한국전산구조공학회
1992년도 봄학술발표회 논문집

h-법에 의한 순응형 유한요소 재분할에 관한 연구

A Study on Adaptive Mesh Generation for the Finite Element Method using h-Method

장 창 두* , 김 병 일
Jang, Chang Doo , Kim, Byeong Il

Abstract

This paper proposes a method of h-type adaptive mesh generation for the finite element analysis of two dimensional elasticity problem. The error energy norm of a posteriori error estimation is difined based on the complementary energy of each element.

Computer codes are developed and some examples are investigated. It is shown that the approach to the optimized mesh in this paper is effective and useful.

1. 서론

유한 요소 해석법은 공학적 해석에 있어서 널리 사용되어온 방법중 하나로 최근 컴퓨터의 빠른 발전으로 인하여 그 중요성이 매우 증가하고 있다. 이러한 유한 요소 해석에서 요소 분할은 해석의 성공 여부를 좌우하는 중요한 인자이므로 좋은 해석 결과를 얻기 위해서는 가장 적절한 요소 분할이 필수적이다. 그러나 종래에는 대부분 해석자의 경험, 직감, 추측 등에 의존하고있으며, 통상 해석자는 초기 요소 분할에 의한 계산 결과를 보고 그것이 합리적이 라고 볼수 없는 경우는 요소분할을 다시해서 곧바로 재계산하지만 이는 지루하고 힘든 작업이며, 또한 새로운 mesh 가 충분히 정확한 해를 준다는 보장이 없으므로 전적으로 새로운 요소 data 를 준비하는 일은 매우 비경제적이고 비능률적인 작업이 된다.

따라서 근년에 수치해의 좋고 나쁨의 판정및 그것에 기초하는 요소 재분할을 컴퓨터가 자동적으로 수행하도록하는 adaptive mesh refinement 분야가 큰 진전을 보이고 있다. [1-6]

adaptive method 는 크게 두 단계로 나눌 수 있는데, 초기의 요소 분할에 의해 얻어지는 수치해의 좋고 나쁨의 판정 즉 사후의 오차 평가와, 오차 평가에 기초한 요소 재분할이다. [7-11]

* 정 회원, 서울대학교 조선 해양 공학과 교수

본 논문에서는 사후의 오차 평가의 기준으로는 미소 요소에서 complementary energy 가 연속이 라는 사실에 근거하여 인접 요소간의 complementary energy 의 차이를 error norm 으로 정의 하였고, 요소 재분할법으로는 오차가 큰 요소를 세분하여 요소 크기를 작게하는 h-법을 이용하였다.

이러한 방법을 이용하여 2 차원 탄성 해석을 수행하여 adaptive method 에 의한 결과와 균일 분할 요소에 의한 결과 [12,13] 를 비교했을 때 adaptive method 에 의한 것이 훨씬 좋은 결과를 내고 있다. 또한 adaptive method 는 초기 분할 요소 수가 작기 때문에 data 작업이 극히 용이하다.

2. ADAPTIVE METHOD

adaptive method 는 Fig.1 에 나타난 것과 같이 설명되는데 이는 크게 두 단계로 나눌 수 있다. 제 1 단계는 초기의 요소 분할에 의해 얻어지는 수치해의 좋고 나쁨의 판정 즉 사후의 오차 평가 (A posteriori error estimation) 이다. 여기에는 두 종류의 기본적 방법이 있다. 그 하나는 Babuska 와 Rheinboldt [3-6] 에 의한 선형 타원형 방정식에 대하여 최초로 도입된 잔차 평가 (residual estimation) 방법이고, 다른 하나는 Diaz, Kikuchi 및 Tayler [7,8] 에 의해 제안된 내삽 오차평가 (interpolation error estimation) 방법이다.

전자에서는 (1) 식으로 주어진 미분 방정식의 유한 요소해 u_n 에 대응되는 (2) 식으로 정의되는 잔차를 고려하고,

$$L\,u = f \qquad (1)$$

$$r = L\,u_n - f \qquad (2)$$

후자는 엄밀해 u 와 각 절점에서 엄밀해와 일치하는 유한 요소 내삽 함수 u_I 에 대응되는 (3) 식으로 정의되는 내삽 오차를 고려한다.

$$e = u - u_I \qquad (3)$$

이 오차 함수에 대응되는 유한 요소 영역 내에서의 평균적인 오차의 척도로서 적당한 norm 을 정의한다. 예컨데 일차원 요소 영역 Ω 에서 내삽

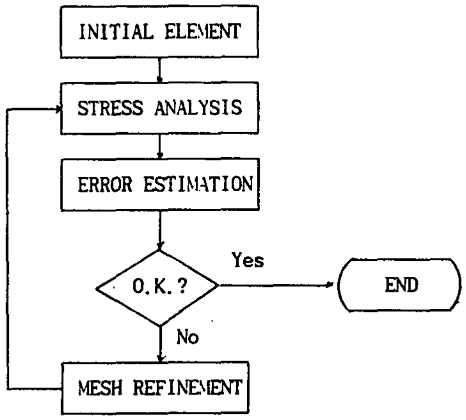

Fig.1 Flow of adaptive mesh generation

오차의 norm 은 (4) 식으로 정의한다.

$$\| e \| = \left(\int a(x)e'^2 + b(x)e^2 \, dx \right)^{1/2} \qquad (4)$$

잔차 평가 방법은 비선형 문제에의 확장, 적절한 norm 의 선택에 어려움이 있다고 말할 수 있고 내삽 오차 평가 방법은 개념적으로는 단순하지만 고차 미계수 평가를 위해서는 정확한 postprocessing 연산을 필요로 한다.

제 2 단계는 오차 평가에 기초한 요소 재분할이며 여기에는 세 종류의 방법이 있는데, 이는 Fig.2 에서 보는 바와 같이 요소 수를 고정하고 절점위치를 이동 (relocation) 해서 오차를 균일하게 분포시키는 r-법, 오차가 큰 요소를 세분하여 요소 크기 (h) 를 작게 하는 h-법, 요소 분할 그 자체는 고정하고 오차가 큰 요소의 내삽 다항식의 차수 (p) 를 올리는 p-법 등이 있으며, 그 밖에 이것들을 조합해서 사용하는 방법도 연구되고 있다.

r-법의 특징은 각 요소 별로 오차가 균일하게 분포되도록 절점을 이동 시킴으로 동일 요소 에서는 가장 작은 오차가 나오게 되며 요소수의 증가가 없으므로 해석중 자유도의 증가가 없는 반면 초기 요소 분할에 한계가 존재하며 해가 참값에 접근하는 정도도 초기 요소 수에 의해 제한된다.

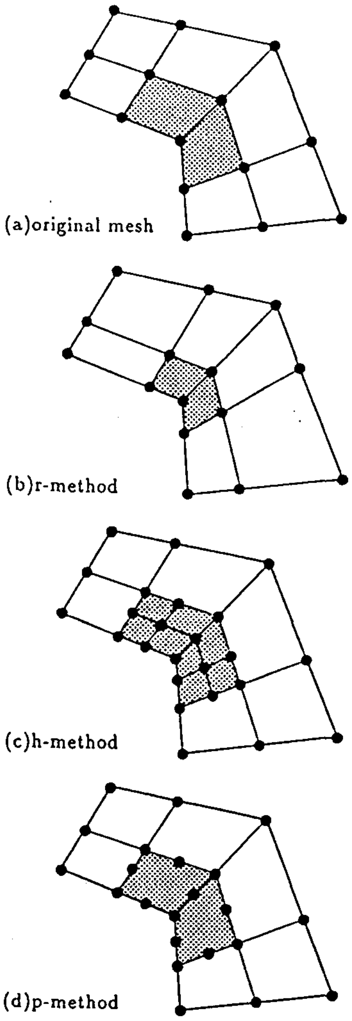

Fig.2 Adaptive mesh generation

h-법은 요소의 크기를 줄여서 재분할 함으로 초기에는 적은 수의 요소 분할로도 적용 가능하므로 초기 데이타 작업이 용이하고 참값에 가장 바르게 접근하며 가장 근사치를 구해낼 수 있다. 반면 요소수 증가에 따른 자유도 증가를 감수해야하며 프로그램 작성시 경계 조건에 주의 해야 한다.

p-법은 요소 분할은 고정하고 특정 요소의 차수를 높여감으로써 오차를 줄여 가는 방법으므로 기존 유한 요소법 코드를 사용할 수 있어 적용이 쉬운 반면 복수의 유한 요소 모델이 필요하며 해에 접근하는 정도가 초기 요소 분할에도 밀접한 관계가 있으므로 초기 데이타 작성 시 주의 해야 한다.

이러한 각 방법들에는 각기 장단점이 있으므로 각 방법을 혼용하여 사용함으로써 서로의 단점을 극복하고 장점을 살릴 수 있다. 최근 이에 대한 연구가 활발히 진행 중이다.

3. 사후의 오차 평가와 요소 재분할

사후의 오차 평가와 요소 재분할은 adaptive method 에서 가장 중요한 두가지 내용으로 그 개요는 2 장에서 설명하였으며, 본 논문에서 적용한 방법으로는 사후 오차 평가에 있어서 오차는 인접 요소 간의 complementary energy 차이로 정의하였는데 이는 미소 요소에서는 complementary energy 가 연속적이라는 사실에 근거하고 있다.

각 요소의 complementary energy E_i 는 (5) 식과 같이 표현된다.

$$E_i = \left(\int \{\sigma\}^T [D]^{-1} \{\sigma\} \, d\Omega \right)^{1/2} \qquad (5)$$

여기서 [D] 는 elasticity matrix

이제 각 요소의 오차는 (6) 식과 같이 표시된다.

$$ERROR_i = \left(\sum_{j=1}^{n} (E_i - E_j)^2 \right) / n \qquad (6)$$

여기서 n 은 인접 요소의 수

요소 분할에 있어서는 h-법의 한가지 방법으로서 3 절에서 구한 $ERROR_i$ 를 크기순으로 나열하여 요소의 분할 정도를 결정한다. 분할 정도는 $ERROR_i$ 분포의 표준편차에 따라 Fig.3 와 같이 셋으로 나눈다.

분할의 구체적인 방법은 (a) 는 요소중 가장 큰 변의 중점 M1 을 새로운 node 로 만들고 반대편 꼭지점과 이음으로써 새로운 변을 만들어 두개의 새로운 요소로 나뉘게 된다. (b) 는 (a) 를 수행한 다음 두번째로 큰 변의 중점 M2 를 새로운 node 로 잡고 M1 과 M2 를 이음으로써 세개의

새로운 요소가 생기게 된다. (c) 는 (b) 를 수행한 다음 마지막으로 가장 작은 변의 중점 M3 를 새로운 node 로 잡고 M1 과 M2 를 이음으로써 새로운 변이 생기고 네개의 새로운 요소로 나뉘게 된다.

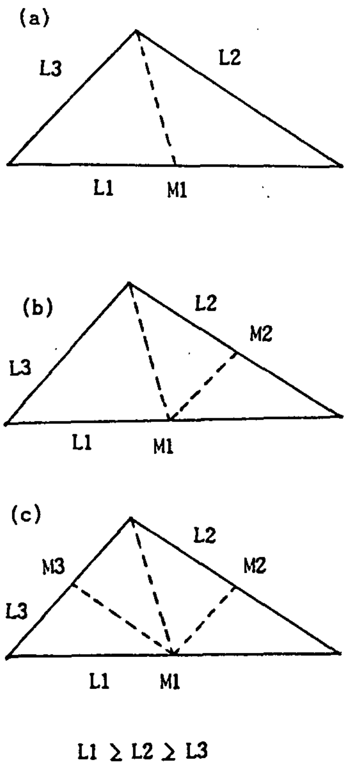

Fig.3 Three type of mesh division

4. 수치 계산 예

수치 계산 예로는 외팔보와 단순지지보에 대한 2 차원 탄성 해석을 수행하였다. 초기 경계 조건과 요소 분할은 Fig.4 와 Fig.6 에 나타나 있고 요소 재분할 진행 과정은 Fig.5, Fig.7 과 같이 나타났다.

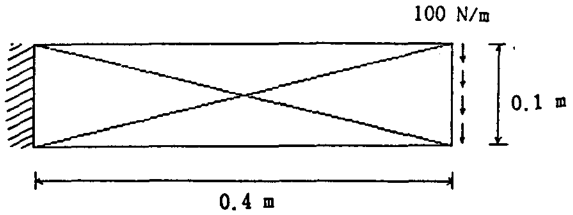

Fig.4 Mesh division and boundary condition of clamped deep beam

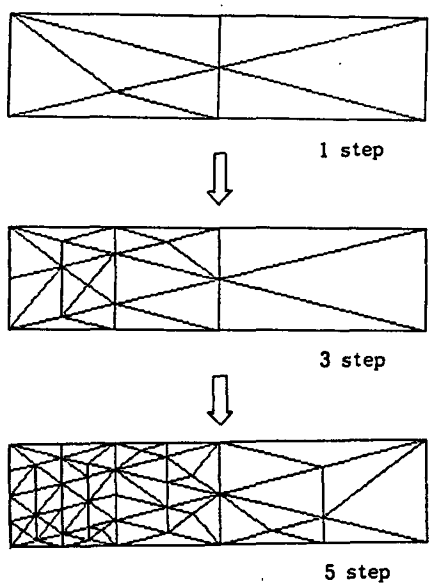

Fig.5 Adaptive mesh generation process of clamped deep beam

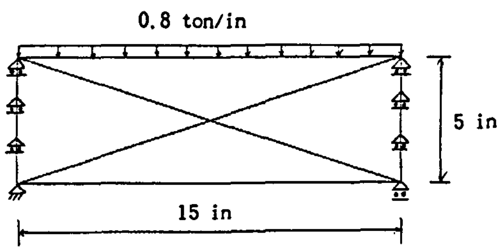

Fig.6 Mesh division and boundary condition of simply supported deep beam

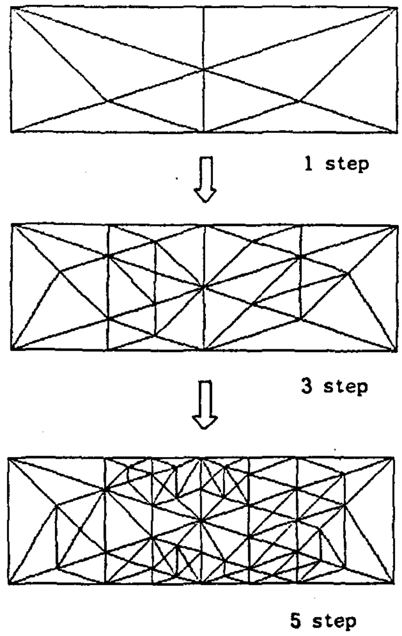

Fig. 7 Adaptive mesh generation process of simply supported deep beam

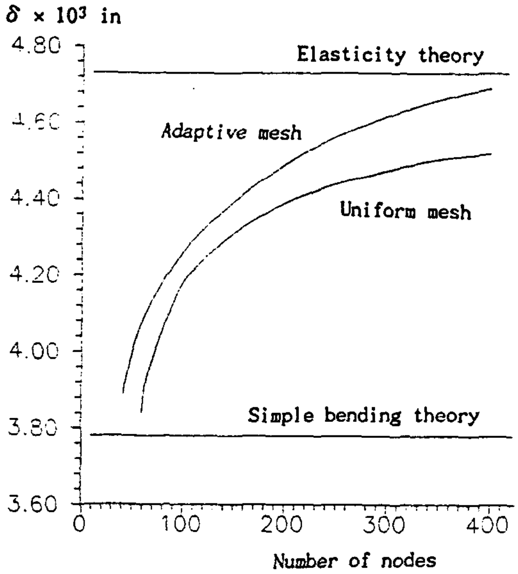

Fig. 8 Deflection at midpoint
of simply supported deep beam

단순지지보에 대한 adaptive method 에 의한 해석결과와 균일 분할 요소의 해석 결과치 비교는 Fig. 8 에 보였으며 adaptive method 에 의한 값이 elasticity theory 의한 값에 훨씬 빨리 접근하고 있음을 보여주고 있다.

5. 결론

본 논문에서는 유한 요소 해석에 있어서 사후 오차 평가를 이용한 순응형 요소 재분할에서 h-법을 이용하여 전산 프로그램을 개발하였는 바 다음과같은 결론을 얻었다.

1) 사후 오차 평가 방법으로서 complementary energy 를 이용하여 그 차이를 error energy norm 으로 정의함으로써 그 유용성을 입증하였다.

2) 요소 재분할 방법으로 요소 크기를 줄여 나가는 h-법에 대한 프로그램을 개발하여 그 적용 가능성을 보여 주었다.

3) 오차 평가 후 이에 따라 요소를 재분할 함으로써 적은 요소 수로도 균등 분할 요소에 비해 보다 정도 높은 결과를 얻을 수 있었다.

4) 각 요소를 초기의 적은 요소 수에서 자동 재분할해 감으로 초기 입력 데이타 작업이 극히 간편하고 용이하다.

5) 차후 r-법, p-법들에 대한 연구와 전산화가 필요하며, 이들과 h-법의 결합에 대한 연구가 요구된다. 그 일부는 현재 진행 중이다.

참고 문헌

1) H. Ohtsubo, M. Kitamura, Element by Element A Posteriori Error Estimation and Improvement of Stress Solution for Two-Dimentional Elastic Problem, Int. J. Num. MethEngng., 29, 233-244, 1990.

2) O. C. Zienkiewicz , J. Z. Zhu, A Simple Error Estimation and Adaptive Procedure for Pratiocal Engineering Analysis, Int. J. Num. Meth. Engng., 24, 337-357, 1987

3) I. Babuska and W. C. Rheinboldt, A

Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Engng., 12, 1597-1615, 1978
4) D. W. Kelly, J. Gago, O. C. Zienkiewicz, I. Babuska, A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method : Part I - Error Analysis, Int. J. Num. Meth. Engng., 19, 1593-1619, 1983.
5) D. W. Kelly, J. Gago, O. C. Zienkiewicz, I. Babuska, A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method : Part II - Adaptive Mesh Refinement, Int. J. Num. Meth. Engng., 19, 1621-1656, 1983.
6) I. Babuska, A. Miller, The Post Processing Approach in the Finite Element Method - Part 3 : A Posteriori Error Estimates and Adaptive Mesh Selection, Int. J. Num. Meth. Engng., 20, 2311-2324, 1984.
7) A. R. Diaz, N. Kikuchi, E. Taylor, A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods, Computer Meth. Appl. Mech. Engng. Vol. 4, 1974.
8) A. R. Diaz, N. Kikuchi, P. Papalambros, E. Taylor, Design of an Optimal Grid for Finite Element Methods, J. Struct. Mech., Vol.11, 1983.
9) 大坪英臣, 有限要素法の最近の動向（その 1）- 事後誤差解析と順應型要素再分割 -, 日本造船學會論文集, 68, 321-32, 1989.
10) H. Ohtsubo, A. Kubota, M. Kitamura, A Study on Adaptive Mesh Generation for the Finite Element Method Using A Posterior Estimated Error, 167, 179-189, 1989.
11) T. Okada, H. Sasajima, I. Neki, Optimum Mesh Generation for the Finite Element Method (1st Report), J.Kansai Soc. N. A., Japan, No.211, March 1989.
12) K. C. Rockey, et al, The Finite Element Method : A Basic Introduction, Crosby Lockwood Staples, 1975.
13) S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970