

反復 荷重을 받는 鋼 構造 部材 및 骨組의 彈塑性 性狀에 관한 解析的 研究  
( 報 1 報 解析 手法의 檢討 )  
( An analytical Study on the Elasto-Plastic Behaviour of Steel  
Structure Member & Frame under Cyclic Load )

\* 김 화 중            \*\* 권 영 환            \*\*\* 박 정 민  
( Kim Wha Jung )    ( Kwun Yeung Whan )    ( Park Jung Min )

Abstract

The purpose of this study is that to develop computer program, which is about to analyze nonlinear behaviour of elastic framed structures include to geometric & material nonlinearity, and to formulate between stress-strain relationship. In order to exemplify the efficiency of this program, a few analytical results have been obtained on : (1) nonlinear behaviour of beam which is subject to vertical force (2) nonlinear behaviour of portal frame which is subject to vertical & horizontal force.

1 序論

經濟 發展에 基因한 現代 都市의 密集化, 多技能化에 따라서 都市 周邊에 高層 建物の 建立이 늘어나고 있다. 一般적으로 高層 建物の 建立에 있어서의 構造 形式은 鐵筋 콘크리트組와 鐵骨組로 大別될 수 있으나 20層 以上の 境遇에 經濟性 問題를 考慮해서 鐵骨組를 採擇하는 傾向이 濃厚하다. 따라서 最近 先進 各國에서는 鐵骨組 高層 빌딩의 出現과 함께 安全性을 確保하기 위한 鋼 部材의 彈塑性 範圍의 性狀에 관한 研究가 活潑하게 行해지고 있다.

最近 우리도 이런 실정을 감안해서 늦은 감은 있으나 鋼 構造 學會를 設立하고 關心있는 學者들 에 의해 多數의 研究 論文들이 發表되고 있다 하겠다.

本 論文은 이러한 研究 成果를 基礎로 해서 最近 특히 발달한 matrix 代數를 利用해서 増分 變位 들 포텐셜 에너지의 停留原理에 基礎 變形 에너지를 전부 數學 積分에 의해서 計算하는 것에 의해서 決定하는 方法을 提案하고 그것을 利用하여 鐵骨 라멘 骨組의 座屈 및 座屈 後의 舉動 및 反復 荷重을 받는 라멘 骨組의 彈塑性 舉動에 대해 검토하여 終局 限界 狀態 設計法 開發에 必要한 基本 資料를 提示하는 것을 목적으로 하는 초보적 단계의 연구이다.

2 解析上的 假定

2-1 基本 假定

本 解析을 행하는데 있어서 基本的인 假定은 다음과 같다.

- 1). 部材는 모두 線材로 해서 取扱한다.
- 2). 斷面은 變形後도 平面을 維持하는 것으로 한다.
- 3). 軸 方向 變形 및 휨 變形을 考慮하고 剪斷 變形은 無視한다.
- 4). 材料의 應力 - 變形 關係는 그림 2-2에 나타내는 것을 利用한다.

\* 경북 대학교 건축 공학과 조교수  
\*\* 경북 대학교 건축 공학과 부교수  
\*\*\* 경북 대학교 건축 공학과 석사 과정

5). 断面内 應力度 變形度에 대해서는 断面을 細密하게 層上으로 分割하고 그 單位 分割 中에서는 一定하게 한다.

6). 殘留 應力은 考慮하지 않는다.

### 2-2 鐵의 應力 - 變形度 關係의 모델화

有限 要素法에 의한 鋼 構造物의 單調 혹은 反復載荷에서의 彈塑性 舉動을 解析하기 위해서는 鋼材의 應力 變形 關係 혹은 部材의 復原力 變形 關係를 어떤 履歷側으로 모델화 할 必要가 있다. 그 때 解析 對象에 必要한 程度에 따라서 舉動에 影響을 미치는 要因들을 把握 해야만 한다. 따라서 본 논문에서는 塑性域에 미치는 反復荷重을 받는 構造物 및 部材를 解析 對象으로 하기 위해 複雜한 履歷에도 충분히 追跡할 수 있는 應力-變形 關係를 上程 하였다. 本 解析法에 使用하는 鐵의 應力-變形度 關係는 不完全 하지만 現實的인 例에 가깝게 變形 硬化 및 Bauschinger 效果적인 性質을 考慮하여 elastic-plastic-strain hardening 으로 上程하여 解析 하였다. 즉, 그림 2-2에 나타낸 것과 같은 모델을 使用하였다.

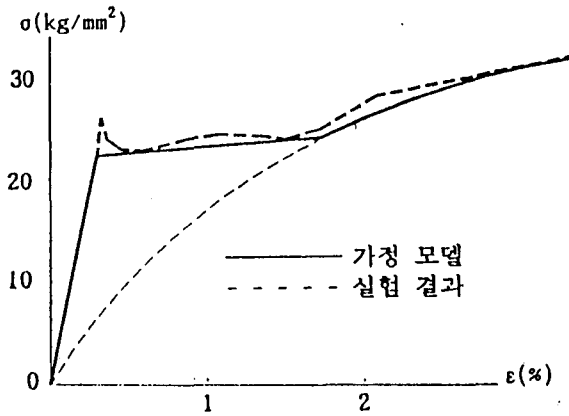


그림 2-1 鐵의 應力 變形度 關係

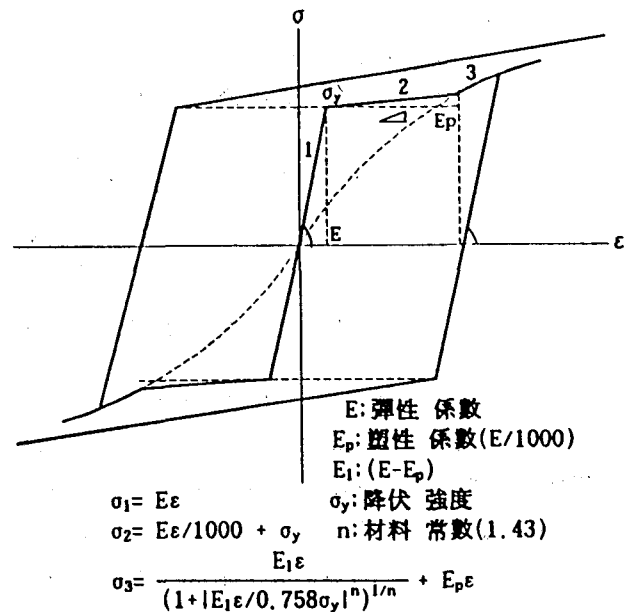


그림 2-2 反復 荷重시 應力 變形度 關係 모델

### 3 數值 解析法

#### 3-1 軸 荷重과 모멘트를 받는 部材의 剛性 매트릭스와 耐力벡터

##### 3-1-1 要素 内部의 變位增분과 變形度 증분

本 解析法에서는 한 部材를 5~20程度로 分割하는 것을 前提로 軸 方向에 대해서 1次, 軸에 直角 方向에 대해서는 3次的 多項式을 增分變位 函數로 利用했다.

다시 말해 要素 m에 있어서, x軸 方向 增分 變位를  $\Delta_x U$ , y軸 方向 增分 變位를  $\Delta_y V$ , x軸과 이루는 角度 增분을  $\Delta_\theta$ 라 하면, 要素의 增分 變位 벡터  $\Delta u$ 와 未定係數 벡터  $a$ 의 關係는 다음과 같이 간략히 表示할 수 있다.

$$\text{즉, } \Delta_x U = T a \text{ -----(3-1)}$$

平面 保持 假定에서 要素內 軸 方向 變形 增분  $\Delta\epsilon_x$ 는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\Delta\epsilon_x = \Delta\epsilon_0 - \Delta\phi y \text{ -----(3-2)}$$

여기서  $\Delta\epsilon_0$ : 中心軸 變形 增분     $\Delta\phi$ : 曲率 增분     $y$ : 中心軸에서의 距離

中心軸의 縱變形 増分은 幾何學的 非線形을 考慮하고 細密한 要素 分割을 行하여 1 step마다 各 要素의 局部座標를 移動하는 것으로 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \epsilon_0 = \frac{d\Delta u}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right) \text{-----}(3-3)$$

曲率에 대해서는 하나의 部材를 細密한 要素로 分割하는 것으로 즉, 剛性域에 들어갈 可能性을 考慮하여 分割을 行하는 것으로 (3-4)式을 利用한다.

$$\Delta \phi = \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \text{-----}(3-4)$$

따라서  $\Delta \epsilon_x$ 는 (3-5)式으로 나타낼 수 있다.

$$\Delta \epsilon_x = \frac{d\Delta u}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} y \text{-----}(3-5)$$

### 3-1-2 變形度 에너지 増分の 計算

1個의 要素 m에 貯藏된 變形度 에너지 増分  $\Delta u$ 는 이 step에서 Iteration의 計算을 行하기 前에 初期應力에 의해 생기는  $\Delta u_1$ 과 應力度 増分에 의해 생기는  $\Delta u_2$ 의 總으로 다음과 같이 나타낸다.

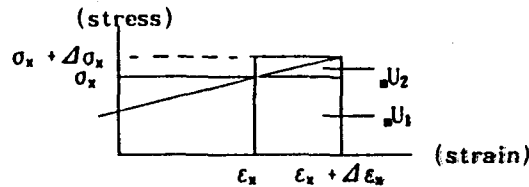


그림 3-1 要素에 貯藏된 變形度 에너지

$$U = U_1 + U_2$$

$$= \iiint_V \sigma_x \Delta \epsilon_x dx dy dz + \iiint_V 1/2 E (\Delta \epsilon_x)^2 dx dy dz \text{-----}(3-6)$$

$U_1$  : 初期 應力에 의한것  $U_2$  : 増分 應力에 의한것

面積에 대한 積分 要素의 兩端에서 假定(5)에 敘述한 方法에 의해 計算하고 要素 内部에서는 材軸 方向으로 線形으로 變化하고 있는 것으로 全體 積分 計算을 行한다.

以上에서 計算한  $\Delta u$ 의 總은 1個의 要素에 貯藏된 變形度 에너지 増분이 된다.

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta u^T ( {}^m T^{-1T} {}^m a_1 - {}^m T^{-1T} {}^m a_2 ) \\ &= - \frac{1}{2} \Delta u^T ( {}^m T^{-1T} {}^m A_1 {}^m T^{-1} + {}^m T^{-1T} {}^m A_2 {}^m T^{-1} - {}^m T^{-1T} {}^m A_3 {}^m T^{-1} + {}^m T^{-1T} {}^m A_4 {}^m T^{-1} ) \Delta u \\ &= \Delta u^T {}^m f_{in} - \frac{1}{2} \Delta u^T {}^m k \Delta u \text{-----}(3-7) \end{aligned}$$

$$\text{여기서 } {}^m f_{in} = {}^m T^{-1T} {}^m a_1 - {}^m T^{-1T} {}^m a_2 \text{-----}(3-8)$$

要素 m의 内部 應力 組合을 위해 必要한 局部 座標에 있어서의 節點 耐力벡터

$$\begin{aligned} {}^m k &= {}^m T^{-1T} {}^m A_1 {}^m T^{-1} + {}^m T^{-1T} {}^m A_2 {}^m T^{-1} - {}^m T^{-1T} {}^m A_3 {}^m T^{-1} + {}^m T^{-1T} {}^m A_4 {}^m T^{-1} \\ &= {}^m T^{-1T} ( {}^m A_1 + {}^m A_2 - {}^m A_3 + {}^m A_4 ) {}^m T^{-1} \text{-----}(3-9) \end{aligned}$$

: 要素 m의 局部 座標에 있어서의 剛性 매트릭스

### 3-1-3 變位の 微分과 未定係數 벡터

變形度 에너지 増分과 必要한 要素 内部의 變形度を 구하고 x軸上에 대해  $d\Delta u/dx$ ,  $d\Delta v/dx$ ,  $d\Delta u/dx$  등의 變位の 導函數가 必要하다.

이것의 導函數는 變位函數를 微分하는 것에 의해 구할수 있다. 또한 節點變位 變形増分  $\Delta \epsilon_x$ 는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\Delta \epsilon_x = \frac{d \Delta u}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{d \Delta v}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} y \quad \text{-----(3-10)}$$

### 3-4 聯立 1次 方程式의 誘導

1개의 要素 m에 貯藏된 變形度 에너지 増分  $\Delta u$ 는 앞에서 說明하였고 要素의 座標系에 대한 變位 増分の 2次 形式으로 다음式으로 나타낼 수 있다.

$$\Delta u = 1/2 \Delta u^T K \Delta u + \Delta u^T f_{in} \quad \text{-----(3-11)}$$

여기서  $\Delta u$  : 要素의 座標系에 대한 節點變位 増分 벡터의 全體 벡터

$\Delta u^T$  :  $\Delta u$ 의 轉置 벡터      $K$  : 要素의 剛性 매트릭스

$f_{in}$  : 増分 計算前의 內部應力에 대해 필요한 要素의 節點 內力 벡터

要素 m의 座標系에 대한 變位 増分  $\Delta u$ 는 全 構造體의 絶對 座標系에 대한 變位 増分을 使用하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta u = L^{-1} \Delta u_G \quad \text{-----(3-12)}$$

각 要素에 貯藏된 變形度 에너지의 總 合에서 全 構造體가 貯藏하는 變形度 에너지 増分  $rU$ 가 求해진다.

$$rU = \Delta u_G^T f_{in} + 1/2 \Delta u_G^T K \Delta u_G \quad \text{-----(3-13)}$$

여기서  $\Delta u_G$  : 全 構造體의 global座標에 있어서의 増分 變位 벡터

$$f_{in} = \sum_{i=1}^n L^{-1} f_{in} \quad \text{-----(3-14)}$$

全 構造體의 內部 應力 組合을 위해 필요한 節點 內力 벡터

$$K = \sum_{i=1}^n L^{-iT} K L^{-1} \quad \text{-----(3-15)}$$

全 構造體의 剛性 매트릭스

한편 外力의 포텐셜 에너지 増分  $rW$ 는 다음 式으로 表示한다.

$$rW = \Delta u_G^T f_{ex} \quad \text{-----(3-16)}$$

여기서  $f_{ex}$  : 作用하는 全 節點 外力 벡터

變位 増分  $rU$ 가 生긴 後의 포텐셜 에너지 増分  $\Delta \Pi$ 는 다음式과 같이  $rU$ 의 2次 形式으로 表示 된다.

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= rU - rW \\ &= \Delta u_G^T f_{in} + 1/2 \Delta u_G^T K \Delta u_G - \Delta u_G^T f_{ex} \quad \text{-----(3-17)} \end{aligned}$$

組合狀態에 있어서 포텐셜 에너지는 停留하기 때문에 變分 原理를 利用해서  $\Delta u_G$ 가 求해진다.

즉, (3-17)式을 2次 形式의 變分 原理를 利用하여 任意의  $\delta \Delta u$ 에 대하여  $\delta \Delta \Pi = 0$ 이고, 다음 式과 같은 聯立 1次 方程式을 얻을수 있다.

$$K \Delta u_G = f_{in} - f_{ex} = 0 \quad \text{-----(3-18)}$$

이 式에서 1次 聯立 方程式을 풀면  $\Delta u_G$ 를 구할 수 있고, 이  $\Delta u_G$ 를 利用하여 各 節點의 座標를 修正한다.

$$x_i = x_i + \Delta u_G \quad \text{-----(3-19)}$$

$$y_i = y_i + \Delta v_G \quad \text{-----(3-20)}$$

여기서  $\Delta u_G$  : i節點에 대한 増分 變位の X方向 成分

$\Delta v_G$  : i節點에 대한 増分 變位の Y方向 成分

(3-5)式에서 구해진 増分 變形  $\Delta \epsilon_x$ 를 利用하여 各 要素 兩端의 變形 및 應力을 修正하면 1段階 計算이 終了한다.

以上の 計算을 step by step法에 의해 중첩함으로서 소기의 解析이 可能하게 된다. 하지만 여기 서 구해진  $\Delta u_0$ 만큼의 變形이 進行된 狀態에서는 下降域의 進行, 變形에 의한 座標의 變化 등에 의 해 外力과 內力이 반드시 組合하지 않는다. 그래서 同一 境界 條件에서 iteration을 行할 必要가 있다. 따라서 本 解析에서는 Newton-Raphson 法을 iteration 技法으로 使用한다. 또한 수속의 수 령도는  $((f_{in}-f_{ex}) \times (f_{in}-f_{ex})) / (f_{in} \times f_{in}) \leq 10^{-7}$ 으로 했다. 반복 節次는 收束이 滿足될 때까지 繼續 된다. 收束이 될때 部材 各 面은 降伏과 非載荷 變形에 대해 調査된다. 積分點에서 曲率이 計算되고 斷 面上의 各 變形이 計算 된다. 以上 解析 節次에 대해 간략히 살펴 보았다.

#### 4. 解析 結果 및 考察

##### 4-1. 解析 例 1 ( 鐵骨 部材 )

본 研究에 사용된 數值解析 모델은 彈性 係數 30000(ksi), 降伏 強度 36(ksi)인 長方形 斷面을 가진 兩端 고정보와 彈性 係數 1000(ksi), 降伏 強度 1.2(ksi)인 長方形 斷面을 가진 1단 고정 타단 자유 인 캔틸레버보를 上程 하였다. 각각의 解析 모델과 解析 結果를 그림 4-1, 4-2에 나타낸다.

兩端 고정보의 경우 2번 지점에 垂直 荷重을 20kg씩 (이점 載重) 增加시킨 경우와 50kg씩 (일점 載重) 增加시킨 경우 Powell & Mondkar<sup>(4)</sup>의 解析 結果와 비교한 結果 荷重-變位曲線에 약간의 차 이를 보였으나 대체적으로 일치하는 것으로 나타났다.

캔틸레버 보의 경우 2번 지점과 3번 지점에 垂直 荷重을 준 경우 그림 4-2와 같은 荷重-變位 關係를 나타 내었다.

##### 4-2 解析 例 2 ( 鐵骨 라멘 )

解析 대상으로서 彈性 係數 30000(ksi), 降伏 強度 36(ksi)의 H형 斷面을 가진 portal 라멘을 上程 하였다. 解析 대상으로한 모델과 解析 結果를 4-3, 4-4에 나타낸다.

解析 모델 1의 경우 骨組를 이루는 각각의 部材를 4要素로 分割하여 5번과 9번 절점에 100kg의 垂直 荷重과 5번 절점에 垂直 荷重의 1/1000(일점 載重), 1/100(이점 載重)의 水平力을 동시에 준 結果 그림 4-3과 같은 荷重 變位 曲線을 나타냈다. 이러한 結果는 Kuo Mo Hsiao & Fang Yu Hou<sup>(5)</sup>의 解析 結果와 대체적으로 일치 했다.

解析 모델 2의 경우 기둥 部材는 2要素로 보 部材는 5要素로 分割하여 3, 4, 8, 9번 절점에 그림 4-4와 같은 荷重을 가했다. 그 結果를 Peter Arnold<sup>(6)</sup>의 實驗 結果와 비교해 본 결과 대체적으로 일치 했다.

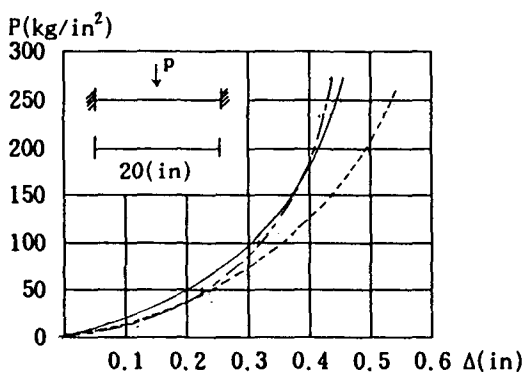


그림 4-1 兩端 고정보의 荷重 變位 關係

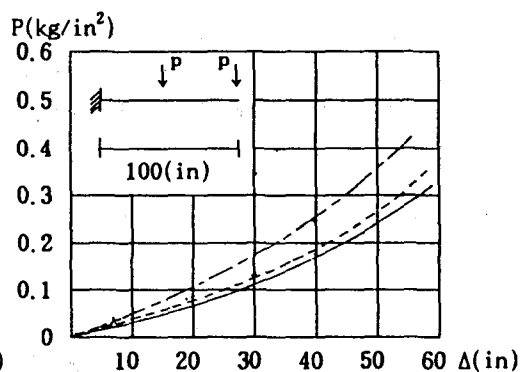


그림 4-2 캔틸레버 보의 荷重 變位 關係

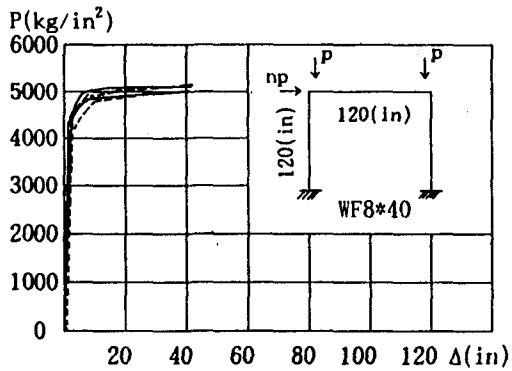


그림 4-3 철골 라멘 (解析 모델 1)

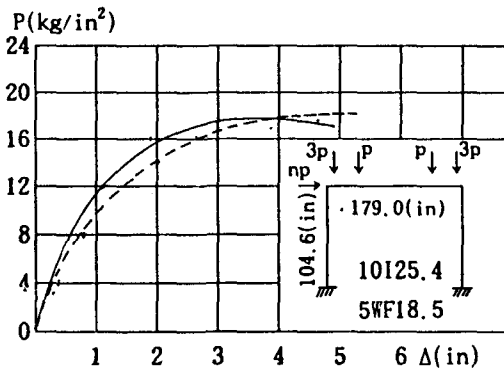


그림 4-4 철골 라멘 (解析 모델 2)

### 5. 結論

본 연구에서는 에너지 정유 원리를 이용하여 복합 비선형을考慮한 平面 라멘의 解析 프로그램을 開發 하였으며 開發한 프로그램으로 4종류의 部材 및 라멘을 解析해 본 結果 다음과 같은 結論을 얻을수 있었다.

1. 材料的 非線形과 幾何學的 非線形을 考慮해 C言語를 使用하여 開發한 프로그램은 單調 增加 荷重과 反復 荷重을 받는 平面 部材나 라멘 解析이 可能 하였다.
2. 본 解析에서는 實驗을 근거로 한 應力-變形 關係 모델을 提示 했다.
3. 본 解析에서 開發한 프로그램으로 鐵骨 部材 및 라멘을 解析하여 既存의 解析 結果 및 實驗 結果와 比較해 본 結果 본 解析에서 開發한 프로그램의 妥當性이 입증 되었다.
5. 본 解析에서 iteration 技法으로 使用한 Newton Raphson法은 塑性域에서 變形 硬化 開始點까지의 變形을 追跡 하는데 상당히 어려움이 많았다. 따라서 향후 과제로 최근 선진 各國에서 많이 연구되고 있는 Arc length Method와 같은 iteration 技法 開發이 필요하다.

\* 본 연구는 1992년도 韓國學術 振興財團의 地方大 育成 學術 研究조성비로 이루어진 것으로 이에 感謝 드립니다.

### 6. 參考 文獻

1. O.C.Zienkiewicz : " The Finite Element Method", 1967, Mcgrow-Hill Co, pp 500-526, 677-757
2. T.Y.Yang : " Finite Element Structural analysis", 1986, Prentice-Hall Inc, pp 110-170
3. 藤本盛久, 和田章 : " 任意形 平面 骨組의 非線形 應力 解析", 昭和 46年, 日本 建築學會 論文 報告集, 189호, pp 59-70
4. D.P.Mondkar & G.H.Powell : " Finite Element analysis of Non-Linear Static and Dynamic response", International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol 11, 1977, pp 499-520
5. Kuo Mo Hsiao & Fang Yu Hou : " Non-Linear Finite Element analysis of elastic frames", Computers & Structures, Vol 26, NO 4, 1987, pp 693-701
6. Peter Arnold & Peter F.Adams : " Strength & Behavior of an Inelastic hybrid frame", ASCE, ST 1, 1968, pp 243-265