rayleigh分布는

$$P_{GR}(H) = \frac{2H^{2\alpha_0-1}}{b_0 \alpha_0 \Gamma(\alpha_0)} \exp \left[-\frac{H^2}{b_0} \right] \quad (21)$$

이고, 여기서

$$\alpha_0 = \frac{H_{rms}^4}{H_{rmq}^2 - H_{rms}^4} \quad (22)$$

$$b_0 = \frac{H_{rmq}^2 - H_{rms}^4}{H_{rms}^2} \quad (23)$$

이다.

Rayleigh분포의 경우 $H_{rmq} = \sqrt{2} H_{rms}$ 이므로 式(21)은 式(24)와 같은 Rayleigh분포 형태로 되돌아 간다.

$$p(H) = \frac{2H}{H_{rms}^2} \exp \left[-\left(\frac{H}{H_{rms}} \right)^2 \right] \quad (24)$$

5. 검토

Beta-Rayleigh分布가 Rayleigh分布에 비해 어떻게 淺海波의 波高分布特性을 더 잘 나타내는가를 Fig.2에 예시하였다. 사진막대 실험으로부터 얻은 碎波前 波高分布圖와 더불어 H_{m0} 를 사용한 Rayleigh分布(점선)와 Beta-Rayleigh分布(실선)가 함께 나타나 있다. 그림에서 보다시피 Beta-Rayleigh分布가 高波高 부분에 치우쳐 실측치와 잘 맞고 있다.

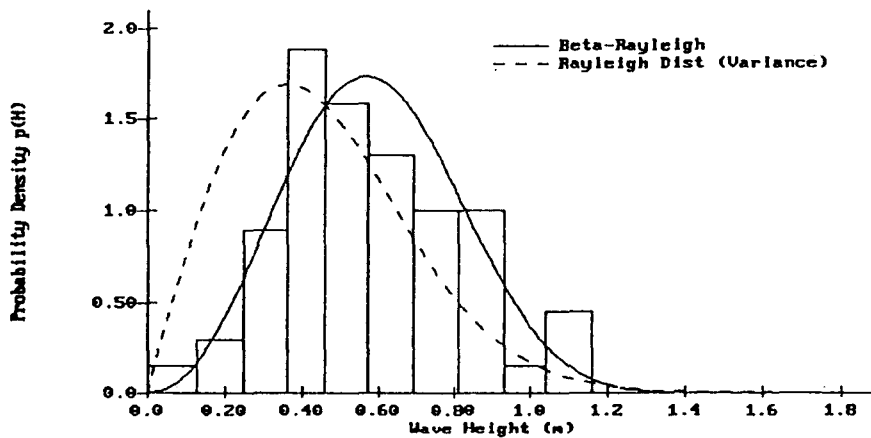


Fig.2 Beta-Rayleigh Predictions ($H_{m0}=0.72m$; $T_p=10.9sec$; $d=1.63m$)

참고문헌

- Ebersole, B. A., and Hughes, S. A., 1987., "DUCK85 Photopole Experiment," Miscellaneous Paper CERC-87-18, US Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS.
- Hughes, S. A., and Borgman, L. E., 1987., "Beta-Rayleigh Distribution for Shallow Water Wave Heights," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers Specialty Conference on Coastal Hydrodynamics*, American Society of Civil Engineers, pp. 17-31.
- Leenknecht, D. A., Szuwalski, A., and Sherlock, A. R., 1991., *Automated Coastal Engineering System (ACES) Technical Reference*, Coastal Engineering Research Center, U. S. Corps of Engineers Waterways Experiment Station.