

橢圓型 緩傾斜 模型에서의 高次元 無反射 境界條件에 관한 研究

白 雲 一* , M. B. Abbott**, M. W. Dingemans***

要 約

平面波 數值模型 解析時 假想境界에 평행한 入射角을 갖거나, 多方向의 入射波가 假想境界로 同時에 入射되는 경우에는 無處理時 數值 反射가 發生되므로 解에 惡影響을 미친다. 따라서 이러한 경우에 대해 假想境界에서 波浪 Energy 를 透明하게 通過시키는 高次元 無反射 境界條件에 대해 연구하였다. 이들 조건식의 數學的 安定性을 分析하기 위해 hyperbolic system 에서 normal-mode 분석을 수행하였다. 1次 및 2次의 高次元 無反射 境界條件을 Galerkin 加重殘差法을 이용 有限要素 模型에 적용하였으며 이들에 대한 特性을 試驗하기 위해 數值實驗을 實施하였다.

1. 序 論

새로운 港灣의 建設이나 기존 항만의 확장 또는 개수에 있어 港內 靜穩에 가장 큰 영향을 미치는 波浪의 複雜한 運動을 해석하는 것은 매우 중요하며 이러한 요구에 따라 파의 傳達模型이 발달하게 되었는데, Berkhoff(1972, 1976)가 처음 유도한 緩傾斜 방정식에 근거를 둔 傳波模型이 그중 하나이다.

이들 모형은 여러사람들에 의해 갖가지 자연적인 현상의 묘사 (예를들면 碎波 (De Girolamo et al, 1988), 바다면의 摩擦(Kostense et al 1986) 및 일정한 潮流上 波의 전파 (Kostense et al. 1988)) 가 가능하게 되었으며 경계조건도 또한 放射條件, 造波條件, 水深境界條件, 副分反射 및 전달의 복합적 경계조건의 처리도 가능하게 되었는데, 港灣 設計時 만족할 만한 결과를 보여줌이 여러사람에 의해 입증되었다.

그러나 數值模型의 經濟性 提高 및 計算의 精度를 높이기 위해 自然的으로 存在하지 않는 假想境界의 도입이 요구된다. 더우기 방파제 또는 자연적인 방해물에 의해 여러 방향에서 동시에 入射되는 波들의 數值反射를 없애기 위해 高次元 無反射 境界條件을 橢圓型 緩傾斜 模型에 도입하였으며, Galerkin 加重殘差法을 이용하여 有限要素式을 전개하고 數值實驗을 실시하였다.

* 大林産業 Eng. 事業部 水工팀장

** Professor in IHE, Delft

*** Resp. Researcher in Delft Hydraulics

2. 緩傾斜 方程式 模型

Current refraction과 wave energy dissipation을 적용한 타원형 환경사 방정식은 아래와 같다. [7]

$$\nabla \cdot CC_g \nabla \varphi + 2i\omega U \nabla \varphi + (k^2 CC_g + \omega^2 - \omega_r^2 + i\omega \nabla \cdot U) \varphi = -i\omega_r W \varphi \quad (2.1)$$

$$\omega_r^2 = gk \tanh kh, \quad \omega_r = \omega - k \cdot U$$

$$U = \text{current velocity}$$

$$k = \text{wave number}$$

$$\omega_r = \text{relative frequency}$$

$$W = W_b + W_f \text{ (쇄파, 바다마찰 포함)}$$

$$W_b = \frac{\alpha}{\pi} \omega_r Q_b \frac{H_m^2}{H_{rms}^2}$$

$$W_f = \frac{4}{3\pi} \frac{1}{h} f_w \frac{U_0}{\cosh^2(kh)}$$

(2.1)식에 Galerkin 방법을 적용하기 위해 시험수인 ϕ 를 곱하고 Ω 인 영역에 대해 취합한 후 부분적분을 행하면 아래 식이 된다.

$$\int_{\Omega} [CC_g (\nabla \varphi \cdot \nabla \phi) - 2i\omega U \cdot \nabla \varphi \phi - (k^2 CC_g + \omega^2 - \omega_r^2 + i\omega \nabla \cdot U + i\omega_r W) \varphi \phi] d\Omega - \int_{\partial\Omega} CC_g \phi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds \quad (2.2)$$

경계조건들은 위 식에서 마지막 항에 도입되며 무반사 경계 조건도 φ , $\partial \varphi / \partial n$ 과 상수로 표시되어야 한다. 무반사 경계조건에 대해서는 다음 절에서 논의하기로 하며 (2.2)식에 면적분 및 선적분에 대해 Galerkin 방법을 적용하고, matrix식으로 유도하면,

$$[\underline{S} - \underline{P}^{-1}] \varphi^m + \underline{V} \varphi^m = \underline{R} + \underline{W} \quad (2.3)$$

여기서, \underline{S} , \underline{P} 전 영역에 대해 정의된 matrices

\underline{V} , \underline{R} and \underline{W} 경계에 대해 정의된 matrices 이다.

3. 無反射 境界條件

가상경계란 자연적으로 존재하지 않으나 계산영역을 국한시키기 위해 인위적으로 도입하게 되며, 적절한 경계조건이 도입되어야 well-posed 상태를 갖게되며 이를 위해 초기치-경계치 문제에 필수적인 3가지 기준을 Hadamard가 제시한 바 있다.

현재까지 가상경계에서 수치반사를 없애기 위한 연구를 요약하면 다음과 같다.

- ① Far field solutions (Sommerfeld's radiation condition)
- ② Artificial Damping (sponge layers)
- ③ Radiation condition (causality conditions)

본 연구에서는 ③의 갈래인 무반사 경계조건으로서 Higdon (1986)이 제안, 유한 차분법에 적용한 Second-order condition 을 이용하였으며 기본식은 다음과 같다.

$$\left(\cos \alpha_1 \frac{\partial t}{\partial t} - C \frac{\partial x}{\partial x} \right) \left(\cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} - C \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0 \quad (3.1)$$

α_1, α_2 : absorption angle

(3.1)식을 전개하고, (2.1)식을 대입하여 정리하면,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + ik (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \frac{\partial \phi}{\partial x} + k^2 (1 + \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2) \phi = 0 \quad (3.2)$$

윗 식을 local coordinate 로 변형시키고 Galerkin 방법을 적용하면 (2.2)식의 마지막항인 무반사 경계조건식은 아래와 같다.

$$I_b^3 = -CC_g \left[BAA1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} \phi \right]_0^L + CC_g \int_0^L BAA1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial s} ds - CC_g \int_0^L BAA2 \cdot \phi \phi ds \quad (3.3)$$

여기서, $BAA1 = \frac{ik (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)}{(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)}$, $BAA2 = \frac{i}{k (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)}$

4. 모형의 검증

그림과 같이 반원형의 등수심인 긴 해안선에 무반사 경계조건을 도입하고 아래와 같은 조건의 파가 전파되어 오는 것으로 모형의 검증을 실시하였다. [1]

$$H_s = 1.0m$$

$$T = 7.0s$$

$$h = 10.0m$$

$$\omega = 2\pi/T = 0.8976, \quad \omega^2 = gk \tanh kh, \quad k \approx 0.1051$$

$$C = \omega/k, \quad L = C \cdot T = 59.78 M \approx 60 M$$

따라서 model의 boundary는 반경 5.0 L 인 300 M 로 결정하였다.

반사 특성에 대한 계산을 위해 15 points/L 로 하였으며 전체의 절점수는 10,348 points 이며 150개의 line segments가 해안선인 바닥면을 따라 무반사 경계조건이 사용되었다.

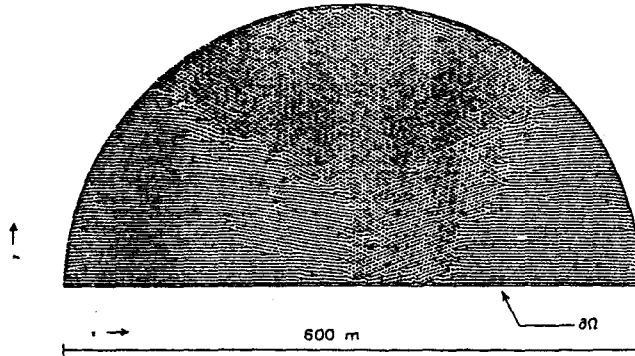


그림 1. model boundary 및 유한요소의 분할

입사파의 특성은 first order condition 및 second-order condition 각각에 대해 15°, 45°, 75°의 각도로 입사하는 경우에 대해 수치실험을 실시하였으며 그 결과는 아래 표와 같다.

OUTPUT RESULTS ALONG THE CENTERLINE OF THE FIRST-ORDER CONDITION WITH ALPHA = 15 DEGREE AND THETA = 75 DEGREE (15 element/wavelength)

X (m)	Y (m)	H (cm)	X (m)	Y (m)	H (cm)
0.0000	0.0000	40.5738	0.0000	152.0000	115.4252
0.0000	4.0000	44.0922	0.0000	156.0000	115.1846
0.0000	8.0000	50.8571	0.0000	160.0000	112.7003
0.0000	12.0000	60.8552	0.0000	164.0000	109.2432
0.0000	16.0000	71.7857	0.0000	168.0000	105.0814
0.0000	20.0000	83.2272	0.0000	172.0000	100.2372
0.0000	24.0000	94.3103	0.0000	176.0000	96.2064
0.0000	28.0000	104.5427	0.0000	180.0000	92.4226
0.0000	32.0000	113.7613	0.0000	184.0000	89.6980
0.0000	36.0000	121.7559	0.0000	188.0000	88.2867
0.0000	40.0000	128.2476	0.0000	192.0000	88.6412
0.0000	44.0000	132.6632	0.0000	196.0000	90.2662
0.0000	48.0000	137.4703	0.0000	200.0000	93.2276
0.0000	52.0000	139.2915	0.0000	204.0000	96.7381
0.0000	56.0000	139.4837	0.0000	208.0000	100.2519
0.0000	60.0000	138.2164	0.0000	212.0000	104.0264
0.0000	64.0000	135.3808	0.0000	216.0000	106.3646
0.0000	68.0000	131.2717	0.0000	220.0000	108.7244
0.0000	72.0000	126.7822	0.0000	224.0000	109.5374
0.0000	76.0000	120.5207	0.0000	228.0000	109.1581
0.0000	80.0000	113.4135	0.0000	232.0000	107.6747
0.0000	84.0000	105.7737	0.0000	236.0000	105.2539
0.0000	88.0000	97.3722	0.0000	240.0000	102.1934
0.0000	92.0000	90.4643	0.0000	244.0000	98.8770
0.0000	96.0000	83.2132	0.0000	248.0000	95.7414
0.0000	100.0000	78.6376	0.0000	252.0000	93.2326
0.0000	104.0000	73.2566	0.0000	256.0000	91.8066
0.0000	108.0000	68.8749	0.0000	260.0000	91.6211
0.0000	112.0000	64.4056	0.0000	264.0000	92.7344
0.0000	116.0000	60.2719	0.0000	268.0000	94.8922
0.0000	120.0000	55.2539	0.0000	272.0000	97.7411
0.0000	124.0000	51.4394	0.0000	276.0000	100.8911
0.0000	128.0000	47.2909	0.0000	280.0000	103.6334
0.0000	132.0000	43.2042	0.0000	284.0000	105.8662
0.0000	136.0000	40.2368	0.0000	288.0000	107.2422
0.0000	140.0000	38.2469	0.0000	292.0000	107.6317
0.0000	144.0000	36.2873	0.0000	296.0000	107.3119
0.0000	148.0000	34.2327	0.0000	300.0000	104.6369

OUTPUT RESULTS ALONG THE CENTERLINE OF THE SECOND-ORDER CONDITION WITH ALPHA = 15 DEGREE , ALPHA2 = 45 DEGREE AND THETA = 75 DEGREE (40 element/wavelength)

X (m)	Y (m)	H (cm)	X (m)	Y (m)	H (cm)
0.0000	0.0000	99.7207	0.0000	152.0000	98.2543
0.0000	4.0000	100.4322	0.0000	156.0000	99.8278
0.0000	8.0000	100.0513	0.0000	160.0000	99.2220
0.0000	12.0000	99.1882	0.0000	164.0000	99.2085
0.0000	16.0000	97.0031	0.0000	168.0000	99.2614
0.0000	20.0000	99.3822	0.0000	172.0000	100.7477
0.0000	24.0000	99.6813	0.0000	176.0000	99.3774
0.0000	28.0000	99.4820	0.0000	180.0000	100.4122
0.0000	32.0000	99.3064	0.0000	184.0000	100.8207
0.0000	36.0000	99.2711	0.0000	188.0000	100.9894
0.0000	40.0000	99.6683	0.0000	192.0000	100.5489
0.0000	44.0000	99.3229	0.0000	196.0000	100.1922
0.0000	48.0000	99.1033	0.0000	200.0000	99.3379
0.0000	52.0000	98.8758	0.0000	204.0000	99.4114
0.0000	56.0000	99.2456	0.0000	208.0000	100.6249
0.0000	60.0000	99.3042	0.0000	212.0000	99.6132
0.0000	64.0000	99.4824	0.0000	216.0000	99.2327
0.0000	68.0000	98.7245	0.0000	220.0000	99.1876
0.0000	72.0000	101.0924	0.0000	224.0000	99.2515
0.0000	76.0000	100.4349	0.0000	228.0000	99.3373
0.0000	80.0000	100.1263	0.0000	232.0000	99.4523
0.0000	84.0000	100.2525	0.0000	236.0000	99.6325
0.0000	88.0000	100.2506	0.0000	240.0000	99.7340
0.0000	92.0000	100.3232	0.0000	244.0000	99.3432
0.0000	96.0000	100.3674	0.0000	248.0000	99.7489
0.0000	100.0000	100.4274	0.0000	252.0000	99.2245
0.0000	104.0000	100.2262	0.0000	256.0000	99.6850
0.0000	108.0000	100.3207	0.0000	260.0000	100.6029
0.0000	112.0000	100.5810	0.0000	264.0000	101.6237
0.0000	116.0000	100.2005	0.0000	268.0000	100.4544
0.0000	120.0000	99.6451	0.0000	272.0000	99.3739
0.0000	124.0000	101.1027	0.0000	276.0000	99.2517
0.0000	128.0000	99.6687	0.0000	280.0000	99.8256
0.0000	132.0000	98.3829	0.0000	284.0000	100.2256
0.0000	136.0000	98.2182	0.0000	288.0000	99.9982
0.0000	140.0000	100.2104	0.0000	292.0000	99.2182
0.0000	144.0000	99.2381	0.0000	296.0000	101.2923
0.0000	148.0000	98.8436	0.0000	300.0000	100.1028

표 1. 1 차 및 2 차 무반사 경계조건에 의한 반사특성 계산결과

표에서 볼 수 있는 바와같이 입사각이 커지는 경우에는 first-order condition 의 경우 $\pm 40\%$ 정도의 반사를 나타내나 second-order condition의 경우는 $\pm 1\%$ 정도의 반사 특성을 나타냄이 밝혀져 second-order condition 이 우수하며 방파제 등의 구조물에 의해 2 방향에서 파가 동시에 전파되는 경우에도 무반사가 가능할 것으로 사료된다.

: * 본 연구는 본인이 IHE, Delft 공대 재학시 학위 과정에서 수행한 것으로서 재정적인 지원을 해준 대림산업(주)에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. Behrendt, L., 1985, A finite element model for water wave diffraction including boundary absorption and bottom friction, IHHE Technical University of Denmark, series paper no 37.
2. Berkhoff, J. C. W., 1976, Mathematical models for simple harmonic linear water waves - Wave diffraction and refraction, publication no. 163, DELFT HYDRAULICS, The Netherlands.
3. De Girolamo P., Kostense, J. K., and Dingemans, M. W., 1988, Inclusion of wave breaking in mild-slope wave propagation model, In Proc. Int. Conf. Computer modelling in Ocean Engineering, (Eds. B. A. Schrefler and O. C. Zienkiewicz, (Venice, Italy : 1988),
4. Higdon, R. L., 1986, Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation, Math. Comp., Vol47 pp 437-459.
5. Higdon, R. L., 1987, Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation, Math. Comp., Vol 49, pp 65 - 90.
6. Kostense, J. K., Meijer, K. L., Dingemans M. W., Mynett, A. E., and van den Bosch P., 1986, Wave energy dissipation in arbitrary shaped harbors of variable depth, In Proc. 205th International Conference on Coastal Engineering (Taipei, Taiwan : Nov 9-14, 1986) Vol. 3, pp 2002-2016.
7. Kostense, J. K., Dingemans, M. W., and van den Bosch P., 1988, Wave - current interaction in harbours, In Proc. 21st. Int. Conf. Coastal Eng. (Malaga : 1988), pp 32 - 46.