

침수지반거동 해석을 위한 유한요소모델

FINITE ELEMENT MODEL FOR THE ANALYSIS OF FLUID-SATURATED POROUS SOLID

구정희\* 홍순조\*\* 김문겸\*\*\* 황학주\*\*\*\*  
Koo, Jeong-Hoi Hong, Soon-Jo Kim, Moon-Kyum Hwang, Hak-Joo

ABSTRACT

In the design and construction of underground structures, it is essential to accurately predict the structural behavior of the fluid-saturated ground during and after excavation. Terzaghi and Biot established the theory for the behavior of such two phase material. For the purpose of analysing the saturated porous solid system, finite element procedure provides a powerful tool. In this paper, a finite element analysis procedure based upon Biot's theory is presented to evaluate the deformation of solid skeleton and pore pressure of entrapped fluid. Terzaghi's one-dimensional and Gibson's two-dimensional problems are solved using Q4 and Q8 element to verify the program validity.

1. 서론

침수지반의 거동을 평가하기 위해서는 토질간극에 포함된 유체와 토질입자와의 상호작용을 정확히 고려해야 한다. 지반에 포함된 유체에 의하여 지반과 구조물이 받는 영향에 대한 이론은 Biot에 의하여 제시되었으며[1], Christian[2], Sandhu 등[3]은 Biot의 이론에 근거하여 유한요소법에 의한 해석방법을 각각 개발하였다. 고체/유체 혼합체(solid/fluid mixture)의 해석에 대한 연구는 이들 두 방법으로부터 각각 파생되어 왔으며[4-6], 동시에 토질의 구성방정식에 대한 연구와 함께 비선형문제와 3차원 문제에 대한 해석방법개발에 광범위한 연구가 진행되고 있다[7].

최근 국내외적으로 다양한 형태의 지하공간개발계획이 제시되고 있으며, 실제로 교통시설이나 지하주차장의 건설 등 활용범위가 확대되고 있다. 이와 같은 지하시설의 설계 및 굴착시 지하수를 포함한 지반거동을 정확히 해석하는 것은 필연적이므로 이를 위해 신뢰할 수 있는 해석방법의 확보가 매우 중요하다. 본 논문은 이와 같은 침수지반의 거동을 정확히 평가하는 방법을 개발하기 위한 연구결과의 일부에 관한 것으로서 완전포화된 다공성 매체의 지반변형과 공극수압의 거동을 평가할 수 있는 고체/유체 혼합체의 탄성유한요소 해석프로그램을 개발하여 침수지반해석에 적용한 결과를 고찰한 것이다.

2. 고체/유체 혼합체의 지배방정식

2.1 평형방정식

물체력벡터성분  $F_i$ 가 작용하는 영역  $R$ 과 표면력벡터성분  $T_i$ 가 작용하는 경계  $S(S=S_D+S_T=S_F+S_I)$ 로 이루어진 고체/유체 혼합체를 생각하자[그림 1]. 고체입자의 변형은 응력텐서  $\sigma_{ij}$ 와 공극수압  $\pi$ 의 차인 유효응력텐서  $\sigma'_{ij}$ 에 의하여 좌우된다. 따라서 응력텐서  $\sigma_{ij}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다[8].

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij}\pi \quad (1)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta,  $\pi$ 는 공극수압이며 인장을 양으로 한다. 유효응력은 Hooke의 법칙에 의하여 변형률과 관계되므로

$$\sigma'_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2)$$

이고, 여기서  $D_{ijkl}$ 는 재료탄성계수텐서,  $\epsilon_{kl}$ 은 고체입자의 변형률텐서이다.

따라서 고체/유체 혼합체에 대한 영역  $R$ 에서의 평형방정식은 다음과 같다[3].

$$\sigma_{ij,j} - \delta_{ij}\pi_{,j} - F_i = 0 \quad (3)$$

\* 선경건설 연구소 연구원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

\*\* 선경건설 연구소 부장, 공학박사

\*\*\* 연세대학교 토목공학과 부교수

\*\*\*\* 연세대학교 토목공학과 교수

이 식은 그림 1의 기하학적 경계  $S_D$ 와 역학적 경계  $S_T$ 에서 각각 다음 경계조건을 만족하여야 한다.

$$u_i = u_i^p \quad \text{on } S_D \quad (4)$$

$$T_i = \sigma_{ij}n_j = T_i^p \quad \text{on } S_T \quad (5)$$

여기서  $u_i$ 는 변위벡터성분,  $n_j$ 는 경계에서 외부로 향하는 단위법선벡터성분,  $u_i^p$ ,  $T_i^p$ 는 각각 기지인 경계에서의 변위 및 표면력벡터성분이다.

## 2.2 유체흐름의 연속방정식

지반을 흐르는 유체의 흐름이 Darcy의 법칙을 따른다고 가정하고 위치수두를 무시하면

$$v_i = -\frac{k_{ij}}{\gamma_w} \pi_{,j} \quad (6)$$

이다. 여기서  $v_i$ 는 유체흐름속도,  $k_{ij}$ 는 투수계수텐서,  $\gamma_w$ 는 유체의 단위밀도이다. 유체흐름이 Darcy의 법칙을 따르면 그림 1의 포화된 고체/유체 혼합체에서 유출되는 유체의 양이 체적감소율과 같다는 관계로부터 유체흐름의 연속방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다[6,10]. 단 유효응력에 의한 고체입자의 체적변화는 무시한다.

$$v_{i,i} = -\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t} - \left( \frac{1-\zeta}{k_s} + \frac{\zeta}{k_f} \right) \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t} - \frac{1}{M} \frac{\partial \pi}{\partial t} \quad (7)$$

여기서  $\varepsilon_{ii}$ 는 고체입자의 체적변형률이고,  $1/M$ 은 공극률  $\zeta$ , 고체의 체적팽창계수  $k_s$ 와 유체의 체적팽창계수  $k_f$ 에 의하여 결정되는 고체와 유체의 압축률을 나타낸다.

유체흐름의 연속방정식(7)은 기하학적 경계  $S_F$ 와 역학적 경계  $S_I$ 에서 다음과 같은 경계조건을 만족하여야 한다.

$$\pi = 0 \quad \text{on } S_F \quad (8)$$

$$n_i v_i = 0 \quad \text{on } S_I \quad (9)$$

## 3. 유한요소 정식화

### 3.1 유한요소방정식

고체/유체 혼합물에 대하여 정의한 평형방정식(3)과 유체흐름의 연속방정식(7)이 정의된 영역에 대한 유한요소 방정식(discretized equation)을 유도한다. 평형방정식(3)에 가상일의 원리를 적용하면 경계조건 (4), (5)에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_R \varepsilon_{ij}^* D_{ijkl} \varepsilon_{kl} dR - \int_R \varepsilon_{ij}^* \delta_{ij} \pi dR - f_i = 0 \quad (10)$$

여기서  $\varepsilon_{ij}^*$ 는 가상변형률텐서,  $u_i^*$ 는 가상변위벡터이며

$$f_i = \int_R u_i^* F_i dR + \int_S u_i^* T_i dS \quad (11)$$

이다. 이 식을 시간  $t$ 로 편미분하면 다음과 같은 평형방정식을 쓸 수 있다.

$$\int_R \varepsilon_{ij}^* D_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} dR - \int_R \varepsilon_{ij}^* \delta_{ij} \frac{\partial \pi}{\partial t} dR - \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

마찬가지로 연속방정식(7)은 경계조건(8), (9)에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_R \left\{ v_i \pi_{,j} - \left( \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t} + \frac{1}{M} \frac{\partial \pi}{\partial t} \right) \pi^* \right\} dR = 0 \quad (13)$$

여기서  $\pi^*$ 는 가상공극수압벡터이다. 위 식에 식(6)의 Darcy의 법칙을 대입하면

$$- \int_R \left\{ \frac{k_{ij}}{\gamma_w} \pi_{,j} \pi_{,i}^* + \left( \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t} + \frac{1}{M} \frac{\partial \pi}{\partial t} \right) \pi^* \right\} dR = 0 \quad (14)$$

이다. 한편 유한요소상에서 변위, 변형률, 공극수압은 절점에서의 값을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{u\} = [N_s] \{\bar{u}\} \quad (15)$$

$$\{\varepsilon\} = [B_s] \{\bar{u}\} \quad (16)$$

$$\{\pi\} = [N_f] \{\bar{\pi}\} \quad (17)$$

여기서  $\{\bar{u}\}$ 는 절점변위벡터,  $\{\bar{\pi}\}$ 는 절점에서의 공극수압,  $[N_s]$ 는 고체입자의 변위에 대한 형상함수,  $[N_f]$ 는 공극

수압에 대한 함수이며  $[B_S]$ 는 고체입자에 대한 탄성변형률행렬(elastic strain matrix)이다. 위의 세 식을 평형방정식(12)에 대입하여 정리하면 유한요소방정식은 다음과 같이 된다.

$$[K_S] \frac{d}{dt} \{\bar{u}\} + [C] \frac{d}{dt} \{\bar{\pi}\} - \frac{d}{dt} \{f\} = 0 \quad (18)$$

여기서

$$[K_S] = - \int_R [B_S]^T [D] [B_S] dR \quad (19)$$

$$[C] = \int_R [B_S]^T [N_F] dR \quad (20)$$

$$\{f\} = \int_R [N_S] \{F\} dR + \int_S [N_S] \{T\} dS \quad (21)$$

이다.

식(15)-(17)을 유체흐름의 연속방정식(14)에 대입하여 정리하면 유한요소방정식을 구할 수 있다.

$$[H] \{\bar{\pi}\} + [S] \frac{d}{dt} \{\bar{\pi}\} + [C]^T \frac{d}{dt} \{\bar{u}\} = 0 \quad (22)$$

여기서

$$[H] = \frac{1}{\gamma_w} \int_R [B_F]^T [k] [B_F] dR \quad (23)$$

$$[S] = \int_R [N_F]^T \frac{1}{M} [N_F] dR \quad (24)$$

$$[C]^T = \int_R [N_F]^T [B_S] dR \quad (25)$$

이며, 위에서 사용된  $[B_F]$ 는 공극수압에 대한 변형행렬이다.

식(18)과 (22)를 다시쓰면 다음과 같이 고체의 변위와 유체에 의한 공극수압이 상호관련된 유한요소방정식(coupled equation)을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{\pi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_S] & [C] \\ [C]^T & [S] \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{\pi}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{d\{f\}/dt\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

### 3.2 유한요소방정식의 시각력해석

식(26)에서 미지변수벡터는 시간  $t$ 의 함수이므로 이 식의 해는 시각력해석이 필요하다. 시간  $t_{n-1}$ 과  $t_n (= t_{n-1} + \Delta t)$  사이에서 적분은 다음과 같이 근사화될 수 있다<sup>[9]</sup>.

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t) dt = \alpha \Delta t f(t_n) + (1-\alpha) \Delta t f(t_{n-1}) \quad (27)$$

여기서  $\alpha$ 는 정의된 함수  $f(t)$ 에 의하여  $0 \leq \alpha \leq 1$  사이에서 결정된다. Booker 등<sup>[5]</sup>은  $\alpha \geq 1/2$ 일 때 어떠한  $f(t)$ 에 대하여도 무조건 안정(unconditionally stable)하다는 것을 증명하였다. 식(27)을 이용하여 식(26)을 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [K_S] & [C] \\ [C]^T & [S] + \alpha [H] \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{\pi}\} \end{Bmatrix}_{t_n} = \begin{bmatrix} [K_S] & [C] \\ [C]^T & [S] - (1-\alpha) [H] \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{\pi}\} \end{Bmatrix}_{t_{n-1}} + \begin{Bmatrix} \{d\{f\}/dt\} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta t \quad (28)$$

행렬  $K$ ,  $C$ ,  $S$ ,  $H$ 와 하중벡터는 각 시간단계에서 한번 계산되고 시간  $t_{n-1} + \Delta t$ 에 대해  $u$ 와  $\pi$ 는 식(28)로부터 계산되고, 처짐(settlement)이 일정값에 수렴될 때까지 계속된다.

## 4. 수치해석에

이상에서 유도된 식에 따라 유한요소해석 프로그램을 개발(DAPSS)하여 Christian 등<sup>[11]</sup>의 1차원 문제와, Schiffman 등<sup>[12]</sup> 그리고 Gibson 등<sup>[13]</sup>의 2차원 문제에 적용하였다.

### 4.1 1차원 문제의 해석결과

Christian 등<sup>[11]</sup>이 Terzaghi의 1차원 압밀<sup>[10]</sup>에 대하여 검증을 실시한 것과 동일한 해석모형을 이용하여 검증하였다. 그림 2의 1차원 유한요소망에서 배수는 상면으로만 허용되고 하부면과 측면으로의 배수는 허용되지 않는다.

다. 그림 3에는 동일 물성으로 이루어진 경우에 대하여 본 프로그램에서 계산된 결과와 Terzaghi의 해가 주어졌다. 그림에서  $T(=C_v t/H^2)$ 는 무차원 시간계수(dimensionless time factor)이다. 여기서  $C_v$ 는 압밀계수로서 Biot[1]에 의하여 탄성계수, Poisson비, 투수계수를 포함하는 식으로 유도되었다. 그림 4는 그림 2의 유한요소망에서 다른 물성은 동일하나 중앙상부의 투수계수가 하부의 투수계수에 비하여 4배 큰 값을 갖는 경우에 대한 해석 결과를 Christian 등의 유한요소해석 결과와 비교하여 나타낸 것이다. 그림 3, 4에서 본 해석결과가 주어진 해석해와 거의 일치함을 알 수 있다.

#### 4.2 2차원 문제의 해석결과

반무한체(half-space)에 수직하중이 가해진 경우에 대하여 Ghaboussi 등[4]이 사용한 그림 5의 유한요소망을 이용하여 해석을 실시하고 Schiffman 등[12]의 해석해와 비교하였다. 그림 6은  $x/a=0$ 에서 공극수압의 수직분포를 나타낸 것이고 그림 7은  $z/a=0.5$ 에서 공극수압의 수평분포를 도시한 것이다. 두 결과 모두 Schiffman 등의 해석해와 거의 오차없이 일치함을 알 수 있다.

반무한층(semi-infinite layer)에 수직하중이 가해진 경우에 대하여 Ghaboussi 등[4]이 사용한 그림 8의 유한요소망을 이용하여 Gibson 등[13]의 해석해와 비교하였다. 그림 9에 나타낸 시간경과에 따른 지표침하변화는 Gibson 등의 해석해와 거의 같은 값을 나타낸다.

#### 5. 결어

본 연구에서는 고체/유체 혼합체에서 토질간극에 포함된 유체와 토질입자와의 상호작용을 고려한 탄성유한요소 해석프로그램을 개발하였다. 개발한 프로그램을 이용하여 작용하중에 의한 지반에 포함된 유체에 발생하는 공극수압과 지표침하에 대한 1, 2차원 해석결과, 본 유한요소 해석결과가 해석해와 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 본 연구는 이론적, 수치해석적으로 이미 개념이 정립된 완전포화인 다공성 지반에 대한 탄성해석결과이다. 실제 문제에 있어서는 재료의 탄소성적 특성이 두드러지고 불포화-포화지반층(unsaturated-saturated layer)이 함께 있을 뿐만 아니라 지반굴착에 의하여 발생하는 지하수위강하 등도 발생하기 때문에 이에 대한 지속적인 연구가 필요하다.

#### 참고문헌

1. Biot, M., 'General Theory of Three Dimensional Consolidation,' *Journal of Applied Physics*, Vol.12, 1941, pp.155-164.
2. Christian, J.T., 'Undrained Stress Distribution by Numerical Method,' *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol.94, NO. SM6, 1968, pp.1333-1345.
3. Sandhu, R.S. and Wilson, E.L., 'Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media,' *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE.*, Vol.95, NO. EM3, June, 1969, pp.641-652.
4. Ghaboussi, J. and Wilson, E.L., 'Flow of Compressible Fluid in Porous Elastic Media,' *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.5, 1973, pp.419-442.
5. Booker, J.R. and Small, J.C., 'An Investigation of the Stability of Numerical Solutions of Biot's Equations of Consolidation,' *International Journal of Solids and Structures*, Vol.11, 1975, pp.907-917
6. Lewis, R.W. and Schrefler, B., 'A Fully Coupled Consolidation Model of the Subsidence of Venice,' *Water Resources Research*, Vol.14, No.2, April 1978, pp.223-230.
7. Ohta, H., Iizuka, A., Omoto, Y. and Sugie, S., '3-D Analysis of Soil/Water Coupling Problems using Elasto-Viscoplastic Constitutive relationship,' *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Balkema, Rotterdam, 1991, pp.1191-1196.
8. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, New York, 1943.
9. Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1977, London.
10. Booker, J.R. 'A Numerical Method for the Solution of Biot's Consolidation Theory,' *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.26, 1973, pp.457-470.
11. Christian, J.T. and Boehmer, J.W., 'Plane Strain Consolidation by Finite Elements,' *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol.96, NO. SM4, July, 1970, pp.1435-1457.
12. Schiffman, R.L., Chen, A.T-F. and Jordan J.C., 'An Analysis of Consolidation Theories,' *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol.95, NO. SM1, Jan. 1969, pp.285-312.
13. Gibson, R.E., Schiffman, R.L. and Pu, S.L., 'Plane Strain and Axially Symmetric Consolidation of Clay Layer on a Smooth Impermeable Base,' *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.16, 1970, pp.34-50.

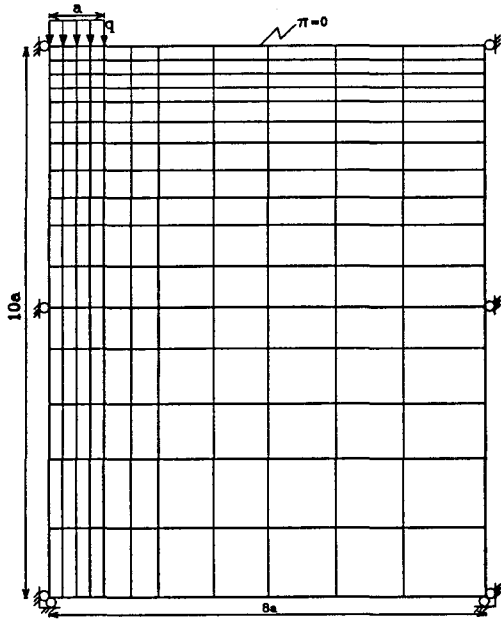


FIG. 5 FINITE ELEMENT MODEL OF SCHIFFMAN'S PROBLEM

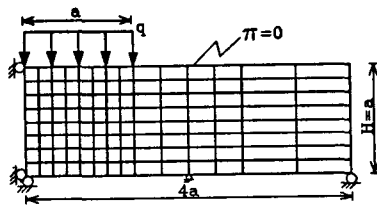


FIG. 8 FINITE ELEMENT MODEL OF GIBSON'S PROBLEM

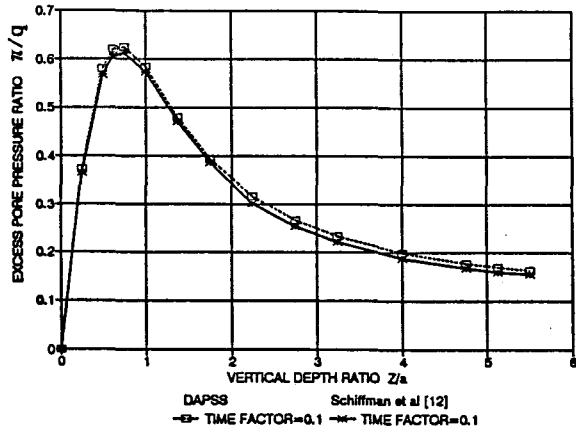


FIG. 6 VERTICAL DISTRIBUTION OF EXCESS PORE PRESSURE

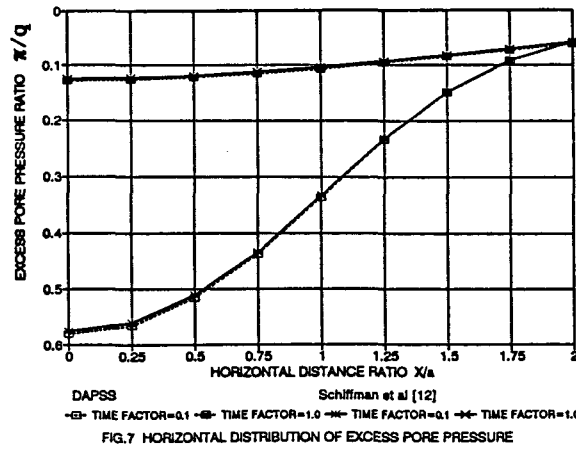


FIG. 7 HORIZONTAL DISTRIBUTION OF EXCESS PORE PRESSURE

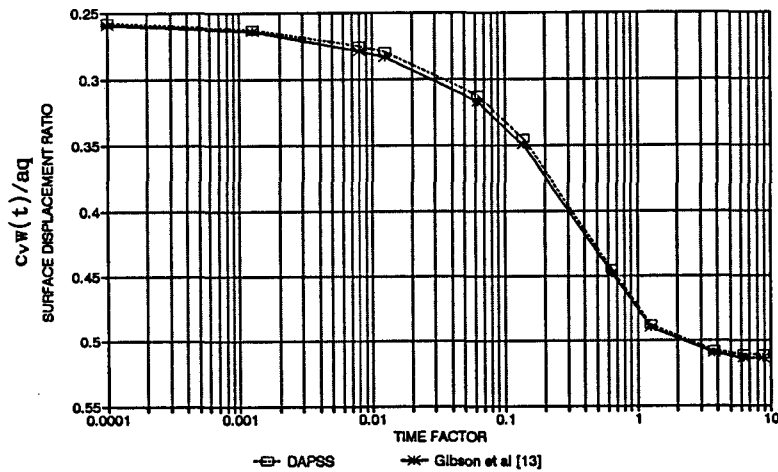


FIG. 9 SURFACE SETTLEMENT OF GIBSON'S PROBLEM

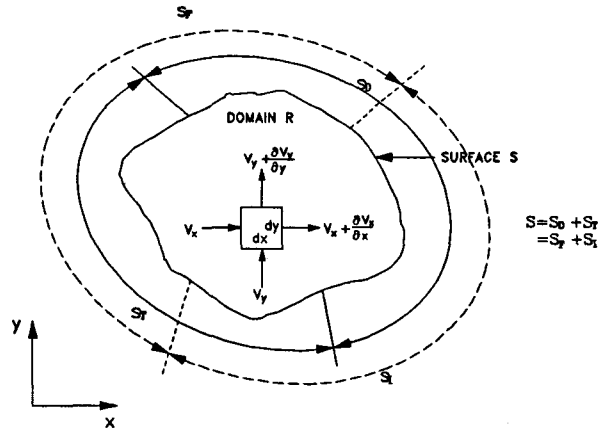


FIG.1 DOMAIN OF DEFINITION WITH BOUNDARY CONDITIONS

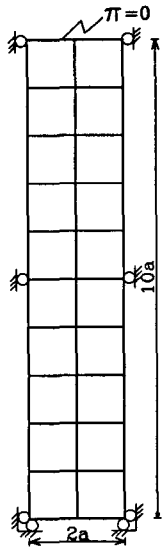


FIG.2 FINITE ELEMENT MESHES OF ONE-DIMENSION

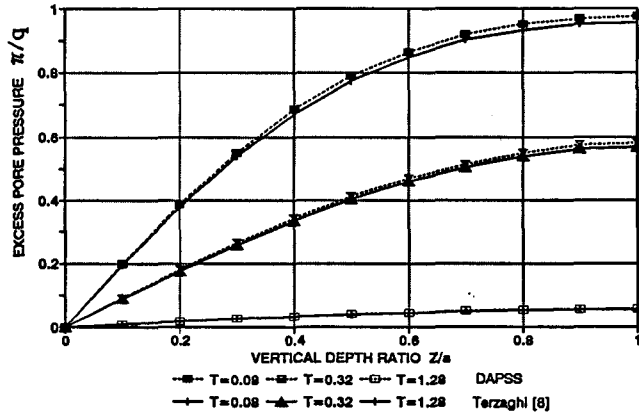


FIG.3 VERTICAL DISTRIBUTION OF EXCESS PORE PRESSURE IN A SINGLE LAYER SYSTEM

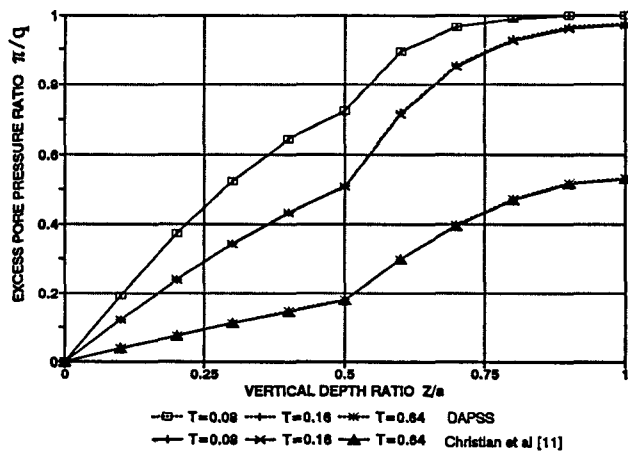


FIG.4 VERTICAL DISTRIBUTION OF EXCESS PORE PRESSURE IN A DOUBLE LAYER SYSTEM