

탄성파 전파의 해석을 통한 섬유강화 복합재료의  
동탄성계수 및 감쇠계수의 파악  
Characterization of Dynamic Elastic Constants and Attenuation  
Coefficients of Fiber Reinforced Composites  
By Analysis of Elastic Wave Propagation

김 진연 (Jin-Yeon Kim), 이 정권 (Jeong-Guon Ih)  
한국과학기술원 기계공학과

요 약

섬유강화 복합재료의 동탄성계수와 감쇠특성을 규명하기 위하여 랜덤하게 분포된 무한 실린더 형상의 산란체를 가진 점탄성 매질내에서, 축방향으로 분극되어 조화운동을 하는 탄성파의 전파에 관하여 연구하였다. 다중산란에 관한 이론을 이용하여 매질내에서의 파동전파 특성을 내포하는 분산관계식을 얻었다. 다중산란에 의한 실린더간의 상호작용을 수식화하기 위하여 필요한 실린더의 쌍분포함수는 몬테카를로 모의실험을 이용하여 구하였다. 수치적으로 구한 감쇠계수 및 유효전단강성을 주파수와 채적율의 함수로 제시하였다. 또한 감쇠계수의 주파수에 따른 변화에 있어서, 저주파에서는 매질의 점탄성 손실이 지배적이며, 고주파수로 갈수록 다중산란에 의한 손실이 지배적인 것으로 나타났다.

1. 서 론

재료의 기계적 성질은 실험적 혹은 이론적으로 그 재료를 통과하는 탄성파의 전파 특성을 연구함으로써 규명될 수 있다.[3-5]

본 논문에서는 실린더의 축방향으로 분극된 평면 전단파 (vertically polarized plane shear wave; plane SH wave)가 원형 실린더에 입사되는 경우를 고려하기로 한다. 즉 실린더의 축방향으로 전단응력을 가하는 탄성파에 의한 파동장을 해석함으로써, 축방향으로의 전단강성과 해당하는 파동형태에 대한 감쇠계수를 구한다. 계의 특성방정식인 분산관계식은 평균파동을 coherent한 평면파로 가정하여 얻게 된다. 이 분산관계식을 만족하는 고유 복소파수를 수치적으로 구하여 복합매질의 평균 전파속도와 감쇠계수 및 유효전단강성 (effective shear

modulus)을 얻게 된다. 또한, 이와 같이 매질의 점탄성효과와 실린더에 의한 다중산란효과가 동시에 존재할 경우 각각이 감쇠계수에 끼치는 영향을 고찰한다.

## II. 이론

### 2.1 다중산란의 수식화

무한매질과 반경이  $a$ 인 원형단면의 실린더의 전단강성과 밀도를 각각  $\mu, \rho$ ,  $\mu', \rho'$ 라 하고, 같은 물성을 갖는  $N$ 개의 무한 실린더는 서로 평행하며, 선형점탄성 매질 내에 랜덤하게 분포한다고 가정한다. Fig. 1과 같이,  $(R_j, \theta_j)$ 는  $j$ -번째 실린더에 고정된 극좌표를,  $(r_i, \phi_i)$ 는 기준좌표계에서의  $i$ -번째 실린더 중심의 위치를,  $(r_{ij}, \theta_{ij})$ 는 두 실린더의 상대적 거리와 각도를 각각 나타낸다. 또한 관심있는  $x$ 방향의 변위를  $w$ 라 한다.

시간항이  $\exp(-i\omega t)$  이고  $+x$  방향으로 진행하는, 실린더에 대한 수직 입사파 ( $w^I$ )와  $N$ 개의 실린더에 의한 외부 산란파 ( $w^S$ )를  $j$ -번째 실린더에 고정된 좌표계에서 기술하면

$$w = w^I + w^S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [ A_{jm} H_m(kR_j) + J_m(kR_j) \{ i^m \exp(ikx_j) + \sum_{l=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{ln} H_{n-m}(kr_{lj}) \exp[i(n-m)\theta_{lj}] \} ] \exp(im\theta_j) \quad (1)$$

로 된다. 여기서  $k = \omega/c_p$ ,  $c_p = \sqrt{\mu/\rho}$ ,  $A_m$ 은  $i$ -번째 실린더의  $n$ 차 파동함수의 계수,  $\sum_{l=1}^N$ 은  $j$ -번째 실린더를 제외한 합을 의미한다. 또한 외부의 파동에 의한  $j$ -번째 실린더 내부변위는

$$w' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k'R_j) \exp(in\theta_j) \quad (2)$$

로 표현된다. 여기서  $k' = \omega/c_p'$ ,  $c_p' = \sqrt{\mu'/\rho'}$ 이다. 모든 실린더의 표면에서의 경계조건이 변위와 응력의 연속임을 고려하면

$$\begin{aligned} w|_{r=a} &= w'|_{r=a} \\ \tau_{rz}|_{r=a} &= \tau'_{rz}|_{r=a} \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 여기서  $\tau_r = \mu(\partial w/\partial r)$ 이다. 식 (1) 및 (2)을 식 (3)에 대입하면

$$A_{jm} = T_m [i^m \exp(ikx_j) + \sum_{l=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{ln} H_{n-m}(kr_{lj}) \exp\{i(n-m)\theta_{lj}\}] \quad (4)$$

$$T_m = \frac{\mu'(k'a) J'_m(k'a) J_m(ka) - \mu(ka) J'_m(ka) J_m(k'a)}{\mu(ka) J_m(k'a) H'_m(ka) - \mu'(k'a) J'_m(k'a) H_m(ka)}$$

를 얻게 된다. 식 (4)에서  $T_m i^m \exp(ikx_j)$  는  $j$ -번째 실린더에 의한 단일 산란계수이다.

## 2.2 통계적 평균파동

산란체의 분포가 완전히 랜덤할 경우에는, 다음과 같이 산란체의 분포에 대한 조건부 확률을 이용하여, 다중산란 계수를 모든 산란체에 대하여 앙상블 평균을 취함으로써 얻을 수 있게 된다(1).

$i$ -번째 산란체의 중심의 위치벡터를  $r_i$  라 하고, 모든 산란체를 포함하는 면적  $S$  가 무한하다면,

$$p(r_i) = \frac{1}{S} \quad r_i \in S \quad (5)$$

$$p(r_i|r_j) = \begin{cases} \frac{g(r_{ij}/2a)}{S} & r_{ij} > 2a, \\ 0 & r_{ij} < 2a \end{cases} \quad (6)$$

로 주어진다. 여기서  $p(r_i)$ 와  $p(r_i|r_j)$ 는 각각 하나의 실린더가 면적내에 있을 확률밀도와  $r_i$ 에 하나가 존재하고  $r_j$ 에 다른 하나가 존재할 조건부 확률밀도를 나타낸다. 쌍분포함수  $g(x)$  ( $x = r_{ij}/2a$ )는  $x$ 에 다른 산란체가 존재할 확률을 나타낸다. 식 (4)에 위의 확률밀도를 양변에 곱하면 한 개의 산란체가 고정되었을 때의 다중산란계수의 기대값이

$$\langle A_{jm} \rangle_j = T_m [i^m \exp(ikx_j) + \frac{N-1}{S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{r_{ij} > 2a} \langle A_{ln} \rangle_j H_{n-m}(kr_{lj}) e^{i(n-m)\theta_{lj}} g(r_{ij}/2a) dr_l] \quad (7)$$

이 되는데, 두 개의 산란체가 고정되었을 때의 조건부 기대값이 적분항 내에 있음을 볼 수 있다. 이와같이 하면 실제로는 무한개의 조건부 기대값을 알아야 한다. 이러한 무한구조

( infinite hierarchy ) 를 간단화하기 위하여 Lax(1)는 다음과 같이 준결정근사법을 제안하였다.  
즉,

$$\langle A_{in} \rangle_{ij} \equiv \langle A_{in} \rangle_i \quad (8)$$

식 (8)에 의하여 식 (7)은,

$$\langle A_{jm} \rangle_j = T_m |i^m e^{ikx_i} + n_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{r_{ij} > 2a} \langle A_{in} \rangle_i H_{n-m}(kr_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a) dr_{ij} | \quad (9)$$

이 된다. 여기서  $n_0 = N/S$  이다.

### 2.3 분산관계식

이제 평균파동을 입사파와 같은 방향으로 진행하는 평면파로 가정하면,

$$\langle A_{jm} \rangle_j = i^m X_m \exp(iK(\omega)x_j) \quad (10)$$

이고  $K = (K_1 + iK_2)$  는 평균파동의 복소파수를 나타낸다. 식 (10)를 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 선형 제차 연립방정식을 얻을 수 있다. 즉,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta_{mn} - 8cT_m F_{n-m}] X_n = 0 \quad (11)$$

$$F_n = \frac{[(2ka)J_n(2Ka)H'_n(2ka) - (2Ka)J'_n(2Ka)H_n(2ka)]}{(2ka)^2 - (2Ka)^2} + \int_1^{\infty} [g(x)-1] H_n(2kax) J_n(2Kax) dx$$

이다. 식 (11)의 의미있는 해는 계수행렬의 행렬식(determinant)이 영이 될 때이므로, 일반화된 고유치 문제로 귀결된다.

## 2.4 기지의 점탄성 효과

매질의 점탄성효과의 개념적인 표현은 시간영역에서의 강성을  $\mu(t)$  로 나타낼 수 있다. 동등하게 주파수영역에서는 그실수부와 허수부가 인과성(causality)을 만족하는 복소함수  $\mu(\omega) = \mu'(\omega) - i\mu''(\omega)$  로 되고 따라서 파수가  $k(\omega) = k'(\omega) - i\alpha(\omega)$  로 표현된다. 이때  $\alpha(\omega)$  는 매질의 감쇠계수를 나타낸다. 그런데 대다수의 점탄성재료는 감쇠율이 주파수에 따라서 증가하는 선형법칙(linear law)을 따르는 것으로 알려져 있다[4]. 즉

$$\alpha(\omega) = m \omega \quad (12)$$

로 표현될 수 있고, 비례상수  $m$  은 실험적으로 결정할 수 있다.

## III. 수치계산의 결과 및 고찰

### 3.1 몬테카를로 모의실험에 의한 쌍분포함수

쌍분포함수  $g(x)$ 는 몬테카를로 모의실험을 이용하여 구하였다. random walking을 하는 원들의 집합에서 어떤 원을 중심으로 반경을 증가시키면서 증가된 면적내에 존재할 수 있는 확률은 원의 갯수가  $N$ . 모의실험의 횟수를  $T$ .  $j$ -번째 원이 고정되었을 때의 거리에 따른 평균 갯수를  $n_j(r)$  라 할 때, 증가면적  $\Delta A(r)$  에 대하여

$$g(r) = \frac{\sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^N n_j(r)}{c(N-1)T\Delta A(r)} \quad (12)$$

로써 구해진다.  $g(r)$  은 그 성질상  $g(r) = 0, 0 \leq r < 1$  이며,  $g(r) \rightarrow 1, r \rightarrow \infty$  이다. Fig.2에 결과를 보이고 있다.

### 3.2 유효전단강성과 감쇠계수의 수치해

본 연구에서는 섬유강화 복합재료의 한 예로서 기지(matrix)가 에폭시이고 섬유가 유리인 glass-epoxy 복합재료를 선택하였다. 그 물성들은 표1과 같다.

Fig. 3에서는 체적율과 주파수에 따른 유효전단강성을 보여 주고 있다. 또한 Fig.4에서는

기지에 감쇠가 없을 경우 다중산란 만에 의한 감쇠와 기지의 점탄성 감쇠를 포함할 경우를 비교한 것인데, 저주파에서는 기지의 점탄성에 의한 감쇠가 지배적이며 고주파에서는 다중산란에 의한 감쇠가 지배적이다. Fig.5에서는 감쇠계수의 하나로써  $4\pi(K_2/K_1)$  즉 specific attenuation capacity를 체적율과 주파수의 함수로 보여 준다. 54% 체적율일때의 오르내림( $ka=0.5$ 부근)은 산란체의 평균거리에 의한 공명효과를 보여진다.

표 1. 재료의 물성

재료	전단파속 (m/sec)	밀도(Kg/m <sup>3</sup> )	점탄성비례상수(sec/m)
Epoxy	1160	1180	$0.726 \times 10^{-5}$
Glass	3240	2492	0

## VI. 결 론

본 연구에서는 섬유강화 복합재료의 동특성을 파악하기 위하여 랜덤하게 분포한 원형 실린더에 의한 다중산란문제를 해석함으로써, 복합재료의 유효전단강성, 감쇠특성을 구할 수 있음을 보여주었다.

## 참 고 문 헌

1. M. Lax, "Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense system," Phys. Rev. 85,621-629(1952).
2. J.M. Ward, Mechanical Properties of Solid Polymers, John Wiley & Sons, 1983
3. K. Bose and A.K. Mal, "Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite," Int. J. Solids Structures 9, 1075-1085(1973).
4. V.K. Varadan, V.V. Varadan, and Y.H. Pao, "Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. I. SH waves," J. Acous. Soc. Am. 63, 1310-1319(1978).
5. V.K. Varadan, V.V. Varadan, and Y. Ma, "Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. II. Pair-correlated cylinders," J. Acoust. Soc. Am. 78,1874-1878(1985).

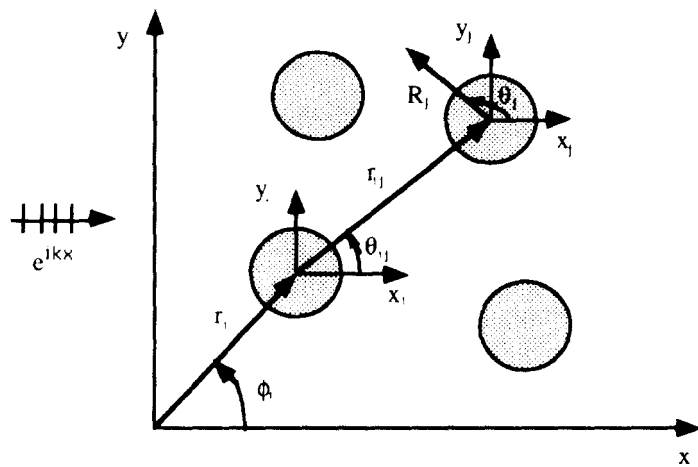


Fig.1 Coordinates Systems

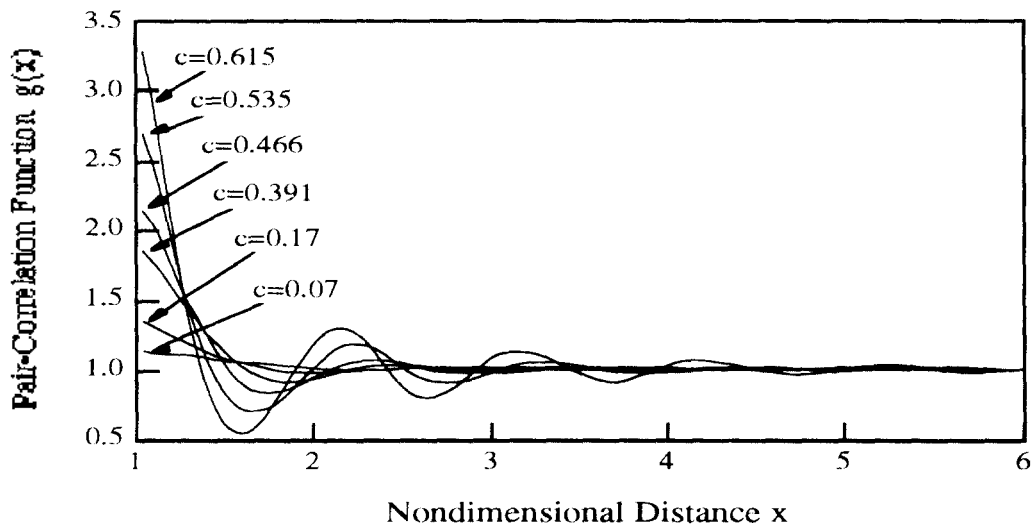


Fig.2 PairCorrelation functions

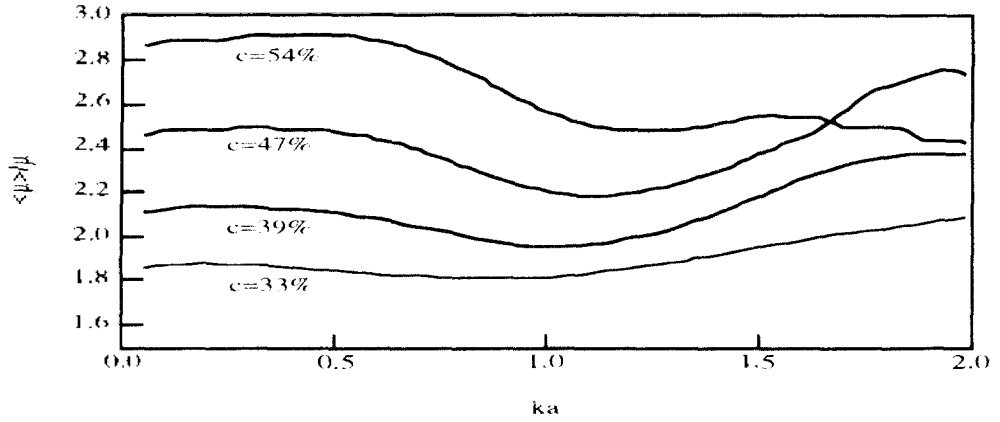


Fig.3 Effective Shear Modulus

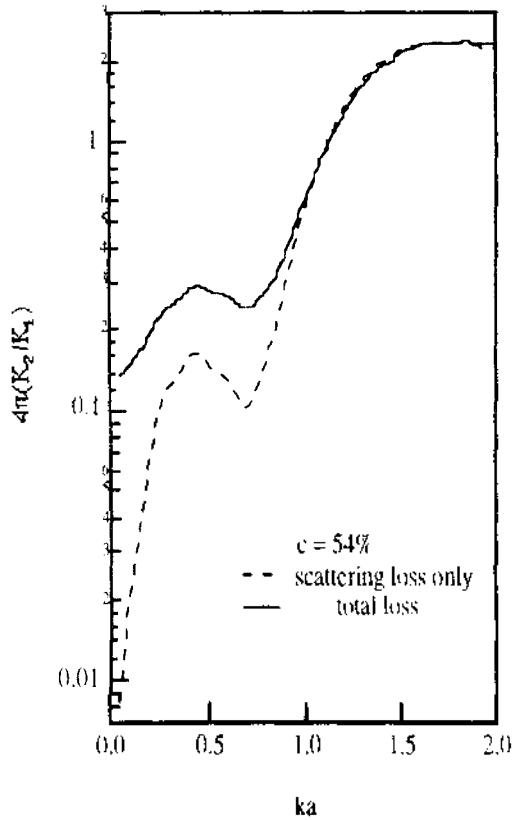


Fig.4 Total and Scattering Losses

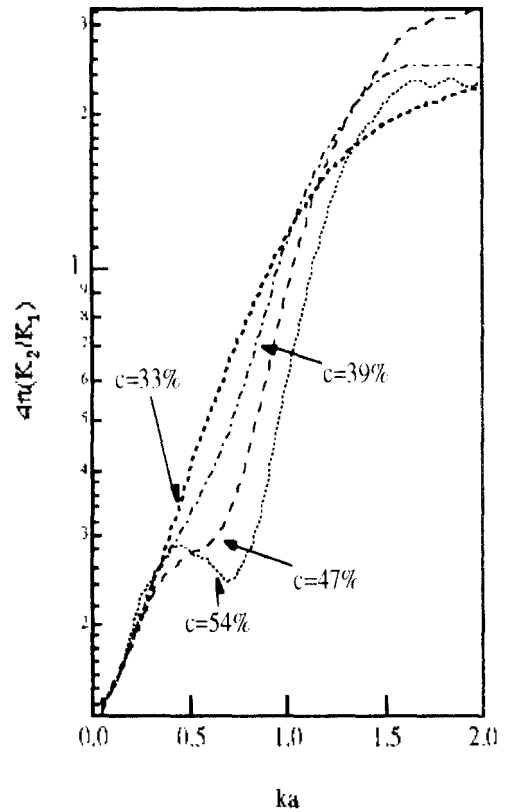


Fig.5 Specific Attenuation Capacity