

陰解法을 이용한 淺水方程式의 數値解析

강주환*, 박상현*, 이길성**

1. 서론

최근 컴퓨터의 발달과 함께 해안공학과 관련된 문제 해결에 있어서 처리속도에 관한 제약성은 점차 감소되고 있는 반면 정확도에 관한 관심이 높아지고 있는 추세이다. 현재까지 조석파 해석에서 가장 널리 쓰이고 있는 ADI(alternate direction implicit) 방법도 한 방향으로만 음해법적으로 차분하게 되므로 지형이 복잡한 곳에서는 소위 ADI효과라 불리는 바람직하지 않은 수치특성으로 인해 그 한계가 드러나고 있는 실정이다. 이를 극복할 수 있는 방안으로 좌표변환을 통한 방법과 전체 영역을 양방향 모두 음해법적으로 차분하여 동시에 해를 구하는 완전음해법을 이용하는 방법이 있는데(강, 1991), 전자는 하도와 같은 곳에서 차분방향이 흐름방향과 일치한다는 장점이 있는 반면 조간대 처리가 쉽지 않다는 단점이 있다. 특히 우리나라 서해안과 같이 조차가 큰 해역에서 정확한 수치해석을 하기 위해서는 조간대의 정확한 수치적 모의가 필수적이기 때문에 조간대 해석이 포함된 완전음해법이 가장 적절한 방법 중의 하나가 된다. 이 방법은 파랑변형문제에 관한 완경사방정식의 유한차분해석에 먼저 도입되어 Bayliss등(1983)과 Panchang등(1991)이 CGS(conjugate gradient squared)방법을 이용하여 해를 구해 정확도를 높인 바 있으며 Wilders등(1988)도 천수방정식에 유사한 방법을 적용해 ADI효과를 억제시켰다.

본연구에서 천수방정식이 적용된 수역은 우리나라 서해안에 위치한 새만금수역으로서 수심이 매우 불규칙하고 조간대가 광범위하게 형성되어 있어 ADI방법 적용시 ADI효과가 크게 나타나리라 예견된다. 더우기 간척사업에 수반되는 최종채질시 정확한 유허과악을 위해서, 그리고 병행되는 수리모형실험의 외부경계조건 부여를 위해서도 정확한 수치해석이 긴요한 실정이다. 이러한 배경하에 본연구에서는 완전음해법으로 차분된 천수방정식을 CGS방법으로 해결하였으며 조간대의 수치적 모의(Stelling et al., 1986)에도 주안점을 두었다.

2. 수학적모형 및 적용차분법

2.1 수학적모형

비선형이송항, 증력항, 마찰항과 Coriolis항을 고려한 천수방정식의 형태는 식(1)과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0 \quad (1.a)$$

* 農漁村振興公社 水理試驗場 (Hydraulic Laboratory, R.D.C., 1031-7, Sa-Dong, Ansan, 425-170, Korea)

** 서울대학교 土木工學科 (Department of Civil Engr., S.N.U., Seoul, 151-742, Korea)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda u - fv = 0 \quad (1. b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \lambda v + fu = 0 \quad (1. c)$$

여기서 t, x, y 는 시간과 공간에 대한 독립변수, η 는 수면변위, u, v 는 각각 x, y 방향 유속, $H=\eta+h$, $\lambda=g(u^2+v^2)^{1/2}/(C^2H)$, $C=H^{1/6}/n$, n 은 Manning의 조도계수, $f=2\omega(\sin\phi)$ 는 Coriolis계수, ω 는 지구의 자전각속도로 $7.28 \times 10^{-5} \text{rad/sec}$ 이며 ϕ 는 위도이다.

2.2 적용차분법

전술한 수학적모형의 차분화는 Wilders등(1988)의 방법을 이용하여 매시간단계를 둘로 나누어 1단계에서는 연속방정식(1.a)를 양해법으로 차분하여 수면변위 η 를 구하고 운동량방정식인 식(1.b)와 식(1.c)를 음해법으로 차분하여 u, v 를 각각 구하게 된다. 2단계에서는 식(1.a)를 음해법으로 나머지를 양해법으로 차분하여 해를 구하게 되는데 질량보존을 위하여 반복법으로 해를 구한다.

2.3 CGS방법

1단계에서 u 와 v 를 구하는 경우와 2단계의 η 를 구하는 경우에 완전음해법이 도입되었기 때문에 각각에 대한 행렬식 (2)를 풀어야 한다.

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2)$$

여기서 $[A]$ 는 $(n \times n)$ 행렬, $\{b\}$ 는 $(n \times 1)$ 벡터로 기지이고 x 는 $(n \times 1)$ 으로 미지벡터이다. 이러한 행렬식은 CG(conjugate gradient)방법을 이용하여 곱셈연산만으로 이루어진 반복법을 사용하면 효율적으로 해를 구할 수 있다. 즉, 격자수가 아무리 많다고 하더라도 구성된 행렬식은 각 행마다 5개의 영이 아닌 열이 존재하므로 그 열의 위치만 알게 되면 매 행마다 5번의 곱셈만 하면 되므로 연산시간은 격자수에 선형적으로 비례하게 된다. 그러나 CG방법은 $[A]$ 행렬이 대칭일 경우에만 수렴성이 보장되므로 본연구에 직접 적용될 수는 없으며 식(2)를 다음과 같이 변형시켜 대칭행렬로 만들어야 한다.

$$[A]^T[A]\{x\} = [A]^T\{b\} \quad (3)$$

이렇게 변형시키면 원래의 CG방법을 2번 적용한 것과 유사하게 되며 이러한 방법을 CGS방법이라 한다. 이러한 CGS방법은 비대칭행렬식에도 수렴성이 보장되지만 $[A]$ 행렬의 형태에 따라 수렴속도는 크게 차이가 난다. 1단계의 u, v 를 구할 경우 CGS방법의 적용은 수렴속도에 큰 문제점을 보이지 않고 있으나 2단계의 η 를 구할 경우에는 수렴속도가 현저히 떨어지게 된다.

이러한 현상을 극복하기 위하여 다음과 같은 preconditioned CGS방법을 도입하였다. 즉 식(2)의 양변에 적절한 실수행렬 $[Q]^{-1}$ 를 곱하면

$$[Q]^{-1}[A]\{x\} = [Q]^{-1}\{b\} \quad (4. a)$$

또는

$$([Q]^{-1}[A][Q]^{-T})([Q]^T\{x\}) = [Q]^{-1}\{b\} \quad (4. b)$$

와 같이 되며 이는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[A']\{x'\} = \{b'\} \quad (4. c)$$

여기서 $[A'] = ([Q]^{-1}[A][Q]^{-T})$, $\{x'\} = ([Q]^T\{x\})$, $\{b'\} = ([Q]^{-1}\{b\})$ 이고 양변에 $[A']^T$ 를 곱하면 식(3)과 유사한 형태인 다음 식(4.d)를 얻을 수 있다.

$$[A']^T[A']\{x'\} = [A']^T\{b'\} \quad (4. d)$$

여기서 [Q]의 선정을 포함하여 SSOR(symmetric SOR)방법을 이용한 알고리즘은 여러 문헌(Bayliss et al., 1983; Panchang et al., 1991)에서 볼 수 있다.

3. 모형의 적용

3.1 적용대상수역

본연구를 통해 개발된 수치모형을 우리나라 서해안에 위치한 새만금지구에 적용하였다. 새만금 지구는 변산해수욕장과 고군산열도, 그리고 군산항을 잇는 40,100ha의 간척지가 조성될 대규모 간척사업 대상지구로서 최대조차는 약 8m 정도나 되고 수심도 매우 불규칙적이며 조간대가 널리 퍼져 있어서 수치모형 적용시 공간적 불안정성 등 수치모형 적용시 적지 않은 오차가 수반될 것이 예견된다.

3.2 입력자료의 선정

원활한 간척사업을 위해서는 간척예정지의 유향파악이 매우 중요한 문제이며 이를 위해서는 특히 외해경계조건의 영향을 극소화시키는 동시에 격자간격을 최소화할 필요가 있다. 그러나 이 두 문제는 서로 상충되기 때문에 주어진 컴퓨터 용량을 감안하여 공간 격자간격과 공간 격자갯수를 양방향 공히 700m와 50개로 하였으며 시간 격자간격은 경제성을 고려하여 2분으로 하였다. 폐경계조건으로는 육지경계에 수직한 유속이 0이라는 조건을 부여하였고 개경계조건은 4개의 모서리 지점에서 4개의 주요분조 (M_2, S_2, K_1, O_1)로 부여한 후 이를 선형보간하였다.

3.3 적용결과

모형의 검증은 위하여 대조기에 해당되는 1990년 8월 20일부터 22일까지를 해석기간으로 택하였다. 최강창조시, 만조시, 최강낙조시, 그리고 저조시의 계산된 유속장을 (그림 1)-(그림 4)에 각각 도시하였다. 시간에 따라 폐경계가 이동하는 모습이 잘 재현되고 있는 것을 볼 수 있으며 개경계 부근을 제외하고는 유속의 크기와 방향도 합당하게 나타나고 있다. 여러지점에서 시간에 따른 유속관측치와 비교한 결과(그림생략)도 근사한 일치율을 보여주고 있다.

4. 결론

본연구를 통해 개발된 모형을 새만금수역에 적용한 결과 지형의 복잡성에도 불구하고 유속장 및 조간대가 매우 잘 재현되었으며 관측치와 비교한 결과 정확성이 입증되었다. 이러한 정확도의 증진은 완전음해법의 도입에 기인한 것으로서 공간격자 크기가 작으면 작을수록 Courant수의 제약을 받게 되는 양해법에 비해 경제성도 증진될 수 있을 것이다.

5. 참고문헌

강주환, 유한차분모형에 의한 하구의 염도확산 분석, 박사학위논문, 서울대학교 토목공학과, 1991년 2월.

Bayliss, A., C.I. Goldstein, and E. Turkel, "An Iterative Method for the Helmholtz Equation", J. of Computational Physics, Vol.49, 1983.

Panchang, V.G., B.R. Pearce, G. Wei, and B. Cushman-Roisin, "Solution of the Mild-

Slope Wave Problem by Iteration", Applied Ocean Research, Vol.13, No.4, 1991.
 Sonneveld, P., P. Wesseling, and P. M. de Zeeuw, "Multigrid and Conjugate Gradient Acceleration of Basic Iterative Methods", Numerical Methods for Fluid Dynamics 2, Morton & Baines (ed.), Clarendon Press, Oxford, 1986.
 Stelling, G. S., A. K. Wiersma, and J. B. T. M. Willemse, "Practical Aspects of Accurate Tidal Computations", J. of Hydraulic Engineering, Vol. 112, No. 9, Sep. 1986.
 Wilders, P., L. van Stun, G. S. Stelling, and G. A. Fokkema, "A Fully Implicit Splitting Method for Accurate Tidal Computations", Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, 1988.

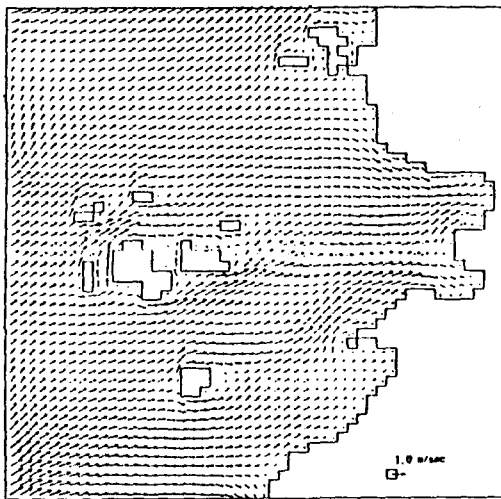


그림 1. 최강창조시 유속장

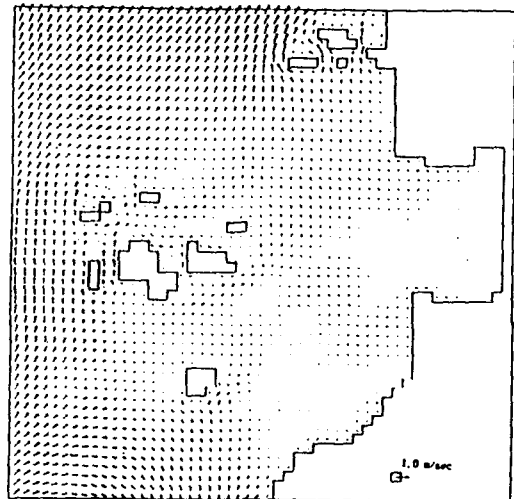


그림 2. 만조시 유속장

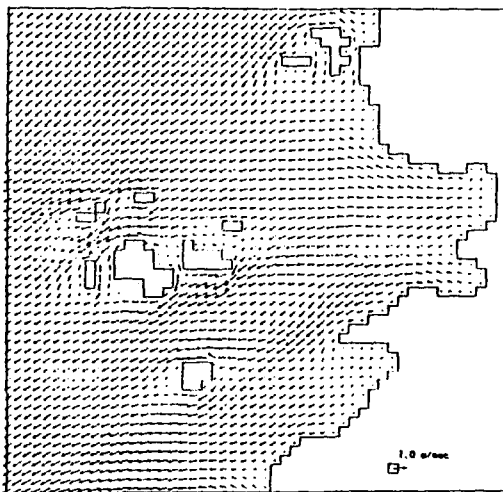


그림 3. 최강낙조시 유속장

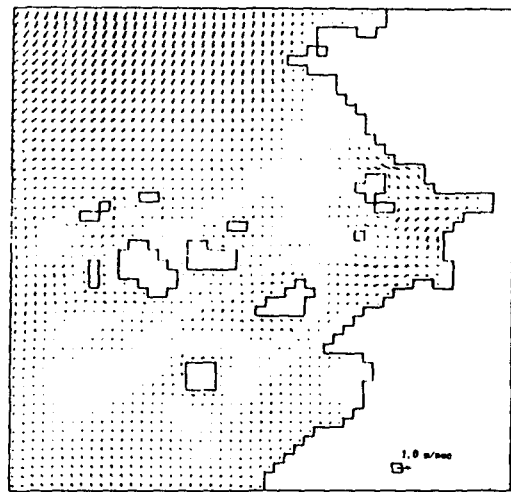


그림 4. 저조시 유속장