

두꺼운 판의 전단 Warping 영향에 대한 연구 On the Effect of Transversal Warping in Thick Plate

이 상 갑* 최 원 준**
Lee, Sang-Gab Choi Won-Joon

ABSTRACT

Approximate Constant Shear Angle Theory is usually used to take a transversal shear deformation of thick plate into consideration, which cannot be effectively considered the influence of transversal warping of cross-section with an increase of thickness. It might be the best way to represent the exact warping of cross-section.

In this study, the derivation of warping function is attempted, and the effect of shear deformation and transversal warping is to be considered through the nonlinear analysis of plate.

1. 서 론

판(Plate)은 구조물의 중요한 요소로서, 이론과 유한요소의 개발은 아직도 계속되고 있고, 앞으로도 개선의 여지가 많은 분야이기도 하다. 지금까지의 연구결과는 크게 나누어 Kirchhoff 이론[1,2]과 Mindlin 이론[3-5]에 근거한 요소들에 관한 것으로, 70년대 이후에는 전단변형을 근사적으로 고려한 Mindlin 이론에 바탕을 둔 요소개발과 해석방법등에 더 많은 연구가 수행되어 왔다[3,6].

복합적층판이나 두꺼운 판일 경우 횡방향의 전단응력과 전단변형률의 분포는 판의 처짐거동에 상당한 영향을 미친다. 전단변형에 의하면 판의 상하면에서는 횡방향의 전단응력이 존재하지 않을 뿐 아니라, 두께 방향으로 포물선의 분포를 나타낸다. 그러나 기존의 Mindlin 이론에 의한 요소들은 이러한 조건을 만족시키지 못하고 있으며, 판이 두꺼워질수록 전단변형에 의한 단면의 전단 Warping의 영향을 효과적으로 나타낼 수가 없다. 국면으로 된 단면의

* 정회원 한국해양대학교 선박공학과 조교수

** 한국해양대학교 선박공학과 석사과정

Warping을 근사적인 평면 단면으로 나타내는 것 보다, 가능한 한 정확하게 표현하는 것이 최선의 방법일 것이다.

두꺼운 보(Beam)의 전단변형에 의한 단면의 전단 Warping에 대해서는 잘 알려져 있고, 또한 이론과 요소도 잘 개발되어 있다[7-11]. Saint Venant 문제의 변위장(Displacement Field)에 대한 정확해(Exact Solution)[12,13]를 Generalized Kinematic Variables에 대하여 선형화 시킴으로서 전단 Warping의 영향을 고려하는 보다 정교한 Kinematic Hypothesis를 얻을 수 있다[11]. 전단 Warping의 항은 회전된 단면에 미소 중첩되어 단면의 Warping을 나타낸다. 판에 대해서도 이와같은 선형이론을 변위장에 적용함으로써 단면의 전단변형으로 인한 단면의 전단 Warping을 보다 정확하게 나타낼 수 있을 것이다.

2. 판의 변위장 (Displacement Field of Plate)

Fig. 1 에서와 같이 두께가 h 이고 x_1 - x_2 를 중립면으로 하는 판의 변위장은, 보의 Saint Venant 문제에 대한 정확한 변위장을 Generalized Kinematic Variables에 대하여 선형화 시킴으로서 얻는 Kinematic Hypothesis를 판에 확장하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \bar{u}_i(x_1, x_2) - x_3 \bar{\phi}_i(x_1, x_2) - \kappa \phi(x_3) \bar{\beta}_i(x_1, x_2) \\ u_3(x) &= \bar{u}_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서 Kinematic Variables $\{\bar{u}_i(x_1, x_2), \bar{\phi}_i(x_1, x_2)\}_{i=1,2}$ 는 각각 x_i 축 방향의 평균변위(Mean Displacement)와 x_i 축에 대한 평균회전(Average Rotation)을 나타내는 것으로 식 (2.2)로 정의되고, 도식적으로 Fig.2에서와 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{u}_i(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u_i(x) dx_3, \quad \bar{\phi}_i(x_1, x_2) = -\frac{1}{I} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 u_i(x) dx_3 \quad (2.2)$$

여기서 $I = h^3 / 12$ 이다. 그리고 $\phi(x_3)$ 는 Warping함수로서 식 (2.2)로부터 다음과 같은 조건을 만족하여야 하고, 3차 다항식으로 나타낼 수 있다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \phi(x_3) dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \phi(x_3) dx_3 = 0 \quad (2.3)$$

$$\phi(x_3) = \frac{2}{h^2} x_3^3 - \frac{3}{10} x_3 \quad (2.4)$$

변위장 (2.1)에서 κ 는 전단계수이고, $\beta_i(x_1, x_2)$ 는 Warping에 관련된 Kinematic Variable로서 평균 전단회전(Average Shear Angle)을 나타내고, 상하면 판에서의 두께방향 전단응력이 0 이라는 조건으로부터 다음과 같이 구할 수 있다. 기하학적인 의미는 Fig.2 에서와 같으며, x_1, x_2 방향으로의 Warping은 각각 $\kappa \phi(x_3)\beta_i(x_1, x_2)$ 로 표현될 수 있다.

$$\bar{\beta}_i(x_1, x_2) = \bar{u}_{3,i}(x_1, x_2) - \bar{\phi}_i(x_1, x_2), \quad \kappa = 5 / 6 \quad (2.5)$$

Kinematic Variables $\{\bar{u}_i(x_1, x_2), \bar{\phi}_i(x_1, x_2), \bar{\beta}_i(x_1, x_2)\}_{i=1,2}, \bar{u}_3(x_1, x_2)$ 는 위에서 언급한 물리적인 의미 외에 모두 $x_1 - x_2$ 중립면에서 정의되고, 선형독립변수로 취급함으로써 C_0 연 연속성을 가진 Shape Function을 사용할 수 있다. Kinematic Variables $\{\bar{\beta}_i(x_1, x_2)\}_{i=1,2}$ 항을 제외되면 식 (2.1)은 일반적인 Mindlin 이론에 의한 변위장이 된다.

3. 평형 방정식 (Equations of Equilibrium, Weak Form)

두께가 h 이고 부분적으로 매끈한 경계 $\partial\Omega$ 를 가지는 평면 Ω 인 평판에서, 시간 $t=0$ 일 때 기준상태(Reference Configuration) $B = (0, h) \times \Omega \subset \mathbb{R}^3$ 에서의 좌표계는 X 로 정의하고, 시간 t 에서 현재상태(Current Configuration)의 운동은 x 로 나타낸다. 시간 t 에서의 질점 X_i 의 변형(Deformation Map)은 Lagrangian 수식으로 다음과 같이 표현한다.

$$x = X + u(X) \quad (3.1)$$

여기서 변위 $u(X)$ 는 변위장 (2.1)과 같이 선형으로 주어지고, 변형구배(Deformation Gradient)는 $F = \partial x / \partial X$ 로 정의된다.

Local Form의 평형 방정식을 임의의 경계조건을 만족하는 허용변분 η 에 대하여 다음과 같이 Weak Form으로 표현할 수 있다.

$$G(x, \eta) = \int_B P \cdot \text{GRAD} \eta \, dV - \int_B \rho_0 B \cdot \eta \, dV - \int_B \tau \cdot \eta \, dS \quad (3.2)$$

여기서 P 는 1st Piola-Kirchhoff 응력텐서, $\rho_0 B$ 는 기준상태(Reference Configuration)에서의 밀도이고, B 는 체적력이다. 그리고 τ 는 경계부분 ∂B_t 에서, 변형은 경계부분 ∂B_u 에서 규정되어진다. ($\partial B_u \cup \partial B_t = \partial B$, $\partial B_u \cap \partial B_t = \emptyset$). 편의를 위해 1st Piola-Kirchhoff 응력텐서는 2nd Piola-Kirchhoff 응력텐서, $S = F P$ 로 대체하고, 대응되는 Green-Lagrangian 변형올텐서 $E = \frac{1}{2}(F^t F - 1)$ 를 사용한다. 이 연구에서는 전단 Warping에 대한 기하학적인 면에 관심을 두고 있으므로 재료는 탄성으로 한정한다. 그러므로 식 (3.1)은 기하학적인 비선형을 지니고 있으므로, 다음과 같이 정의된 방향 도함수(Directional Derivative) [15]를 이용하여 식 (3.2)

의 평형방정식을 중간상태(Intermediate Configuration) $\bar{\phi}$ 에서 선형화한다.

$$DG(x, \eta) = \frac{d}{d\varepsilon} [G(x + \varepsilon \Delta)]_{\varepsilon=0} \quad (3.3)$$

$$L[G]_{\bar{\phi}} = \int_B \text{GRAD} \eta [\bar{S} \otimes 1 + \bar{F}^t \frac{\partial \bar{S}}{\partial E} \Big|_{\bar{\phi}} \bar{F}] \text{GRAD}(\Delta) dV + G(\eta, \bar{x}) = 0 \quad (3.4)$$

여기서 Bar는 상태 $\bar{\phi}$ 에서 산정되는 것을 의미하고, Δ 는 변위증분이다. 식 (3.4)의 첫항은 Tangent Stiffness이고 마지막 항은 Out-of-balance Force로서 다음과 같다.

$$G(\eta, \bar{x}) = \int_B \bar{F} \bar{S} \text{GRAD} \eta dV - \int_{\partial B_t} \bar{r} \cdot \eta dS \quad (3.5)$$

4. 유한요소법의 정식화

일반적인 변위 $u(x) = [u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2, \beta_1, \beta_2]^t$ 는 절점변위 U 와 보간함수 $N_i(x)$ 로서 다음과 같이 보간(Interpolate)된다. 여기에서 보간에는 C_0 의 연속성으로 충분하다.

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i(x) U_i \quad (4.1)$$

식 (2.1)과 (4.1)에서 변위의 구배(Displacement Gradient) 아래와 같이 계산된다.

$$\text{GRAD} u(x) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i(x) U_i \quad (4.2)$$

여기에서 B_i 의 열(Rows)은 다음과 같은 방법으로 $\text{GRAD} u$ 의 요소와 대응된다:

$B(1,2,3,4,5,6,7,8,9) \rightarrow \text{GRAD} u(11,12,13,21,22,23,31,32,33)$. 변형구배는 식 (4.2)을 사용하여 구할 수 있고, 결국 증분 절점변위 ΔU 에 대한 다음과 같은 표준적인 이산화 문제(Discrete Problem)로 귀납된다.

$$K_t \Delta U = f_t \quad (4.3)$$

여기에서 Tangent Stiffness Matrix K_t 와 Out-of-balance Force f_t 는 모든 요소의 합이다.

$$K_t = \sum_B B^t [\bar{S} \otimes 1 + \bar{F}^t \Omega_t \bar{F}] dV, \quad f_t = F_t - \sum_B B^t [\bar{F} \bar{S}] dV \quad (4.4)$$

F_i 는 현재의 작용 절점하중 벡터이다.

현재의 연구에서는 8점의 Serendipity 요소를 사용했으며, 두께방향은 Gauss-Lobatto 적분법, 평면에서는 Shear Locking을 방지하기 위하여 Reduced 적분법 (2x2 Gaussian 적분법)을 사용하였다. Gauss-Lobatto 적분법에는 전단 Warping의 향이 없는 요소에는 3점, 있는 요소에는 5점을 사용하였다.

5. 수치해석의 결과

4번 모두 단순지지 또는 고정된 정방형판에 각각 중앙에 작용하는 집중하중과 분포하중이 작용하고 있는 경우에 대하여 계산을 수행하였다. Fig. 3 에서와 같이 대칭임을 감안하여 1/4 분면에 대한 5x5개의 요소를 사용하였다. 지지면에서의 Warping영향을 고찰해 보기 위하여 4번이 고정된 지지조건은 다시 2가지 경우로 분리하여 다루었다. 즉, w/ warping-1은 지지점에서 Warping이 구속되어 있는 경우이고, w/ warping-2는 지지점에서 Warping이 구속되어 있지 않는 경우이다. Fig. 4 와 Table 1은 단순지지, Fig. 5 와 Table 2은 고정되어 있는 경우에 대하여, 각각의 하중조건(집중하중과 분포하중)에 대하여 정규화 된(Normalized) 중앙점의 처짐을 판의 변의 길이에 대한 두께의 비, $h/a(= 0.0 - 0.5)$ 의 함수로, Warping을 고려하지 않은 요소(일반적인 Mindlin 요소)에 대한 Warping을 고려한 요소의 비율로서 대비하여 나타내었다.

일반적으로 두께가 아주 얇을 경우($h/a \approx 0.01$)에는 모든 경우에서 정확해[14]와 잘 일치하고 있으며, 두께가 두꺼워 질 수록 Warping을 고려한 요소의 처짐이 Mindlin 요소에 비해 커짐을 알 수 있다. 대체적으로 집중하중에 비하여 분포하중을 받는 경우의 비율이 조금 더 크다는 것을 알 수 있다. 그리고 집중하중이 작용하는 경우 두께가 두꺼워 질 수록 Warping을 고려한 요소에 의한 처짐의 증가 비율이 둔화되는 경향이 있다. 또한 4번이 고정되어 있는 경우가 단순지지되어 있는 경우보다 대체적으로 처짐의 증가 비율이 높고, 지지면에 Warping이 구속되지 않는 경우가 더 높음을 알 수 있다.

이러한 사실에서 분포하중에 의한 균일한 처짐이 집중하중에 의한 중앙에 치우친 처짐분포보다 단면의 Warping이 면 전체에 고르게 분포되어 있음을 추측케 한다. 지지면에서의 Warping의 구속은 지지면 부근의 Warping을 억제하는 역할을 하는 것으로, 특히 Fig. 5(b)와 Table 2(b)에서 보는 바와 같이 분포하중일 때는 이러한 현상이 두드러짐을 볼 수 있다.

6. 결 언

예상했던 대로 변의 길이에 대한 상대적인 두께가 두꺼워 질 수록 Warping의 영향이 커짐을 알 수 있다. 그리고 이 연구에서 제안한 전단변형에 의한 전단 Warping을 판의 단면의 평균 회전엔 미소 중첩한 변위장은 두꺼운 판의 해석에 바람직 한 것으로 사료된다.

7. 참고문헌

- [1] O.C. Zienkiewicz, *The finite element method*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [2] R.D. Cook, *Concepts and applications of finite element analysis*, Wiley, New York, 1974.
- [3] T.J.R. Hughes, M. Cohen and M. Haroun, "Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates," *Nuclear Engng Design*, Vol. 46, pp. 203-222, 1978.
- [4] A. Pica, R.D. Wood and E. Hinton, "Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a mindlin theory," *Computers & Structures*, Vol. 11, pp. 203-215, 1980.
- [5] A. Pica and R.D. Wood, "Postbuckling behaviour of plates and shells using a mindlin shallow formulation," *Computers & Structures*, Vol. 12, pp. 759-768, 1980.
- [6] T.J.R. Hughes and M. Cohen, "The Heterosis finite element for plate bending," *Computers & Structures*, Vol. 9, pp. 445-450, 1978.
- [7] G.R. Cowper, "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 33, No.2, pp. 335-340, 1966.
- [8] K.D. Hjelmstad, "Warping effects in transverse bending of thin-walled beams," *ASCE J. Engng. Mech.*, Vol. 113 No. 6, pp. 907-924, 1987.
- [9] S.G. Lee, "Cyclic lateral-torsional buckling of short I-beams," Ph.D. Thesis, Dept. of Civil Engng., University of Illinois at Urbana-Champaign, 1990.
- [10] J.A. Simo, K.D. Hjelmstad and R.L. Taylor, "Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 49, pp. 221-245, 1984.
- [11] J.A. Simo, "A consistent formulation of nonlinear theories of elastic beams and plates," Report No. UCB/SESM-82/06, University of California, Berkeley, 1982.
- [12] A.E.H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dove Publication, New York, 1944.
- [13] I.S. Sokolnikoff, *Mathematical theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1956.

Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 49, pp. 221-245, 1984.

[14] S.P. Timoshenko and S.W. Krieger, *Theory of plates and shells*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1982

[15] P.M. Pinsky, R.L. Taylor and K.S.Pister, "Finite deformation of elastic beams," in *Proceeding IUTAM Symp. on Variational Methods in Mechanics of Solids*(S. Nemat-Nasser & K. Washizu, eds.) Pergmon Press, pp.115-120, 1980

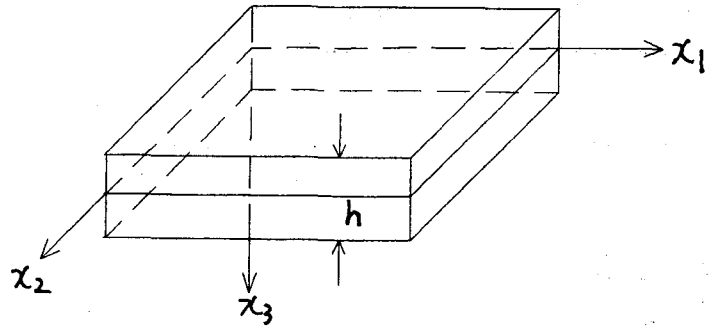


Fig.1. Coordinate system of a rectangular plate

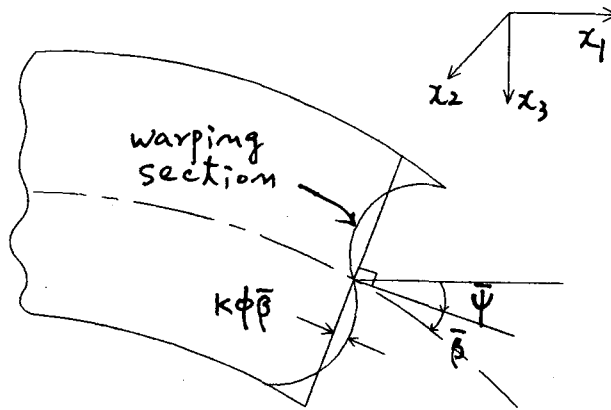


Fig.2. Geometry of warping section

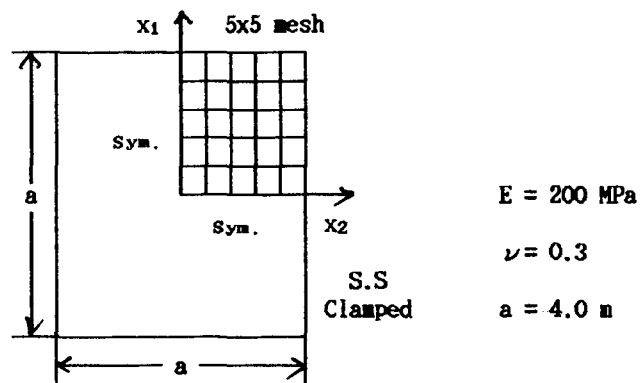


Fig.3. Boundary conditions and material properties

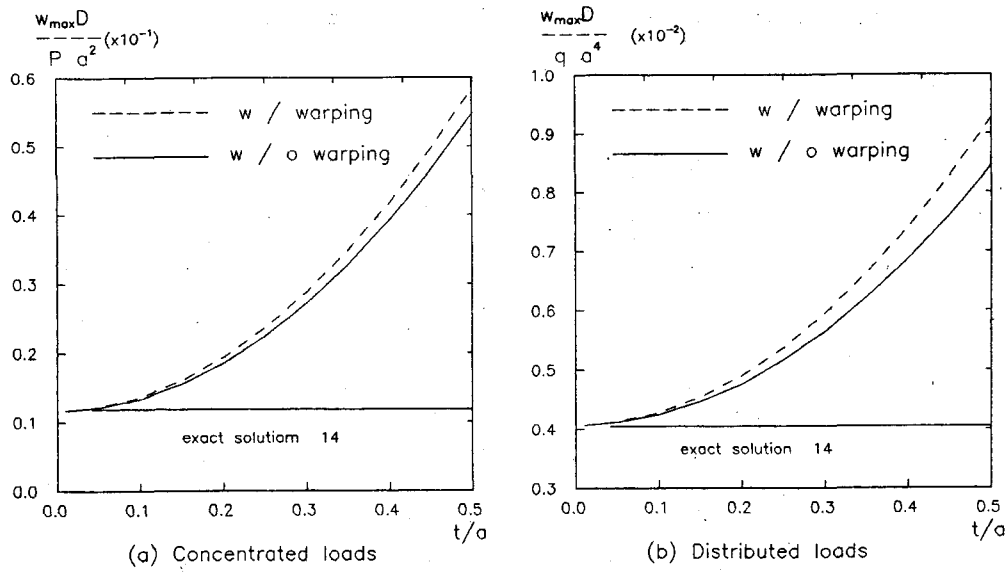


Fig.4. Midpoint deflection of a simple supported rectangular plate

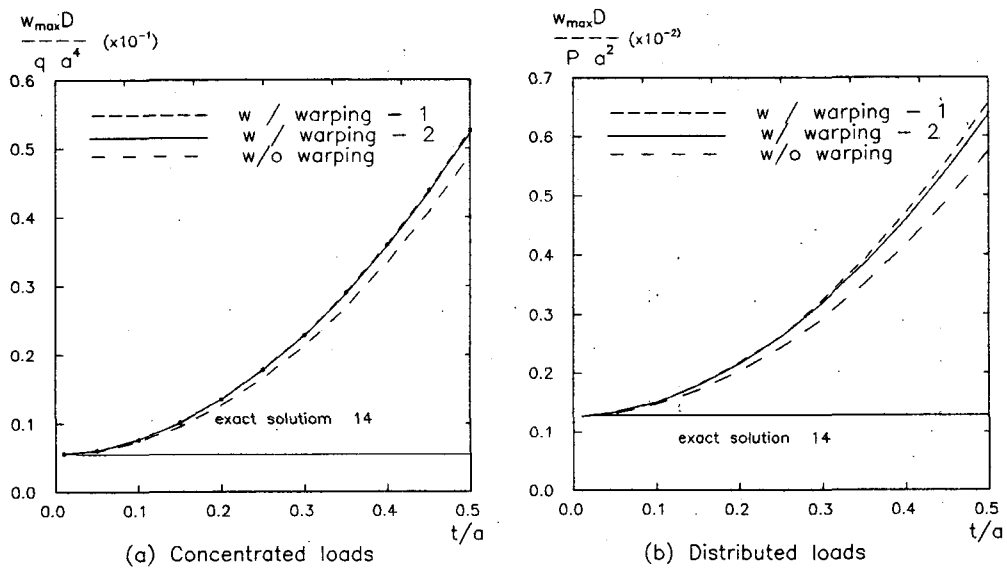


Fig.5. Midpoint deflection of a clamped rectangular plate

t/a	w/o warping	w/ warping	%
0.01	0.116(10 ⁻¹)	0.116(10 ⁻¹)	0.03
0.05	0.120	0.121	0.58
0.10	0.133	0.136	1.95
0.15	0.155	0.160	3.36
0.20	0.185	0.193	4.54
0.25	0.224	0.236	5.45
0.30	0.271	0.288	6.05
0.35	0.327	0.348	6.30
0.40	0.392	0.418	6.53
0.45	0.465	0.496	6.60
0.50	0.547	0.583	6.56

(a) Concentrated load

t/a	w/o warping	w/ warping	%
0.01	0.406(10 ⁻²)	0.407(10 ⁻²)	0.02
0.05	0.411	0.412	0.21
0.10	0.424	0.427	0.13
0.15	0.446	0.454	1.76
0.20	0.476	0.490	2.91
0.25	0.516	0.537	4.17
0.30	0.564	0.595	5.46
0.35	0.621	0.663	6.69
0.40	0.687	0.740	7.81
0.45	0.687	0.740	7.81
0.50	0.845	0.926	9.67

(b) Distributed load

Table 1. Midpoint deflection of a simple supported rectangular plate

t/a	w/o warping (10 ⁻¹)	w/ warping (10 ⁻¹)			
		1	%	2	%
0.01	0.056	0.056	0.18	0.056	0.07
0.05	0.061	0.061	1.32	0.061	1.27
0.10	0.074	0.076	3.56	0.077	3.61
0.15	0.096	0.101	5.42	0.101	5.54
0.20	0.127	0.135	6.64	0.135	6.77
0.25	0.166	0.178	7.18	0.178	7.41
0.30	0.214	0.229	7.35	0.307	7.68
0.35	0.270	0.290	7.34	0.291	7.75
0.40	0.335	0.360	7.00	0.360	7.68
0.45	0.408	0.437	6.98	0.439	7.53
0.50	0.490	0.523	6.75	0.526	7.33

(a) Concentrated load

t/a	w/o warping (10 ⁻²)	w/ warping (10 ⁻²)			
		1	%	2	%
0.01	0.127	0.127	0.03	0.127	0.04
0.05	0.132	0.133	0.75	0.133	0.77
0.10	0.147	0.150	2.45	0.150	2.56
0.15	0.170	0.178	4.43	0.179	4.88
0.20	0.203	0.215	6.23	0.217	7.08
0.25	0.243	0.262	7.76	0.262	9.04
0.30	0.293	0.319	8.92	0.324	10.7
0.35	0.350	0.384	9.75	0.392	11.9
0.40	0.417	0.459	10.3	0.471	12.9
0.45	0.492	0.544	10.6	0.559	13.7
0.50	0.575	0.637	10.7	0.657	14.2

(b) Distributed load

Table 2. Midpoint deflection of a clamped rectangular plate