

고농도부유물의 침전시 계면형성의 기구에 대한 수리동역학적 해석  
(Hydrodynamic Explanation of the Mechanism of Interface Formation for Concentrated Suspensions)

한 무영, Mooyoung Han

경희대학교 토목공학과 조교수, Assistant Professor, Dept. of Civil Eng., KyungHee University

Abstract

In characterizing a suspension, heterogeneity is included onto the previous characterization using solids concentrations and flocculent characteristics, because of its importance in hydrodynamics. The mechanism of interface formation during the sedimentation of concentrated suspension (thickening) is investigated from a microcosm consisting of four particles in a same plane and a smaller particle below. The critical distances after which interface forms are calculated as a function of particle size ratio when the small particle is located in the middle of the square determined by the large particles. The result shows that the critical separation distance increases as the size ratio approaches to one (homogeneous suspension). This conforms to the trend of existing observations that homogeneous suspensions create the solid-liquid interface at much lower concentration (at a larger separation distance) than the heterogeneous suspensions.

1. 서론

고농도부유물의 침전현상은 Thickening(농축)이라 불리우며 이 현상은 자연계(하천, 호수, 해양에서의 토양의 침전이나 구름에서의 수증기 입자의 응집 및 강우)나 공학의 여러 분야(상하수처리, 준설 및 매립, 광산, 화학, 식품)에서 관찰되고 응용이 되어 왔다. 또한 이와같은 자연 현상을 수식으로 표현하고자 순수과학적인 분야에서도(수학, 물리학) 연구의 대상이 되어 왔다. 지금까지 이 현상을 이해하거나 공정에 응용하기 위하여 이론적, 실험적 설명들이 수없이 많이 개발되어 사용되어 왔으나 두 방법의 결과 사이에는 큰 차이가 존재하며 그중 어느것도 Thickening 현상을 만족스럽게 설명할 수가 없었다. 그렇지만 실제로 응용을 하는데 있어서는 몇가지 기준이나 방향이 설정되어 공정을 설계하거나 제어하는데 사용되어 왔다. 그러나 대부분의 방법들은 부유물 자체의 특성은 고려하지 않은채 다만 경계면의 침전속도나 부유물질의 농도(또는 함수비)의 변화와 같은 거시적인(Macroscopic) 입자에만 의존하였기 때문에 부유물의 특성을 설명하는 어떠한 인자도 정량적으로 고려할 수가 없었다.

Stokes의 한개의 구형입자의 침전에 관한 이론적인 연구 이후 최근에는 비로써 두개의 상호작용하는 입자의 침전현상을 수학적으로 설명하는 해법이 개발되었으며(Jeffery and Onishi, 1984). 이 해법을 이용하여 두개의 서로 다른 입자들이 침전할때의 거동이나 입자간에 상호 작용하는 힘이 존재할때 응집의 효율등에 대한 설명이 이루어 졌다(Han and Lawler, 1991). 지금까지 부유물질중의 입자의 침전속도와 관련된 수없이 많은 이론식과 실험식이 발표되었지만, 거의 모든식이 입자의 크기가 같은 부유물에 대해서 만들어 졌고 그나마도 결과가 서로 일치하지 않는다. 따라서 입자의 크기가 서로 다른 부유물질의 침전을 해석할때는 부유물의 비균질성을 전혀 고려하지 않거나 또는 입자의 크기가 서로 같다고 가정하여 Stokes의 공식을 수정하여 사용하여 왔다.

Thickening현상의 특이한 점은 침전하면서 아주 명확한 액체-고체의 경계면을 형성한다는 것이다. 이 현상은 입자의 크기가 같은 부유물에서나 크기가 서로 다른 부유물에서나 관찰할 수 있다. 즉, 이 때에는 경계면에 있는 모든 크기의 입자들이 같은 속도로 침전한다는 것을 말하며 특히 비균질한 부유물에 있어서는 작은 입자와 큰 입자가 같은 속도로 침전한다는 것을 말한다. 아직까지 이 현상에 대한 이론적인 설명은 없었다.

본고에서는 1)부유물을 분류할때 입자의 크기의 영향을 추가하고, 2)두개의 입자의 운동을 설명하는 수리동역학적 이론으로부터 경계면이 형성되는 이유를 설명하고, 3)이 방법에 의해 기존의 실험결과를 설명할 수 있다는 것을 보이고자 한다.

2. 부유물의 분류

Fitch(1962)는 Fig. 1과 같이 부유물의 침전성질이 다른

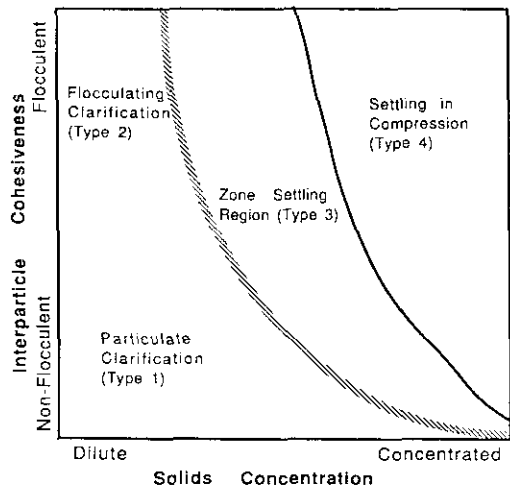


Fig. 1 침전의 형태의 분류(Fitch, 1962)

것을 부유물의 농도와 응집성의 두가지 성질을 이용하여 분류하였다. 제 1형의 침전은 부유물의 농도가 낮고 응집성이 없는 입자의 침전을 말하고 제 2형의 침전은 부유물의 농도가 낮고 응집성이 있는 입자의 침전을 말한다. 제 3형의 침전은 농도가 높을때 일어나며 일명 계면침전이라 하며 고한다. 제 4형의 침전은 압밀 또는 압축이라고 하며 이때는 입자 사이의 간격이 매우 좁아 윗부분의 입자가 밑부분의 입자에 의해 지지되는 현상을 말한다. 실험조건에 따라 제 1, 2형과 제 3형의 경계구분은 명확하지 않으므로 경계부분을 띄형태로 표현하였다.

이 4 가지 유형의 침전에 대하여 각 유형마다 수없이 많은 공식이나 실험식들이 발표되어 왔다. 그러나 이 공식들은 온입자의 크기가 동일한 경우에 대해 만들어졌거나 온입자 조건 이외의 면에 의해 만들어진 것이므로 실험이 이루어진 조건에 대한 실제 적용에서 이 공식들을 사용하는 데는 한계가 있어 왔다.

사실상 실제 공학의 대상이 되는 대부분의 부유물은 균질하지 않으며 따라서 그 거동도 균질한 부유물이 거동하는 것과는 판이하게 다르다. 그러므로 Fitch가 분류한 부유물의 농도와 응집성의 두가지 성질 외에 비균질성(Heterogeneity)을 추가하여 Fig. 2와 같이 3차원으로 분류하는 것이 적절할 것이다. 이 그림에서 Fitch의 분류는 직육면체의 바닥부분에 해당된다. 이 그림에서 가장 단순한 침전현상인 균질하고 농도가 낮은 경우의 극한적인 경우는 Stokes가 공식을 유도하였던 경우일 것이며 (점 A), 가장 복잡한 경우는 비균질하며 응집성이 있으며 농도가 높은 부유물의 침전일 것이며 (점 B) 대부분의 슬러지나 준슬러지의 침전이 이 경우에 해당된다. 이러한 유형의 침전현상에 대한 이론적이고 합리적인 설명은 아직 존재하지 않지만 이 경우의 현상을 설명하고 예측하기 위한 접근 방법으로는 1) 응집성이 없는 고농도의 비균질성 부유물의 거동과, 2) 가장 간단한 비균질성 상태인 크기가 다른 두 개의 입자 사이의 응집현상의 두가지 단계로 나누어 침전현상의 메카니즘을 따로 이해한 다음 두 경우를 합하여 설명하는 방법일 것이다.

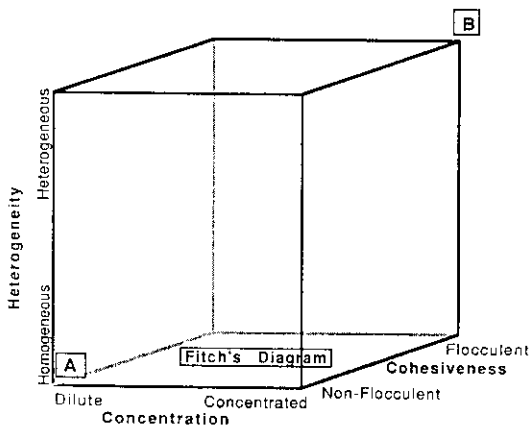


Fig. 2 침전의 형태의 3차원적인 분류

### 3. Thickening에서 계면 형성의 메카니즘

이 연구에서는 계면을 형성하기 시작하는 임계농도를 결정하는 개념적인 모델을 유도하고자 한다. Batch 침전실험 시 부유물의 농도가 어느 일정농도 이상이 되면 명확하게 구분되는 액체와 고체의 경계면이 형성되며 이와 같은 현상은 부유물이 균질하거나 균질하지 않거나, 또는 응집성이 있거나 없거나 관찰할 수 있는 현상이다. 이 임계농도 이하에서는 입자들은 명확한 경계면 대신 경계면 부근에서 불규칙한 층을 형성하거나, 또는 전혀 경계면을 형성하지 않는다.

농도가 낮은 부유물에서는 입자들은 각각의 Stokes의 속도와 비슷한 속도로 침전된다. 경계면을 형성한다는 것의 크기가 다른 입자가 같은 속도로 침전되는 것을 의미하는 침전속도가 입자반지름의 제곱에 비례한다는 Stokes의 법칙에서 예측되는 경향과는 일치하지 않는 현상이다.

대부분의 이론이나 실무적용에서는 이 경계면의 시간에 따른 이동속도를 관찰하여 그것의 Stokes의 공식의 속도에 대한 보정치를 이용하여 적용시켜 왔다. 그러나 이러한 이론들은 입자의 크기가 모두 같다고 가정하거나 또는 입자의 크기에 대한 고려가 전혀 없었다. 입자의 크기가 서로 다른 부유물에서 일정한 값의 보정계수로 Stokes의 속도들 보정하는 것은 틀리다는 것이 자명하다. 왜냐하면 그렇게 되면 부유물은 입자의 침전속도에 따라 층이 나누어질 것이고 따라서 경계면도 생기지 않을 것이기 때문이다.

본 연구에서는 이와 같이 크기가 서로 다른 입자들로 구성된 고농도의 부유물질이 경계면을 이루면서 침전되는 현상(경계면에서 큰 입자와 작은 입자가 같은 속도로 움직이는 것)을 이론적으로 규명하기 위하여 Fig. 3과 같은 상부 평면에 4개의 크기가 같은 입자가 정사각형의 격자를 이루고 있고, 그 밑의 평면에 작은 입자 한개가 놓여진 미시적인 모델 (Microcosm)을 만들어 설명하고자 한다.

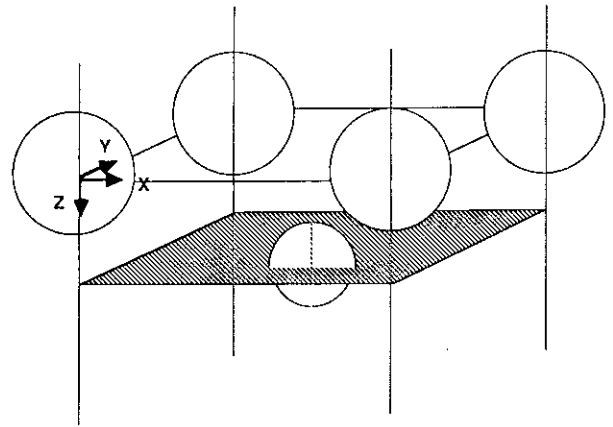


Fig. 3 A Microcosm for studying Interface Formation

아래의 평면에 있는 작은 입자의 거동은 다음 세가지 경우 중 하나에 해당된다고 볼수있다. 즉:

- 1) 작은 입자가 느리게 침전하므로 4개의 입자가 이루는 격자의 사이로 빠져 나가는 경우.
- 2) 작은 입자와 큰 입자중의 하나와 결합하여 플록을 형성하는 경우.
- 3) 작은 입자가 4개의 큰 입자사이에서 생기는 수리학적 스크린 에 의해 잡히게 되는 경우.

첫번째의 경우는 큰입자 사이의 거리가 작은 입자가 빠져 나가기에 충분하며 입자간의 인력이 수리동역학적인 저항보다 작을 때 큰 입자는 작은 입자보다 빨리 침전하여 서로 분리된다. 이 경우 작은 입자는 큰 입자들이 이루는 평면의 윗부분에서 움직이게 된다.

두번째의 경우는 큰 입자의 인력이 수리동역학적인 저항보다 클 때 작은 입자는 큰 입자에 서로 달라붙어 플록을 형성한다. 이 경우는 2개의 입자의 궤적이 폐쇄(Closed Trajectory)될 때 일어난다. (Han and Lawler, 1991)

세번째의 경우는 기하학적으로는 충분히 빠져나갈수 있는 공간의 여유가 있더라도 큰 입자의 사이로 작은 입자가 빠져 나가지 못하게 되는 경우이다. 이 때 작은 입자들은 큰 입자들에 의해 생기는 수리동역학적인 힘에 의해 큰 입자와 같거나 또는 빠른 속도로 침전하게 된다.

위의 경우중, 1)의 경우에는 계면이 형성되지 않으며, 2), 3)의 경우에는 계면이 형성된다.

#### 4. 수리동역학적 공식의 유도

Stokes가 단독입자의 운동에 대한 수리동역학적 이론을 발표한 이래 두개의 크기가 서로 다른 입자의 거동에 대한 이론적과 일반적인 해가 구해지기까지는 1세기 이상이 경과하였다(Jeffery and Onishi, 1984). 그러나 입자들은 수학적으로 공식을 유도하기 쉬운 구형이거나 대칭축을 갖는 회전체에 한하였다. 크기가 서로 다른 세개의 입자가 있을 때의 일반적인 3차원의 기하학적 형상에서의 입자들간의 힘과 운동은 수학이나 물리학에서의 계속적인 관심분야이며 아직까지 일반적인 해가 존재하지 않는다.

그러나 단순한 배열을 가진 세계의 입자의 운동에 대한 연구는 있었다. 세계의 같은 크기의 입자가 아래 위로 나란히 있을때(Happel) 또는 옆으로 나란히 있을때의(Kynch) 입자의 거동에 대한 해석이 이루어 졌다.

Brenner and O'Neill은 여러개의 입자로 구성된 시스템의 거동을 수식화하기 위하여 중첩의 원리를 이용하여 저항력 텐서(Resistance Tensor)와 운동량텐서(Mobility Tensor)로 표현하는 방법을 개발하였다. 느리게 움직이는 유체(Creeping Flow)의 방정식의 형태는 선형이므로 중첩의 원리를 사용하는 것이 가능하다(Happel and Brenner). 본 연구에서는 5개 입자의 거동을 연구하기 위하여 Brenner의 중첩의 원리를 사용하여 공식을 유도한 다음 이 모델의 경계조건을 대입하여 컴퓨터 프로그램을 작성하여 5개 입자의 상대적인 궤적을 계산하였다.

#### 공식

n개의 입자에 대하여 Brenner and O'Neill의 공식을 사용하면 각 입자의 운동은 힘과 운동량 텐서를 곱한 것으로 나타낼수 있다.

$$[\mathbf{V}] = [\mathbf{M}] [\mathbf{F}] \quad (1)$$

여기서  $[\mathbf{V}]$ 는  $6n \times 1$  크기의 속도벡터이며 각 입자에 대한 공간 좌표의 세계의 축에 대한 속도와 회전 요소들 나타낸다.  $[\mathbf{M}]$ 은  $6n \times 6n$  크기의 운동량 텐서이며  $[\mathbf{F}]$ 는  $6n \times 1$  크기의 힘의 벡터이며 세계의 축에 대한 힘과 토크

를크를 나타낸다. 운동량 텐서의 요소들은 두개의 입자끼리의 운동을 나타내는 수식으로 구성되어 있으며 입자의 크기와 거리의 함수로 나타내진다 (Jeffery and Onishi, 1984).

#### 경계조건

농도가 큰 부유물을 단지 5개의 입자로 구성된 모델의 집합으로 해석하였으므로 입자들의 궤적을 계산할때 다음과 같은 경계조건을 가정하여 계산하였다.

- (1) 정사각형을 이루는 4개의 큰 입자들은 상대적인 수직적 수평적 변위는 없고 작은 입자의 위치만이 변한다.
- (2) 5개의 입자로 구성된 모델의 가운데에는 수평방향의 속도는 없다.
- (3) 다른 입자들이 이 모델의 안으로 뚫고들어가지 않는다.
- (4) 이 시스템은 중심에 대하여 대칭이므로 1/4의 부분만을 계산한다.

#### 5. 결과의 분석

5개의 입자로 이루어진 모델과 두개의 입자 사이의 수리동역학의 공식을 이용하여 각 입자의 궤적을 구하는 컴퓨터 시뮬레이션이 행하여졌다. 큰 입자와 작은 입자가 아래 위로 멀리 떨어져 있을때는 각 입자들은 자신의 Stokes의 속도와 거의 비슷하게 침전되며 큰 입자가 더 빨리 침전되므로 어느 시간이 지나면 수직거리가 점점 가까와지게 된다. 입자사이의 수직거리가 가까와지게 되면 작은 입자와 큰 입자가 서로 영향을 미치게 되는데 큰 입자는 작은 입자에 더 큰 영향을 주는 반면에 작은 입자는 큰 입자에 작은 영향을 미치게 된다. 결과적으로 작은 입자는 자신의 Stokes의 속도보다 훨씬 빨리 침전되어 결국에는 큰 입자와 작은 입자가 같은 속도가 되어 5개 입자 모두 같은 속도로 침전하게 된다.

큰 입자로 구성된 정사각형의 한 변의 길이를 점점 크게 해가면서 작은 입자가 같이 침전되지 않고 큰 입자의 사이로 빠져나가기 시작할 때의 정사각형의 변의 길이를 구할수 있다. 이 길이의 근처에서 이 변화는 급작스럽지 않고 어느 폭을 형성하는데 이때는 큰 입자들이 작은 입자보다 아주 약간만 빨리 침전되어 컴퓨터 시뮬레이션 상의 최대 허용반복회수 이내에는 분리가 되지 않을 것들 뜻한다.

입자의 크기의 비를 변화시켜 가면서 임계거리를 구하여 Fig. 4와 같이 입자 크기의 비율에 대한 함수로 나타낼수 있다. 이 그림에서 거리는 큰 입자의 반경으로 나누어 무차원화 하였다. 정의에 따라 두 입자가 서로 맞닿아 있을때의 무차원화된 이격거리는 2가 되므로 이 값은 2보다 항상 큰 값이 된다. 무차원화된 이격거리가 부유물의 농도와 반비례한다는 것을 고려하면 비슷한 크기의 입자에서 일어나는 임계농도는 크기가 서로 많이 다른 입자들 사이의 임계농도보다 훨씬 작다는 것을 알수 있다. 다시 말하여 거의 균질한 부유물에서는 비균질한 부유물에서보다 훨씬 더 낮은 농도에서 경계면을 형성한다는 것을 알수있다.

이 결과와 경향이 일치하는 몇개의 실험결과가 보고되어 있다. Lawler는 두 종류의 입자를 가지고 Thickening 실험을 행하였다. 하나는 직경 5  $\mu\text{m}$  이하의 입자가 무게의 98%를 차지하는 좁은 입도분포를 가진 Min-U-Sil 5 입자이며, 다른 하나는 직경 30  $\mu\text{m}$  이하의 입자가 무게의 98%를 차지하는 비교적 넓은 입도분포를 가진 Min-U-Sil 30 입자이다. 모든 실험에서 용액의 이온화 세기(Ionic Strength)는  $10^{-2}$ 가 되도록 조정하였으며 용집의 효과를 찾아내기 위하여 pH도 바꾸어 가면서 실험을 행하였다. Min-U-Sil 입자들의 전하가 0이 되는(zero point charge) pH는 2.5였으므로 이 때의 pH에서 용집이 가장 잘 이루어지리라고 예상할수 있다. 실험 결과는 표-1과 같이 농도를 100 mg/L씩의 단위로 증가해 가면서 실험을 행하였을 때 입자의 종류와 pH에 따른 경계면을 이루는데 필요한 최소농도를 나타내었다. 비교적 균질한 입자 (Min-U-Sil 5)는 비균질한 입자 (Min-U-Sil 30)보다 낮은 농도에서 경계면을 형성하기 시작하였고, 용집이 잘되는 상태인 pH2.5에서 용집이 잘 안되는 상태인 pH 4.0에서 보다 더 낮은 농도에서 경계면을 형성되기 시작한다는 것을 알수있다.

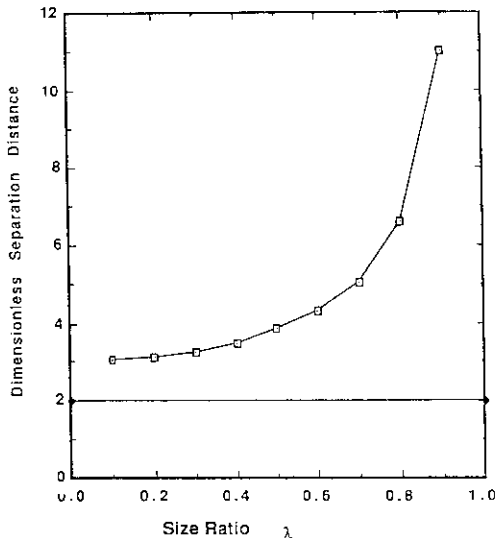


Fig. 4 Critical Separation Distance for Interface Formation

Table 1 계면을 형성하는 최소농도 (Lawler)

입자의 종류	pH	최소농도
Min-U-Sil 5	2.5	100 mg/L
	4.0	200 mg/L
Min-U-Sil 30	2.5	300 mg/L
	4.0	400 mg/L

Vesilind(1984)도 작은 유리구슬을 이용한 실험결과를 보고하면서 1) 경계면이 형성되는 부유물질의 농도는 입자의 농도뿐만 아니라 입도분포에도 관련이 있으며, 2) 입자의 크기가 더 균질에 가까울수록 경계면을 이루기 위해 필요한 부유물 입자의 농도가 낮아진다고 결론지었다.

#### 6. 토의

컴퓨터 시뮬레이션은 큰 입자들로 이루어진 정사각형 평면의 중심의 아래에 작은 입자가 있을 경우에만 이루어졌다. 더 복잡한 경우에도 적용하기전에 몇가지 지적해야 할 사항이 있다.

첫째로 계산시에는 단지 상대속도만이 계산되고 고려되었다. 하지만, 과거의 수많은 연구의 대상이 되어 왔던 경계면의 침전속도에 관한 절대속도는 과거의 연구결과와 반대의 경향을 보여준다. 수리동역학적인 공식과 이 컴퓨터 시뮬레이션에 의하면 각 입자는 다른 입자가 근처에 있음으로써 각각의 Stokes 속도보다 빠르게 침전하지만, 과거의 모든 실험적, 이론적 공식에서는 입자의 농도가 커질수록 계면의 침전속도가 줄어드는 것을 볼수 있다. 이 차이점은 사방이 막힌 실험용 컬럼에서 입자가 침전될때 입자의 부피에 의해 치환되는 물의 상향의 속도를 무시하였기 때문에 생겼을 것이다. 이와 같은 현상은 입자가 극부적으로 상방향 움직임을 보이는 것으로 Batch 침전 컬럼 실험에서 쉽게 관찰될수 있다. 이 영향을 고려하기 위한 하나의 방법은 외부기준선에 대한 침전속도를 분리하는 것이다. 상승하는 유체에 대한 침전속도는 Stream Function을 이해함으로써 계산이 가능하고, 외부기준선에 대한 유체의 속도는 연속방정식에 의해 구해질 것이다.

둘째로는 작은 입자가 큰 입자가 이루는 정사각형의 중심에서 벗어나 있는 경우이다. 이 경우의 문제를 풀기 위해서는 method of image 를 사용하여 계산할수 있으나

본 연구에서는 이 경우에 대한 체계분석을 행하지 아니하였다. 공간에서의 체계온 수직 및 수평속도분류의 합력에 따라 다르며 각각의 공간에서의 위치에 따라 변하므로 부정확한 수직속도를 사용한 결과는 마찬가지로 부정확해질 것이기 때문이다.

#### 7. 결론

본 고에서는 고농도 부유물이 경계면을 이루면서 침전하는 현상을 동일평면상의 4개의 같은 크기의 입자와 그 밑의 평면에 있는 작은 입자 하나로 이루어진 모델을 이용하여 설명하였다. 이 때 5개 입자의 체계온 두개의 입자끼리의 수리동역학적인 법칙에 의해 움직이는 운동량 텐서의 중첩에 의해서 계산될수 있다. 같은 크기의 4개의 입자 사이의 간격이 작아 질수록 작은 입자는 큰 입자의 영향으로부터 크게 받기 때문에 자신의 Stokes의 속도보다 빨리 침전하게 되고 중국에는 작은 입자와 큰 입자가 같은 속도로 침전하게 된다. 이것이 바로 고농도의 비균질 입자의 침전시 계면을 형성되는 메카니즘을 설명하여 주는 것이다.

작은 입자가 큰 입자들로 구성된 평면의 중앙의 아래부분에 있을때 큰 입자와 작은 입자의 크기의 비율을 바꾸어 가면서 수리동역학의 공식을 이용하여 계산하면 막 계면을 일으키기 시작하는 임계간격을 입자끼리의 크기의 함수비로 나타낼수 있다. 계산 결과에 의하면 입자의 크기의 비가 1에 가까울수록 (균질할수록) 임계간격은 커지는 것으로 나타났다. 이것은 실험에 의해 관찰된 결과인 균질한 부유물이 비균질한 부유물에서보다 훨씬 낮은 농도에서 경계면을 형성한다는 경향을 설명할수 있으며 이와 같은 방법으로 수리동역학적인 힘 외에 pH나 전해질의 농도변화에 따른 입자간에 작용하는 힘(van der Waals force, electrostatic force)에 의한 영향도 함께 고려하여 설명할 수 있음을 뜻한다.

#### 8. 참고문헌

Brenner, H. and O'Neill, M. E., "On the Stokes Resistance of Multiparticle Systems in a Linear Shear Field", Chem. Eng. Sci., Vol. 27, 1421 - 1439, 1972.

Fitch, E. B., "Sedimentation Process Fundamentals", Trans. Amer. Inst. Mining Eng., Vol. 223, 129-137, 1962.

Han, M. Y., Lawler, D. F., "Interactions of Two Settling Spheres: Settling Rates and Collision Efficiency", J. of Hydraulic Division, ASCE, 1269-1289, No10, 1991.

Happel, J. and Brenner, H., "Low Reynolds Number Hydrodynamics", 1986, Martinus Nijhoff Publishers.

Jeffrey, D.J., Onishi, Y., "Calculation of the Resistance and Mobility Functions for Two Unequal Rigid Spheres in Low Reynolds Number Flow", J. Fluid Mech., Vol. 139, 261 - 290, 1984.

Kynch, G.J., "The Slow Motion of Two or More Spheres Through a Viscous Fluid", J. Fluid Mech., Vol. 5, 193 - 208, 1959.

Lawler, D.F., "A Particle Approach to the Thickening Process", unpublished Ph.D Dissertation, Univ. of North Carolina at Chapel Hill, 1979.

Lawler, D.F., Mooyoung Han, "Flocculation Sedimentation: From one Particle to Sludge (Heterogeneous, Flocculent, Concentrated Suspensions)." at the Engineering Foundation Conference "Sludge Technology II: Theory and Practice of Dewatering", Henniker, New Hampshire (June 28-July 3, 1987).

Vesilind, P.A., Discussion to "Particles in Thickening: Mathematical Model", by Lawler, D. F., Singer, P. C., and O'Melia, C. R., Journal of Env. Eng. Div. ASCE, Vol. 110, No. 3, 711 - 720, 1984.