DMZ 방정식의 해에 관한 연구[1)]

김 홍양
고려 대학교 응용 통계 학과

Some Remarks on the Solution of the DMZ Equation

Hong Yang Kim
Dept. of Applied Statistics, Korea Univ.

[요 약] 비선형 체계의 상태 추정량은 DMZ(Ducan - Mortensen - Zakai) 방정식 [Runggaldier, Spizzichino: 1987]의 해를 구함으로써 얻어 진다. 일반 비선형 체계의 DMZ 방정식의 해를 구하기는 어렵다. 계산 가능한 "유한 차원"의 DMZ 방정식의 해를 제공하는 체계의 족(class)은 이론 및 실제 응용에 중요하다. 본 연구에서는 "마코비안 도약 선형 체계(Marcovian Jump Linear System: MJLS)"의 DMZ 방정식이 유한 차원의 해를 가지는 것을 증명하였다.

1. 비선형체계의 Bayesian 추정 문제

어떤 체계(system) S가 다음과 같은 비선형 차분 방정식(nonlinear difference equation)으로 표시된다고 하자.

$$(S):\ \begin{cases} X_{t+1} = g_t(X_t) + V_t & (1) \\ Y_t = s_t(X_t) + W_t & (2) \end{cases}$$

$$t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

단 X_t는 시점 t에서의 상태 변수(state variable)이고 $X_t \in X \subset \mathbb{R}$
W_t는 시점 t에서의 상태 잡음(state noise)
Y_t는 시점 t에서의 관측 변수(observation variable)이고 $Y_t \in Y \subset \mathbb{R}$
V_t는 시점 t에서의 관측 잡음(observation noise)

---

1) 이 논문은 국방과학연구소(과제 번호:ADD-92-4-002)의 연구비에 의해 수행된 연구 결과의 일부임.

g_t, s_t : R -> R 이 가측 함수(measurable mapping)이며 $\{W_t\}$는 "일반 확률 밀도 함수(generalized probability density function: g.p.d.f)" $p(w_t) = g(w_t; \psi_t) \in G$ 인 서로 독립인 확률 변수 수열(단 $G = \{g(\cdot; \psi \mid \psi \in \Psi \subset R^m)\}$이고 $\{V_t\}$는 g.p.d.f $p(v_t) = z(v_t; \phi_t) \in Z$ 인 서로 독립인 확률 변수 수열(단 $Z = \{z(\cdot; \phi \mid \phi \in \Phi \subset R^n)\}$이라고 가정하자.

비선형 Bayesian 추정 문제

(1) 시점 t까지의 관측 자료 벡터 Y^k의 집합

$$Y^k \triangleq \{Y_0 = y_0,\ Y_1 = y_1,\ Y_2 = y_2,\ \cdots,\ Y_k = y_k\}$$

$$k = 0,\ 1,\ \cdots,\ t$$

이 주어지고

(2) 체계의 상태 변수 X_t와 관측 변수 Y_t가 체계 방정식 (1)과 (2)를 만족할 때 관측자료 $Y^{t-1} = \{y_0,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{t-1}\}$로 부터 시점 t 에서의 체계의 상태 변수 X_t와 관측 자료 $Y^t = \{y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_t\}$로부터 시점 t에서의 체계의 상태 변수 X_t의 Bayesian 추정 문제를 고려해 보자.

2. 비선형 체계의 DMZ 방정식

위 Bayesian 추정의 문제의 해는 다음과 같은 사후 밀도 함수의 추차형을 결정하는데 있다[Runggaldier, Clarotti: 1989].

$$f(x_t/Y^t) = \frac{f(x_t/Y^{t-1})\ f(y_t/x_t)}{f(y_t/Y^{t-1})} \tag{3}$$

$$f(x_t/Y^{t-1}) = \int f(x_{t-1}/Y^{t-1})\ f(x_t/x_{t-1})\ dx_{t-1} \tag{4}$$

(3)식의 $f(y_t/Y^{t-1})$은 표준화 상수(normalizing constant)이며 다음과 같이 표시된다.

$$f(y_t/Y^{t-1}) = \int f(x_t/Y^{t-1})\ f(y_t/x_t)\ dx_t \tag{5}$$

초기 밀도 함수 $f(x_0/Y^0) = f(x_0/y^0)$는

$$f(x_0/y_0) = \frac{f(y_0/x_0)\ f(x_0)}{f(y_0)} = f(x_0) \tag{6}$$

이다.

(3) 식의 $f(y_t/x_t)$는 관측잡음 W_t의 사전 밀도 함수(a priori density) $f(w_t)$와 관측 방정식(2)로부터 얻어진다.
(4) 식의 $f(x_t/x_{t-1})$은 상태잡음 V_{t-1}의 사전 밀도 함수 $f(v_{t-1})$와 상태 방정식(1)으로부터 얻어진다.
위의 사전 사후 밀도 함수들 (3), (4), (5) 식과 $f(x_0)$를 이용하면 다음과 같은 체계 S의 $f(x_t/Y^t)$와 $f(x_{t+1}/Y^t)$에 관한 DMZ 방정식을 얻을 수 있다.

DMZ (Duncan - Mortensen - Zakai) 방정식

$$f(x_t/Y^t) = \frac{\int f(y_t/x_t)\ f(x_t/x_{t-1})\ f(x_{t-1}/Y^{t-1})\ dx_{t-1}}{\int\int f(y_t/x_t)\ f(x_t/x_{t-1})\ f(x_{t-1}/Y^{t-1})\ dx_{t-1}\ dx_t} \tag{7}$$

$$f(x_{t+1}/Y^t) = \int f(x_{t+1}/x_t)\left[\frac{\int f(y_t/x_t)\ f(x_t/x_{t-1})\ f(x_{t-1}/Y^{t-1})\ dx_{t-1}}{\int\int f(y_t/x_t)\ f(x_t/x_{t-1})\ f(x_{t-1}/Y^{t-1})\ dx_{t-1}\ dx_t}\right]dx_t \tag{8}$$

이 적분 - 추차형 방정식(integral - recursive equation)은 체계 S의 상태 변수의 추정 밀도 함수의 추차적 변화를 나타내는 것으로서 Bayesian 추정의 문제는 (7), (8) 즉 DMZ방정식의 해 $f(x_t|Y^t)$와 $f(x_{t+1}|Y^t)$를 결정하는데 있다[Jazwinski: 1970].

3. DMZ 방정식의 해(solution)

$\rho(X)$를 X 위에서의 모든 확률 밀도 함수의 무한 차원 공간이라 하자. 그러면 DMZ 방정식은 작용소(operater)

$$T_y : \rho(X) \longrightarrow \rho(X),\ y \in Y$$

로 간주될 수 있다. 따라서 Bayesian 비선형 상태 추정 즉 DMZ 방정식의 해의 발견 문제는 "무한 차원적(infinite dimensional)" 문제이다[Runggaldier, Spizzichino:

1987].

DMZ 방정식의 해를 구하기는 매우 힘들다. 이는 일반적으로 DMZ 방정식의 적분이 닫힌형(closed form)으로 표시 되지 않기 때문이다 [Kramer, Sorenson: 1988]. 계산가능한 유한 차원의 DMZ 방정식의 해 즉 추정 밀도 함수를 가지는 체계의 족(class)을 발견하는 것은 이론 그 자체의 흥미로움 뿐만 아니라, 실제적으로 유용성이 많다. 연속형 체계의 추정 밀도 함수는 이산형 체계의 추정 밀도 함수로 접근시킬 수 있으며 이산형 체계의 추정 밀도 함수는 어떤 이산형 체계의 유한 차원 추정 밀도 함수로 접근시킬 수 있기 때문이다 [Soeda: 1974, Korezlioglu: 1987].

체계가

1) Linear - Gaussian (Kalman - Bucy) 체계 [Kalman: 1960, Ho, Lee: 1964]

2) Linear - nonGaussian 체계 [Sorenson, Stubberud: 1968, Benito - Calles: 1985]

3) Nonlinear - Gaussian 체계 [Masi, Ruggaldier, Barozzi: 1983]

일 때 DMZ 방정식의 해는 "일반 유한 차원 확률 밀도 함수"(정의 1을 참조)로, 다시 말해서 추정 밀도 함수 $f(x_t|Y^t)$와 $f(x_{t+1}|Y^t)$가 모든 t에 대하여 어떤 주어진 파라메터 붙여진 족(parametrized family)에 속하는 유한개의 밀도 함수들의 선형 결합(linear combination)으로 되는 것이 알려져 있다.

본 연구에서는 위의 3 가지 족에 속하지 않는 체계로서 DMZ 방정식의 해가 유한 차원 추정 밀도 함수로 표시되는 체계를 소개하고자 하는데 목적이 있다.

4. 유한 차원 추정 밀도 함수

G를 주어진 다음 형식을 가진 g.p.d.f의 집합

$$G = \{ g(\cdot\,;\psi) \mid \psi \in \Phi \subset R^p \}$$

이라 하자.

주어진 집합 G와 자연수 m에 대해 parameter 집합

$$\Theta_m \triangleq \{V=(c_1,\cdots,c_m;\ \psi_1,\cdots,\psi_m) \mid c_i \in R,\ \sum_{i=1}^{m} c_i=1;\ \psi_i \in \Phi\}$$ 와

g.p.d.f.의 집합 F_m을

$$F_m \triangleq \{f(\cdot\,;V)=\sum_{i=1}^{m} c_i g(\cdot\,;\psi_i) \mid f(\cdot\,;V)\text{는 gpdf},\ V=(c_1,\cdots,c_m;\ \psi_1,\cdots,\psi_m \in \Theta_m;$$
$$g(\cdot\,;\psi_i) \in G\ \}$$

이라 하고, Θ, F를 다음과 같이 정의하자.

$$\Theta = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Theta_m$$

$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$$

정의 1 <Van Schuppen: 1976>

$\{(x_t, y_t) \mid x_t \in X \subset R,\ y_t \in Y \subset R\}$이 체계 방정식 (1)과 (2)를 만족한다고 하자. 만약 다음 조건을 만족하는 g.p.d.f의 집합 G와
가측 함수 $\Phi_t : \Theta x Y \longrightarrow \Theta$

$$\begin{cases} p(x_0) = f(x_0 ; v_0) \in F \\ p(x_{t-1} \mid Y^{t-1}) = f(x_{t-1} ; v_{t-1}) \in F \Rightarrow p(x_t \mid Y^t) = f(x_t : \Phi_t(v_{t-1}, y_t)) \in F, \end{cases}$$
$$t = 1, 2, \cdots\cdots$$

가 존재하면 체계 S는 "일반 유한 차원 추정 밀도 함수"를 가진다고 말한다.

정의 2 <Masi, Runggaldier, Barozzi: 1983>

함수 $d : \Theta \longrightarrow N$ (자연수 집합)을 $V = (c_1, c_2, \cdots, c_m : \phi_1, \phi_2, \cdots\cdots, \phi_m)$에 대해 $d(V) = m$ 이라 정의하자. 만약 $d[\Phi_t(v_{t-1}, y_t)] = m_t$ ($\{m_t\}$:자연수 집합의 수열) $\forall t$ 라면 이 유한 차원 여과 밀도 함수는 "m_t-여과 밀도 함수"라 불리운다.

5. 마코비안 도약 선형 체계(Marcovian Jump Linear System: MJLS) 의 DMZ 방정식의 해

1] MJLS의 정의

MJLS은 <가정 1>, <가정 2>, <가정 3>을 만족하는 다음과 같은 차분 방정식 (difference equation) 으로 표시된다.

$$\text{MJLS} : \begin{cases} X_{t+1} = f(Z_t)\, X_t + V_t \\ Y_t = h(Z_t)\, X_t + W_t \end{cases}$$
$$t = 0, 1, 2, \cdots$$

단 X_t는 시점 t에서의 상태 변수(state variable)이고
W_t는 시점 t에서의 상태 잡음(state noise)
Y_t는 시점 t에서의 관측 변수(observation variable)이고
V_t는 시점 t에서의 관측 잡음(observation noise)

<가정 1> $\{V_t\}$와 $\{W_t\}$는 평균이 영(zero)인 백색 가우시안 잡음(white Gaussian noise)이며 아래와 같은 공분산을 갖는다.

$$\mathrm{cov}\ (V_t, V_l) = Q_t \delta_{tl} \qquad \delta_{tl} = \begin{cases} 1, & t=l \\ 0, & t \neq l \end{cases}$$

관측 변수 Y_t 는 상태 변수 X_t 에 의해서 아래와 같이 정의된다.

$$\mathrm{cov}\ (W_t, W_l) = R_t \delta_{tl} \qquad \delta_{tl} = \begin{cases} 1, & t=l \\ 0, & t \neq l \end{cases}$$

모든 시점 t에서 상태 잡음 $\{V_t\}$, 관측 잡음 $\{W_t\}$, 초기 상태 X_0는 서로 독립이다.

<가정 2> 수열 $\{Z_t\}$는 아래와 같은 사전 전이 확률(priori transition probability)을 가지는 유한한 이산 Marcov chain 이다.

$$P_{q/p} \overset{\triangle}{=} p(Z_t = i_q \mid Z_{t-1} = i_p), \quad 1 \leq p,\ q \leq N$$

$\{ i_1, i_2, \cdots, i_N \}$: Z_t의 "공간"
그리고 수열 $\{Z_t\}$는 상태 잡음 $\{V_t\}$, 관측 잡음 $\{W_t\}$, 초기 상태 X_0와는 독립이다.

<가정 3> 모든 $p = 1, 2, \cdots, N$ 에 대해서 $p(Z_0=i_p|Y^0)$가 주어지고 조건부 확률 $p(x_0|Z_0=i_p, Y^0)$은 아래와 같이 주어진다.

$$p(x_0|Z_0=i_p, Y^0) = N\ (x_0 - m_0^{pl}, \sigma_0^{pl})^{2)} \qquad p = 1, 2, \cdots, N$$

2] MJLS의 DMZ 방정식의 해

MJLS의 DMZ 방정식의 해는 관측치 $Y^t = \{y_0, y_1, \cdots, y_t\}$에 의한 상태 X_t에 관한

---

2) $N(x - a, B) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi B}} \exp\{-\dfrac{1}{2B}(x-a)^2\}$

Baysian 추정량 문제에서 다음과 같이 얻어질 수 있다 [Kim: 1992].

$$p(x_t|Y^t) = \sum_{q=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{j=1}^{N^{t-1}} \alpha_t^{qpj} \, N(x_t - m_t^{qpj}, \sigma_t^{qpj}) \qquad (9)$$

$$p(x_{t+1}|Y^t) = \sum_{q=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_t^{qpj} N(x_{t+1} - f(i_q)\, m_t^{qpj}, [Q_t + f^2(i_q)\, \sigma_t^{qpj}]) \qquad (10)$$

단,

$$\alpha_t^{qpj} = \frac{\alpha_{t-1}^{pj} P_{q/p} P_{t-1/t-1}^{p} \, N(y_t - f(i_p)\, h(i_q)\, m_{t-1}^{pj}, V)}{\sum_{q=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{j=1}^{N^{t-1}} \alpha_{t-1}^{pj} P_{q/p} P_{t-1/t-1}^{p} \, N(y_t - f(i_p)\, h(i_q)\, m_{t-1}^{pj}, V)} \qquad (11)$$

$$V = [R_t + h^2(i_q)\, Q_{t-1} + h^2(i_q)\, f^2(i_p)\, \sigma_{t-1}^{pj}]$$

$$\sigma_t^{qpj} = \frac{R_t \{ Q_{t-1} + f^2(i_p)\, \sigma_{t-1}^{pj} \}}{R_t + h^2(i_q)\, Q_{t-1} + h^2(i_q)\, f^2(i_p)\, \sigma_{t-1}^{pj}} \qquad (12)$$

$$m_t^{qpj} = \frac{[Q_{t-1} + f^2(i_p)\sigma_{t-1}^{pj}]\, h(i_q)\, y_t + R_t\, f(i_p)\, m_{t-1}^{pj}}{R_t + h^2(i_q)\, Q_{t-1} + h^2(i_q) f^2(i_p) \sigma_{t-1}^{pj}} \qquad (13)$$

< 초기화 >

(가) j = 1, 2, ⋯, N^t을 이용하여 j가 갖는 모든 값을 결정한다.

(나) α_t^{qpj}, m_t^{qpj}, σ_t^{qpj} 에 있는 p_j를 $r=N^{t-1}(p-1)+j$ 로 바꾼다.

(다) α_t^{qr}를 결정한다.

(라) (9), (10) 식의 N^{t-1}, α_t^{qr}, σ_t^{qr}, m_t^{qr}에서 $t = t-1$, $r = j$, $q = p$ 로 바꾼다.

$\boxed{\text{정리}}$

MJLS는 유한 차원 추정 밀도 함수를 갖는다.

(증명)

(6), <가정3> 그리고 전확률정리를 사용하면, $p(x_0) \in F$ 이다.

$V_{t-1} = (\alpha_{t-1}{}^{pj},\ \sigma_{t-1}{}^{pj},\ m_{t-1}{}^{pj})$ 이라 하자. 그리고 함수 ϕ_t를

$\phi_t(V_{t-1},\ y_t) = (\alpha_t{}^{qpj},\ \sigma_t{}^{qpj},\ m_t{}^{qpj})$

($\alpha_t{}^{qpj}$, $\sigma_t{}^{qpj}$, $m_t{}^{qpj}$ 는 각각 (11), (12), (13)을 만족)

또한 함수 $H : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$: 자연수 집합)을

$H(p, j) = N^{t-1}(p-1) + j,\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ N^{t-2},\ p=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ N \in \mathbb{N})$ 라 정의하고

$\Phi_t = H \circ \phi_t$ 로 두면

$\Phi_t(V_{t-1},\ y_t) = (\alpha_t{}^1,\ \cdots,\ \alpha_t{}^s,\ \sigma_t{}^1,\ \cdots,\ \sigma_t{}^s,\ m_t{}^1,\ \cdots,\ m_t{}^s)$ 이며

(s : H 의 최대치)

$G = \{g(x;\ m,\ \sigma^2) \mid m,\ \sigma^2 \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$ g : Gaussian 밀도 함수$\}$와 $f(x_t;\ \Phi_t(v_{t-1},\ y_t)) \in F$ 가 됨은 식(9)에서 쉽게 알 수 있다.

따라서 <정의 1>에 의해 MJLS는 유한 차원 여과 밀도 함수를 갖는다. MJLS가 유한 차원 예측 밀도 함수를 갖는 것은 식 (10)을 이용하여 비슷한 방법으로 증명할 수 있다.

<note> MJLS는 m_{3s}-여과 밀도 함수이다.

[참 고 문 헌]

Casilda Dolores De Benito-Calles, "Nonlinear Filtering for Discrete Time Systems", PH.D Dissertation Case Western Reserve University, Cleveland Ohio, August, 1985

Y. C. Ho, R. C. K. Lee, "A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control", *IEEE Trans. Automatic Contol*, 9, 333-339, 1964

A. H. Jazwinski, "Stochastic Processes and Filtering Theory", Academic Press, 1970

R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *Trans. ASME*, vol.82, ser. D, pp.35-43, Mar, 1960

H. Y. Kim, "Optimal Approximated Estimation of Signal Analysis", 국방 과학 연구소 과제 번호 ADD-92-4-002, August, 1992

H. Korezliglu, "Computational Problems in Nonlinear Filtering", *Stochastic Modellings Filtering, Lecture Notes in Control and Info. SC.* Spring-verlag, 1987

S. C. Kramer and Harold W. Sorenson, "Recursive Bayesian Estimation Using Piece-Wise Constant Approximations", *Automatica*, vol.24, no.6, 789-801, 1988

G. B. Di Masi, W. J. Runggaldier & B. Barozzi, "Generalized Finite Dimensional Filters in Discrete Time", R. S. Bucy and J. M. F. moura(eds), *nonlinear Stochastic problems*, 267-277, 1983, Reidel Publishing Company

W. J.Runggaldier,C.A.Clarotti, "On Approximations for Stochastic Filtering with an Application to Reliability", P.Kall et al.(Hrsg) Quantitative methoden in den Wirtschaftswissenschaften,Spinger-Verlag Berlin Heidelberg,1989

W. J. Runggaldier & F. Spizzichino, "Finite-Dimensionality in Discrete-time Nonlinear Filtering From a Bayesian Statistics viewpoint", *Stochastic Modellings Filtering, Lecture Notes in Control and Info. SC.* Spring-verlag, 1987

J. H. Van Schuppen, "A Study of Estimation and Filterint by the Bayesian Method", SSM-Report 7607, Washington University, St. Louis (1976).

T. Soeda, S. Ohmatsu and Y. Tomita, "On the Estimation Job State Variables for Discrete-Time Nonlinear Systems", *Proc. 5th Symposium on Nonlinear Estimation Theory and Its Applications*, San Diego Ca., 1974

H. W. Sorenson and A. R. Stubberud, "Non-Linear Filtering by Approximation of the a Posteriori Density", *Int. J. Control*, vol.8, no.1, 33-51, 1968