

정자계 문제의 형상 최적 설계를 위한 설계 민감도 해석

고 창섭, 한 승엽,
서울대학교 전기공학과

정 현교
강원대학교 전기공학과

Design Sensitivity Analysis for
the Optimal Shape Design of Magnetostatic Problems

Chang-Seop Koh, Song-Yop Hahn
Dept. of Elec. Eng., Seoul Nat'l Univ.

Hyun-Kyo Jung
Dept. of Elec. Eng., Kangwon Nat'l Univ.

Abstract

Design sensitivity analysis is proposed for the optimal shape design of three dimensional magnetostatic problems. The direct differentiation method is introduced for design sensitivity analysis and the boundary element method with reduced magnetic scalar potential as the state variable is used to analyze the magnetic characteristics. In the direct differentiation method, the design sensitivity, defined as the total derivative of the objective function with respect to the design variables, is calculated based on the variation of the state variable with respect to the design variable. And the variation of the state variable is calculated by differentiating the both sides of the system matrix equation obtained by applying boundary element method.

Through the numerical example with simple electromagnet, the usefulness is proved.

1. 서론

전자계산기의 대용량, 고속화에 힘입어 전자소자의 수치해석 기법은 꾸준히 발전을 이룩하였다. 그 결과 전자소자의 기하학적 형상 및 제반 파라메타가 주어진 경우 특성 해석이 가능하여 졌다. 그런데 근래에 전자소자의 응용이 광범위 해짐에 따라 소형화, 경량화, 고 성능화, 고 효율화등을 위한 최적형상을 구하는 최적 설계기법의 개발이 시급히 요청되고 있다. 그러나 현재까지는 전자소자의 설계시 주로 퍼미언스법 또는 실험실을 이용하여 기본적인 설계를 한 후 각종 수치해석법을 통하여 성능을 평가하고, 이것이 설계 목표에 미치지 못하면 경험에 의한 시행착오를 거쳐 설계를 변경하여 왔다. 이와같은 설계과정은 서로 복잡한 비선형의 관계를 갖는 설계변수들을 시행착오적인 방법으로 결정하는 것이기 때문에 그 과정이 체계적이지 못하여 많은 시간을 요할 뿐 아니라 설계목표를 만족하는 최적의 설계변수를 찾는 것 자체가 불확실하게 되는 문제점이 있다. 이러한 문제점을 극복하고 체계적인 설계 방법을 제시하기 위하여 설계변수의 변화가 연고자 하는 시스템의 특성에 어떤 영향을 미치는지에 대한 정보 즉 설계민감도를 계산하고 이를 최적화 알고리즘에 적용하여 최적형상을 구하는 형상 최적설계기법에 대한 연구가 근래에 시작되었다[1].

지금까지의 연구결과를 살펴보면 2차원 문제를 다루기 위한 민감도 해석에 관한 연구가 대부분이었는데[1, 2, 3], 전자소자의 형상이 복잡해지는 추세에 비추어 볼 때 3차원 문제에 대한 형상 최적화 기법에 대한 연구가 절실히 요구되고 있는 실정이다. 따라서, 본 논문에서는 3차원 정자계 문제에서 설계 민감도를 유도하고 이를 최적화 알고리즘에 적용하여 설계목표를 만족하는 전자소자의 최적형상을 구할 수 있는 3차원 형상 최적설계 기법을 제시하고자 한다.

시스템의 제반 특성 해석을 해석하기 위한 수치 해석법으로는 유한요소법과 경계요소법이 널리 사용되고 있으나 유한요소법은 3차원 문제에서 시스템 행렬이 매우 커지고, 또한 형상 최적화 과정에서 형상이 바뀔 때 마다 요소분할을 다시 해야하는 어려움이 있어 본 논문에서는 경계요소법을 사용하고자 한다. 그리고 설계 민감도 계산 알고리즘은 적용하기 편리한 직접 미분법을 이용하였다.

2. 설계 민감도 계산 알고리즘

2.1 경계요소 방정식

3차원 정자계 문제의 해석을 위한 해석변수로는 자기 벡터 포텐셜(magnetic vector potential), 리듀스드 자기 스칼라 포텐셜(reduced magnetic scalar potential), 토달 자기 스칼라 포텐셜(total magnetic scalar potential)등을 사용할 수 있으나 본 논문에서는 해석 모델을 구성하는 매질이 선형 등방성이고, 외부에서 인가한 전류 영역이 임의의 형상으로 존재하는 경우, 개영역 문제의 해석에 적합하도록 리듀스드 자기 스칼라 포텐셜을 해석 변수로 설정하였다[2, 3]. 따라서 상태변수는 각 절점에서 다음의 식으로 정의된 ρ 가 된다[3].

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n} + \vec{H}_a(\vec{r}) \cdot \vec{n} \quad (1)$$

여기서 \vec{r} 은 위치벡터, ϕ 는 리듀스드 자기 스칼라 포텐셜, \vec{H}_a 는 외부에서 인가된 전류에 의한 자계의 세기이고 \vec{n} 은 점 \vec{r} 에서의 단위 외향 법선 벡터이다.

경계적분 방정식을 유도하고, 자성체의 자기 투자율이 큰 경우 수치해가 부정확해지는 것을 막기 위해 자성체 표면에서 ρ 의 합이 영이 되는 구속조건을 도입하고 1차 삼각형 요소로 자성체의 표면을 이산화한 후 갤러킨(Galerkin) 근사화하면 경계적분 방정식은 다음과 같이 된다[3].

$$\begin{aligned} & \iint_{e_i} [N]_i [N]_i^T |J|_i [B]_i dx_i [\rho]_i \\ & - (1 - \frac{1}{\mu}) \sum_{j=1}^M \iint_{e_j} \iint_{e_j} [N]_j [N]_j^T \frac{(r(\vec{x}_i) - r(\vec{x}_j)) \cdot \vec{n}_i}{4\pi |\vec{r}(\vec{x}_i) - \vec{r}(\vec{x}_j)|^3} \\ & |J|_j |J|_j dx_j dx_j [\rho]_j + \frac{1}{A} \sum_{j=1}^M \iint_{e_j} \iint_{e_j} [N]_j [N]_j^T |J|_j |J|_j \\ & dx_i dx_j [\rho]_j = \iint_{e_i} [N]_i H_{an} |J|_i dx_i, i=1, 2, \dots, M \quad (2) \end{aligned}$$

여기서 x_i, x_j 는 각각 i 및 j 번 요소에서의 2차원 국부 좌표계이며, μ 는 인접하는 두매질의 자기 투자율의 비이고, A 는 해석

모델의 전체 표현적, $|j\rangle$ 는 자코비안이며 첨자 i 와 j 는 각각 i 번 요소와 j 번 요소를 뜻하며 M 은 전체 요소수이고 H_{an} 은 H_a 의 법선성분이다. 그리고 α_k 를 k 번 절점에서의 내부 입체각이라고 하면 나머지 기호는 다음과 같다.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_i}{4\pi} (1 - \frac{1}{\mu}) & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

$$[N]_i^T = [x_{i1}, 1-x_{i1}-x_{i2}, x_{i2}] \quad (4)$$

$$\vec{r}(x_i) = [N]_i^T [r] \quad (5)$$

식 (2)를 각 요소에 대하여 적용하고 조립하면 다음과 같은 상태 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K][\rho] = [F] \quad (6)$$

여기서 $[K]$ 는 시스템 행렬이고 $[\rho]$ 는 상태변수 벡터이고 $[F]$ 는 구동 벡터이다. 식 (6)을 풀면 각 절점에서의 상태변수를 알 수 있고 자성체 외부의 임의의 점 r_p 에서의 자속밀도 $B(r_p)$ 는 다음식으로 부터 계산된다.

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}_p) &= \mu_0 \vec{H}_a(\vec{r}_p) \\ &+ \mu_0 (1 - \frac{1}{\mu}) \sum_{j=1}^M \iint_{\Omega_j} [N]_j^T \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}(x_j))}{4\pi |\vec{r}_p - \vec{r}(x_j)|^3} |j\rangle dx_j [\rho]_j \end{aligned} \quad (7)$$

식 (2)와 식 (7)에 포함된 모든 적분은 Conical product 공식을 이용하여 수치적으로 계산된다[3].

2.2 설계 민감도 계산

설계목표를 목적함수를 통하여 정량적으로 표현하면 형상 최적설계 문제는 설계변수가 만족해야 할 구속조건 하에서 목적함수를 최소로 하는 설계변수를 찾는 일로 귀착된다. 목적함수를 일반적으로 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} F &= C_1 \iint_{\Omega} b(\rho) d\Omega + C_2 \iint_{\Gamma} h(\rho) d\Gamma \\ &= F([P], [\rho(P)]) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $[P]$ 는 설계변수 벡터이고 $[\rho(P)]$ 는 상태변수로서 지배 방정식이 결정되면 설계변수만의 함수이다.

설계민감도는 목적함수의 전미분으로 정의되며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dF}{d[P]} = \frac{\partial F}{\partial [P]} + \frac{\partial F}{\partial [\rho]^T} \frac{d[\rho]}{d[P]} \quad (9)$$

식 (9)에서 우변 첫항은 상태변수 $[\rho]$ 가 일정한 상태에서의 변화율이고 둘째항은 상태변수의 변화에 따른 목적함수의 변화율이다. 목적함수 F 가 정의되면 $\partial F/\partial [P]$ 와 $\partial F/\partial [\rho]^T$ 는 이들간의 관계가 Explicit 하므로 쉽게 계산되며, $d[\rho]/d[P]$ 는 설계변수와 상태변수가 Implicit한 관계를 갖기 때문에 이를 계산하기 위하여 식 (6)을 이용한다.

식 (6)의 양변을 설계변수 $[P]$ 에 대하여 미분하고 정리하면

$$[K] \frac{d[\rho]}{d[P]} = \frac{d}{d[P]} \{ [F] - [K] \cdot [\rho] \} \quad (10)$$

가 얻어지며, 여기서 $[\rho]$ 는 식 (6)에서 구한 상태변수의 동작점이다. 따라서 식 (10)을 풀면 상태변수의 변화율 $d[\rho]/d[P]$ 를 계산할 수 있게 된다. 외부 인자 전류영역이 고정된 것으로 가정하고, 설계변수로서 매질사이의 경계의 형상만을 고려하면 자기부자율, 전류밀도등의 변화가 없으므로 식 (10)의 우변은 k 번째 설계변수 P_k 에 대하여 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d[F]}{dP_k} = \sum_{i=1}^M \iint_{\Omega_i} [N]_i \left\{ \frac{d[\rho]}{dP_k} \cdot \vec{D}_i + \vec{H}_a \cdot \frac{d\vec{D}_i}{dP_k} \right\} dx_i \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dP_k} \{ [K] \cdot [\rho] \} \\ &= \sum_{i=1}^M \left[\iint_{\Omega_i} [N]_i [N]_j^T \left\{ \frac{d[J]_i}{dP_k} [B]_i + |j\rangle_i \frac{d[B]_i}{dP_k} \right\} dx_i [\rho]_j \right. \\ & - (1 - \frac{1}{\mu}) \sum_{j=1}^M \iint_{\Omega_j} [N]_j [N]_i^T \left\{ \frac{d}{dP_k} \left(\frac{(\vec{r}(x_i) - \vec{r}(x_j))}{4\pi |\vec{r}(x_i) - \vec{r}(x_j)|^3} \right) \cdot \vec{D}_i |j\rangle_j \right. \\ & + \frac{(\vec{r}(x_i) - \vec{r}(x_j))}{4\pi |\vec{r}(x_i) - \vec{r}(x_j)|^3} \frac{d\vec{D}_i}{dP_k} |j\rangle_j + \frac{(\vec{r}(x_i) - \vec{r}(x_j)) \cdot \vec{D}_i}{4\pi |\vec{r}(x_i) - \vec{r}(x_j)|^3} \frac{d[J]_j}{dP_k} \left. \right\} dx_i dx_j [\rho]_j \\ & + \frac{d}{dP_k} \left(\frac{1}{A} \right) \sum_{i=1}^M \iint_{\Omega_i} [N]_i [N]_j^T |j\rangle_i |j\rangle_j dx_i dx_j [\rho]_j \\ & + \frac{1}{A} \sum_{j=1}^M \iint_{\Omega_j} [N]_j [N]_i^T \left\{ \frac{d[J]_i}{dP_k} |j\rangle_j + \frac{d[J]_j}{dP_k} |j\rangle_i \right\} dx_i dx_j [\rho]_j \left. \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\text{여기서, } \vec{D}_i = \vec{n}_i |j\rangle_i \quad (13)$$

식 (11)과 식 (12)에 포함된 설계변수에 관한 미분들은 연쇄법칙(Chain Rule)을 사용하여 전개되며, 이때 모든 적분은 시스템 행렬의 조립시와 마찬가지로 Conical product 공식을 사용하여 계산된다. 최종적으로 설계변수에 대한 상태변수의 변화율은 식 (11)과 식 (12)를 이용하여 식 (10)의 우변항들을 조립하고 설계변수의 갯수 만큼 식 (6)을 풀면 구할 수 있게 된다.

3. 사례연구

그림 1과 같이 육면체의 자성체가(비 투자율=500) 주변에 흐르는 직류 전류(여자 권선 기자력=3,000 AT)에 의하여 여자 되는 경우 자성체로 부터 2 [cm] 떨어진 평면에서(그림 1의 점선으로 표시된 가로, 세로 공회 6.25 [cm])인 평면을 z 축 방향으로 2 [cm] 만큼 평행 이동 시킨 평면) 원하는 균등자장이 얻어지도록 하는 자성체 표면의 형상 Γ_m 을 최적화 하였다.

본 모델의 자기적 특성을 해석하기 위하여 그림 2와 같이 자성체의 표면을 258개의 절점과 512개의 1차 삼각형 요소로 분할 하였다. 설계변수는 모델의 대칭성을 고려하여 제 1상한에 위치한 10개의 절점을 택하여 z 방향으로 변화하도록 하였으며, 최외곽에 위치한 절점들은 인접한 설계변수를 따라 움직이도록 하였다. 또한 모델의 상하 대칭성을 이용하여 철심의 아랫면에 위치한 절점들도 윗면의 절점들과 반대 방향으로 움직이도록 하였다.

목적함수에는 자속밀도의 z 성분만을 고려하였으며 목적함수가 정의된 평면에서 균등각적으로 36점을 취하여

$$F = \sum_{i=1}^{36} (B_z(\vec{r}_i) - B_{z0})^2 \quad (14)$$

으로 정의하였고 $B_z(\vec{r}_i)$ 는 점 r_i 에서 경계요소법에 의하여 계산된 자속밀도 값이고 B_{z0} 는 균등 자계 값으로 350[Gauss]이다. 따라서, 설계변수 P_k 에 대한 설계민감도는 다음과 같이 되며

$$\frac{dF}{dP_k} = 2 \sum_{i=1}^{36} (B_z(\vec{r}_i) - B_{z0}) \cdot \frac{dB_z(\vec{r}_i)}{dP_k} \quad (15)$$

식 (9)를 이용하면

$$\frac{dB_z(\vec{r}_i)}{dP_k} = \frac{\partial B_z(\vec{r}_i)}{\partial P_k} + \frac{\partial B_z(\vec{r}_i)}{\partial [\rho]^T} \frac{d[\rho]}{dP_k} \quad (16)$$

이 된다. 식 (16)에 포함된 편미분 항은 식 (7)로부터 쉽게 계산된다. 최적화 알고리즘으로는 최대경사법(steepest descent method)을 사용하여 새로운 설계변수를 구하였으며 이때 진행거리 α 는 목적함수를 설계변수에 대하여 선형화하여 구하였다 [8]. 또한, 상대오차 ϵ_r 를 다음과 같이 정의하고

$$E_r = \text{Max}_k \left[\frac{B_z(\vec{r}_k) - B_{z0}}{B_{z0}} \right] \times 100 \quad (17)$$

0.1% 이하가 될 때 까지 반복하였다.

그림 3은 최적화 과정에 따른 목적함수의 수렴과정을 Log값으로 나타낸 것이며 22회의 형상조정 후에 약 1%의 상대오차를 포함하는 자계분포가 얻어지며 41회의 반복후에 상대오차 0.1 [%]이내로 수렴함을 알 수 있다. 또한 최적화 과정의 초기단계에서는 수렴속도가 매우 빠르나 마지막 단계에서는 상대적으로 느림을 알 수 있다. 그림 4는 철심의 초기형상 및 최종형상에서의 자속밀도의 z성분을 나타낸 것으로 최종형상에서 거의 균등한 자속 밀도의 분포가 얻어졌음을 알 수 있다. 또한 최적화된 철심의 형상을 그림 5에 나타냈으며 최종형상에서 철심의 중심부가 상대적으로 볼록해짐을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 3차원 정자계 문제의 형상 최적화를 위한 설계 민감도 해석을 제시하였다. 설계 민감도는 직접 미분법을 이용하여 계산하였으며 3차원 자계해석을 위하여 경계 요소법을 이용하였다. 도출된 알고리즘의 유용성을 검토하기 위하여 3차원 정자계 문제를 다루었는데 수렴특성이 양호하였고 형상을 교정할 때 마다 요소를 재 분할 할 필요가 없어 적용하기가 매우 간편하였다.

본 연구에서 제안된 형상최적화 알고리즘은 정자계 문제 뿐만 아니라 정전계 문제에도 쉽게 적용이 가능하고 미분 가능한 함수로 표현된 다른 형태의 목적함수에도 적용이 가능하기 때문에 여러 분야에 이용될 수 있으리라 사료된다.

참고문헌

- [1] C.Koh, S.Hahn, H.Jung and T.Chung, "A sensitivity analysis using boundary element method for shape

optimization of electromagnetic devices", IEEE, Tran. on Magnetics, Vol.28(2), pp.1577-1580, March, 1992.

- [2] 전 기억, 고 창섭, 정 현교, 한 송엽, "경계 요소법을 이용한 3차원 정자계 해석", 대한 전기 학회 논문집 40권 12호, pp 1211-1217, 1991년 12월.
- [3] S. Peaiyoung, Computational aspects of the boundary element method applied to two- and three- dimensional magnetic field problems, Ph.D Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, Newyork, October, 1987.

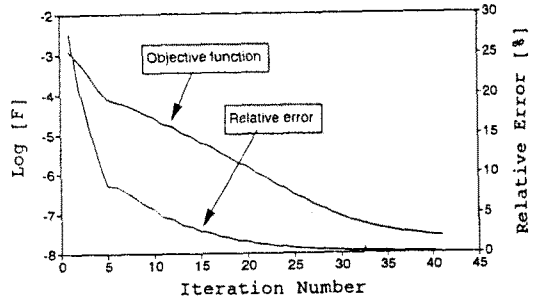


그림 3. 목적함수의 수렴과정.

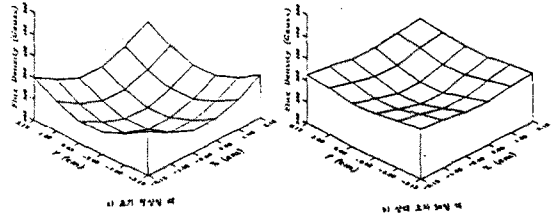


그림 4. 자속밀도의 분포.

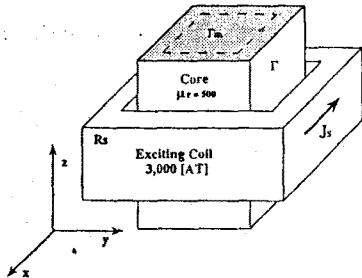


그림 1. 3차원 형상최적화 모델.

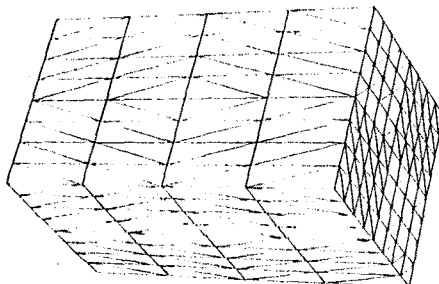


그림 2. 경계요소 분할.

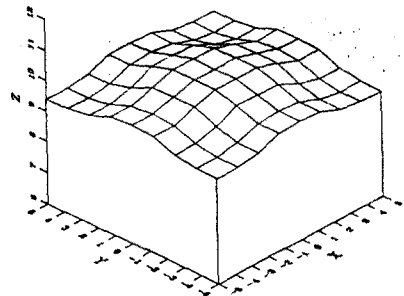


그림 5. 철심의 최적형상.