

마름모꼴 다이에 의한 사각빌렛 밀폐형단조의 힘평형 해석

최 재찬*, 김 병민*, 김 진우**, 이 진희***

* 부산대학교 기계설계공학과

** 울산대학교 기계공학과

*** 부산대학교 대학원

1. 서론

최근 항공기 및 자동차 관련산업 등의 급속한 발전에 따라 정밀도가 높고 결함이 없는 제품을 단기간에 생산하기 위한 급속성형공정의 가공법 및 해석 방법에 대한 연구가 활발하다. 급속성형공정에서의 주된 공학적 관심사는 원하는 형상의 제품을 내부결함없이 생산하기 위한 성형하중과 급속유동의 예측 및 응력분포 등이다. 그러나 해석적인 방법으로 실제 급속성형문제에 대한 완전해를 얻는 것은 매우 어려우므로 실제해에 근접한 근사해를 구한다. 평면변형문제에 대한 근사해를 구하는데 있어서, 다른 방법들에 비해 상대적으로 간단하게 성형하중의 예측을 할 수 있는 힘의 평형해석법에 관한 관심이 증대되고 있다. 1960년에 Westwood와 Wallace⁽¹⁾는 평면변형문제를 해석하기 위해 공구와 가공물의 접촉면상에 물통마찰을 가정하여 힘의 평형해법의 일종인 전단평면이론(shear plane theory)을 제안하였으며, 몇 가지 급속성형공정에 대한 성형하중을 계산. 동일한 변형영역을 가진 동적가속도장으로부터 구한 상계해와 동일성이 존재함을 발견하였다. 그후 Wallace^(2,3) 등은 열간 및 냉간압연공정의 해석에 전단평면이론을 적용하였다. 1977년에는 Johnson과 Mamalis⁽⁴⁾ 등이 힘의 평형관계에서 간략하게 도출된 힘의 평면도해법을 사용하여 미끄럼선장으로 둘러싸인 변형영역내의 어떤 평면상에 작용하는 힘을 간단하게 결정하였으며, 이후⁽⁵⁾ 다이아몬드형 다이의 밀폐단조에 적용하였다. 1979년에 Bore와 Malherbe⁽⁶⁾가 평면도해법을 이용하여 평면변형 조건하에서의 탄성, 탄소성 및 소성적으로 응력을 받고있는 두꺼운 벽을 가진 실린더의 해석을 하였다. 1986년 Avitzur와 Choi⁽⁷⁾ 등은 판재인발 및 마찰모델 등의 평면변형 급속성형 문제를 힘평형법(force balance method)으로 해석하여 인발하중 및 공구에 작용하는 수직하중 등을 구하였으며, 그후 Choi^(8,9) 등은 판재압연, 평면변형압입, 판재단조 등의 공정에서 동적가속도장을 이용한 상계해와 힘평형법에 의한 해의 비교를 하였다. 1988년에 이르러 Kim⁽¹⁰⁾은 평면변형문제에 대해서는

속도불연속모델이 값을 더 상계법으로 구한해와 힘평형법으로 구한해가 동일함을 해석적으로 증명하였다.

본 논문에서는 중요한 급속성형공정의 하나인 밀폐형단조 공정 중 사각빌렛을 마름모꼴다이에서 단조할 때의 초기변형과 후속 변형과정의 단조하중을 힘평형법을 이용하여 계산하였으며, 다이각과 다이와 소재접촉면 사이의 마찰 등의 영향에 따른 우세한 초기 변형형태의 예측및 후속의 변형과정의 재료유동 예측을 위한 수직해법의 적용 가능성을 보였다. 동일한 변형모델을 사용할 경우 미끄럼선장법과 힘평형법으로 구한 단조하중이 정량적으로 거의 일치하였다.

2. 밀폐형단조의 힘평형 해석

힘평형법은 평면변형 급속성형문제의 해석법으로서 변형하는 영역을 실제의 변형과 유사하게 가정. 이 변형영역의 속도불연속면상에는 수직응력과 항복전단응력이 작용한다고 하여 강성영역에 대한 힘 또는 모우멘트의 평형방정식을 구성하여 이들 방정식의 해를 구하므로써 성형하중, 공구에 작용하는 압력, 각 경계면상에 작용하는 수직응력 등을 어려운 소성이론의 고려없이 간단하고 신속하게 구할 수 있다. 마름모꼴 밀폐다이를 통한 사각빌렛의 단조공정은 해석대상이 대칭이므로 그림 1과 같이 1/4 만 고려하며, 초기변형과 후속의 중간변형 과정으로 나누어서 해석하기로 한다.

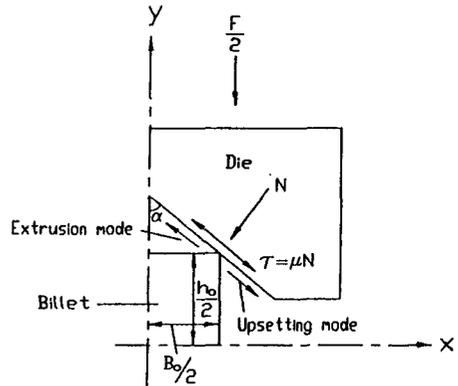


Fig. 1 Schematic of a closed-die forging

$$[N] = \begin{Bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_{(11)1} \\ N'_{(11)1} \\ N_{(11)2} \\ \vdots \\ N_{(11)n} \\ N'_{(11)n} \\ N_2 \\ N_3 \\ F/2 \end{Bmatrix}, \quad [B] = k \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4\tan(\theta/2n) \\ 0 \\ -4\tan(\theta/2n) \\ \vdots \\ -4\tan(\theta/2n) \\ 0 \\ -1 \\ \tan\lambda \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[N] = \begin{Bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_{(11)1} \\ N'_{(11)1} \\ N_{(11)2} \\ \vdots \\ N_{(11)n} \\ N'_{(11)n} \\ N_2 \\ N_3 \\ F/2 \end{Bmatrix}, \quad [B] = k \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4\tan(\theta/2n) \\ 0 \\ -4\tan(\theta/2n) \\ \vdots \\ -4\tan(\theta/2n) \\ 0 \\ -\tan\lambda \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

여기서 구한 단위깊이당 단조하중은 다음과 같다.

$$\frac{F}{2} = k \cdot \frac{(1 + 4 \cdot n \cdot \tan(\theta/2n)) \cdot \tan\lambda + 1}{\tan\lambda - \mu} \times (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) \cdot L \quad (2)$$

$$\frac{F}{2} = k \cdot \frac{1 + 4 \cdot n \cdot \tan(\theta/2n) + \tan\lambda}{1 + \mu \cdot \tan\lambda} \times (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) \cdot L \quad (3-b)$$

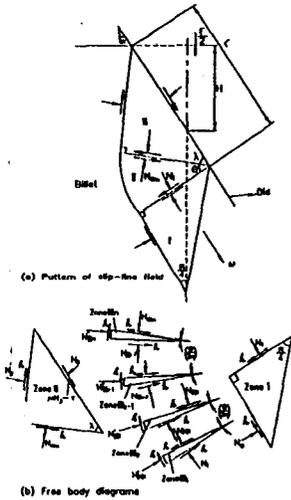


Fig. 5 Upsetting mode of incipient deformation($\alpha < 45^\circ$)

그림 5는 다이반각 α 가 45° 이하, 그림 6은 다이반각 α 가 45° 를 초과할 때에 대한 초기업셋팅형태의 근사변형모델과 속도불연속면에 의해 분리된 강성영역의 자유물체도이다. 그림 6의 (b)에서는 전단응력 τ 의 방향이 그림 5(b)의 방향과 반대인 이유는 앞에서 언급한 그림 3(b)에서 알 수 있다. 이에 대한 힘평형방정식과 단위 깊이당 단조하중은 각각 다음과 같다.

[Upsetting mode - $\alpha \leq 45^\circ$]

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(1+\mu \cdot \tan\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tan\lambda - \mu & -\tan\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) \cdot L & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

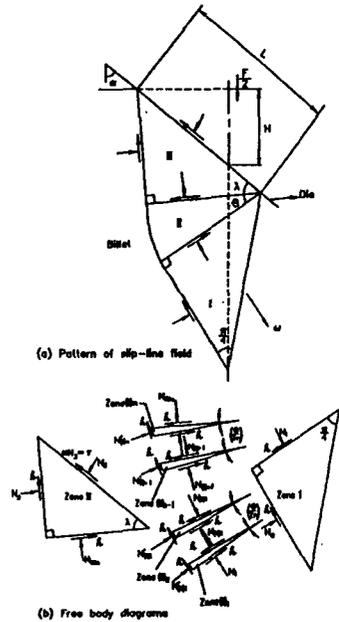


Fig. 6 Upsetting mode of incipient deformation($\alpha > 45^\circ$)

[Upsetting mode - $\alpha > 45^\circ$]

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \cdot \tan\lambda - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu + \tan\lambda) & \tan\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \cdot L & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(N) = \begin{Bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_{(11)1} \\ N_{(11)1} \\ N_{(11)2} \\ \vdots \\ N_{(11)n} \\ N_{(11)n} \\ N_2 \\ N_3 \\ F/2 \end{Bmatrix}, \quad (B) = k \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4\tan(\theta/2n) \\ 0 \\ -4\tan(\theta/2n) \\ \vdots \\ -4\tan(\theta/2n) \\ 0 \\ -\tan\lambda \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-a)$$

$$\frac{F}{2} = k \cdot \frac{1 + 4 \cdot n \cdot \tan(\theta/2n) + \tan\lambda}{1 - \mu \cdot \tan\lambda} \cdot L \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \quad (4-b)$$

그림 7(a)는 식(2), 그림 7(b)는 식(3-b), (4-b)에 대한 단조하중을 나타낸 것이다.

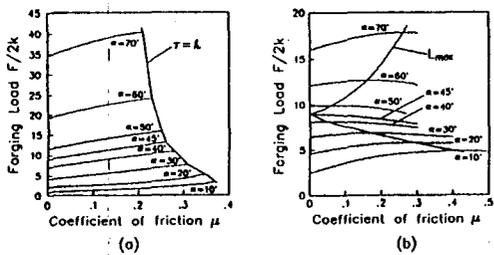


Fig.7 Variation of forging load with coefficient of friction for various values of die-semi angle: (a)Extrusion mode, (b)Upsetting mode

그림 7(a)의 $\tau = k$ 인 선은 전단응력 τ 가 항복전단응력 k 에 도달한 선이며, 마찰계수 μ 가 증가해도 하중은 더이상 증가하지 않는다. 그림 7(b)는 L_{max} 선 이후의 하중값이 마찰계수 μ 가 증가함에 따라 감소함을 보여준다. L_{max} 선은 그림 2(b) DE선의 경사도가 양(그림 5참조) 또는 음(그림 5참조) 방향으로 증가하여 수직이 되는 부분이며, 이 이후의 변형은 마찰계수 μ 가 증가해도 이 때의 변형 모델을 그대로 사용할 수 있음을 의미한다. 또한 다이반각 α 가 30° 미만일 때는 마찰계수 μ 의 크기와 무관하게 초기 압출형태가 우세하며, 다이반각 α 가 45° 이상일 때는 초기 업셋팅형태가 우세하게 일어남을 알 수있다. 30° $\leq \alpha$ < 45° 일 때의 초기 변형형태는 마찰계수 μ 에 의존하며, 마찰계수 μ 의 값이 작을 때 압출형태가 우세하다는 것을 알 수있다. 그림 8은 다이 반각 α 가 30°일 때, 마찰계수 μ 에 따른 단조하중을 나타낸 것으로, 여기서 $\mu_1 = 0.17$, $\mu_2 = 0.24$ 이다.

μ_1 은 업셋팅형태일 때 앞에서 언급한 DE선이 수직인 경우 일 때의 마찰계수이며, 이 이후의 하중은 마찰계수 μ_1 일 때의 변형 모델을 그대로 사용할 수 있으므로, 하중의 변화가 없다고 생각할 수 있으며 점선으로 나타내었다. 마찰계수가 μ_2 이상이 되어야 업셋팅형태가 먼저 일어난다. 또한 변형모델이 동일할 때 미끄럼선장으로 구한해와 힘평형으로 구한해는 거의 일치함을 보였다. 식(2)의 단조하중은 $\lambda = 45^\circ$ 의 경우(그림 4참조), 즉 다이와 빌렛사이의 마찰계수 μ 가 0 이고 n 을 무한대로 가정했을 때, 쇠기형편치압입의 미끄럼선장해와 동일함을 알 수 있으며, α 가 극한적으로 $\pi/2$ 가 되면 반무한체에 대한 평저편치의 압입에 대한 미끄럼선장해와도 일치한다.

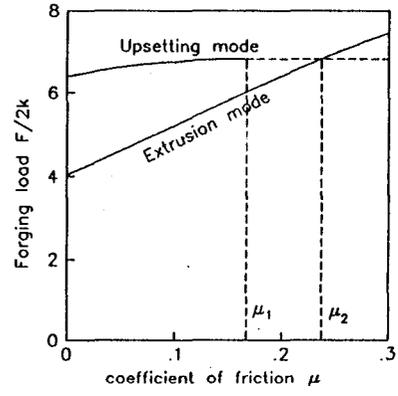


Fig.8 Variation of forging load with coefficient of friction for $\alpha = 30^\circ$

2.2 후속 변형단계 해석

초기벌징이 발생한후의 변형을 해석하기 위해서는 위에서 언급한 초기변형모델로는 해석이 불가능하므로, 후속의 변형단계 해석을 위한 변형모델은 Mamalis⁽¹¹⁾ 등이 변형가시화법으로 실험한 내용을 토대로 구성한다. 이들에 따르면 후속의 변형은 빌렛의 높이/폭의 비에 따라서 크게 3단계로 나눌 수 있으며, 이를 각각 A, B, C 변형형태라고 부르기도 한다. A 변형형태는 높이/폭 > 1 인 경우로 자유표면 근처의 재료가 빌렛의 높이를 감소시키는 방향으로 유동하여, 빌렛의 높이가 감소하고 폭이 증가하는 유동이며, B 변형형태는 높이/폭 = 1 인 경우로 빌렛의 높이와 폭이 동시에 증가하는 방향으로 유동하지만, 빌렛의 중심부는 강성영역으로 남아 있는 상태이다. C 변형형태는 높이/폭 < 1 인 경우로 B 변형형태와 유사하지만 빌렛의 중심부까지 유동이 진행된 상태이다. A, B, C 변형형태의 격자변형을 참고하여 점선속도불연 속면을 구성한 것과 이에 대한 자유물체도를 그림 9, 10, 11에 나타내었다.

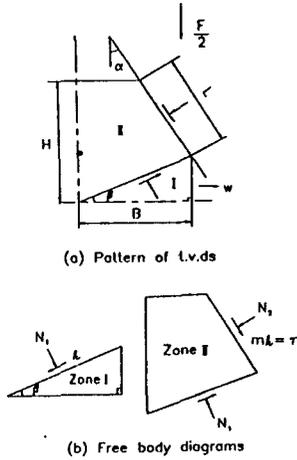


Fig.9 Subsequent deformation with mode A

다리와 빌렛사이에서의 마찰은 고찰마찰로 보아 마찰전단 응력을 $\tau = k$ 로 놓을 수 있으나, 실제공정에서는 윤활제를 사용하므로, 여기서는 마찰상수 m 을 이용하여 마찰전단응력을 $\tau = m \cdot k$ 로 두어 해석한다. 그림 9, 10, 11에 대한 힘평형방정식과 단위 길이당 단조하중은 각각 식(9-a, b), (10-a, b), (11-a, b)에 나타내었다.

[mode A]

$$[A] = \begin{bmatrix} \sin\beta & 0 & 0 \\ \tan\beta \cdot B & \cos\alpha \cdot L & 0 \\ 0 & -\sin\alpha \cdot L & -1 \end{bmatrix}$$

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ F/2 \end{Bmatrix}, \{B\} = k \cdot \begin{Bmatrix} \cos\beta \\ B + m \cdot \sin\alpha \cdot L \\ m \cdot \cos\alpha \cdot L - \tan\beta \cdot B \\ -m \cdot \cos\alpha \cdot L \end{Bmatrix}$$

..... (9-a)

$$\frac{F}{2} = m \cdot k \cdot \frac{L}{\cos\alpha} \quad \text{또는} \quad k \cdot \frac{B}{\sin\beta \cdot \cos\beta} \quad \dots \dots (9-b)$$

[mode B]

$$[a] = \begin{bmatrix} \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\beta \cdot l_1 & -\sin\delta \cdot l_2 & 0 & 0 & \cos\alpha \cdot L & 0 \\ \cos\beta \cdot l_1 & \cos\delta \cdot l_2 & 0 & 0 & -\sin\alpha \cdot L & 0 \\ 0 & -\sin\delta \cdot l_2 & \sin\gamma \cdot l_3 & \sin\eta \cdot l_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\delta \cdot l_2 & \cos\gamma \cdot l_3 & -\cos\eta \cdot l_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha \cdot L & -1 \end{bmatrix}$$

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ F/2 \end{Bmatrix}, \{b\} = k \cdot \begin{Bmatrix} \cos\beta \\ m \cdot \sin\alpha \cdot L + \cos\beta \cdot l_1 - \cos\delta \cdot l_2 \\ m \cdot \cos\alpha \cdot L - \sin\beta \cdot l_1 - \sin\delta \cdot l_2 \\ -(\cos\delta \cdot l_2 + \cos\gamma \cdot l_3 + \cos\eta \cdot l_4) \\ \sin\delta \cdot l_2 + \sin\gamma \cdot l_3 - \sin\eta \cdot l_4 \\ \sin\eta \\ -m \cdot \cos\alpha \cdot L \end{Bmatrix}$$

..... (10-a)

$$\frac{F}{2} = k \cdot \frac{m \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot L - \sin\alpha \cdot \sin\delta \cdot l_1 - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot l_2}{\sin\beta \cdot \cos(\alpha + \delta)} \quad \dots \dots (10-b)$$

[mode C]

$$[A] = \begin{bmatrix} \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta \cdot l_1 & \sin\gamma \cdot l_2 & 0 & 0 & -\cos\alpha \cdot L & 0 \\ \cos\beta \cdot l_1 & \cos\gamma \cdot l_2 & 0 & 0 & -\sin\alpha \cdot L & 0 \\ 0 & -\sin\gamma \cdot l_2 & 0 & \sin\delta \cdot l_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\gamma \cdot l_2 & l_3 & -\cos\delta \cdot l_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha \cdot L & -1 \end{bmatrix}$$

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ F/2 \end{Bmatrix}, \{B\} = k \cdot \begin{Bmatrix} \cos\beta \\ m \cdot \sin\alpha \cdot L - \cos\beta \cdot l_1 + \cos\gamma \cdot l_2 \\ -(m \cdot \cos\alpha \cdot L + \sin\beta \cdot l_1 + \sin\gamma \cdot l_2) \\ -(\cos\gamma \cdot l_2 + \cos\delta \cdot l_4) \\ \sin\gamma \cdot l_2 - \sin\delta \cdot l_4 \\ \sin\delta \\ m \cdot \cos\alpha \cdot L \end{Bmatrix}$$

..... (11-a)

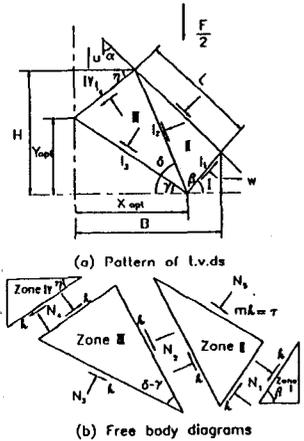


Fig.10 Subsequent deformation with mode B

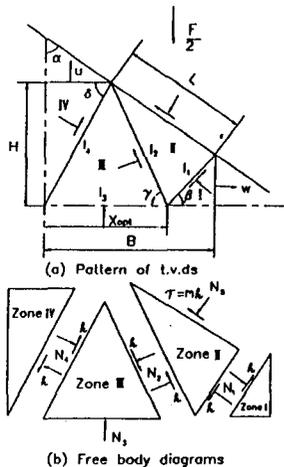


Fig.11 Subsequent deformation with mode C

$$\frac{m \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma \cdot L + \sin\alpha \cdot \sin\gamma \cdot l_1 + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot l_2}{\sin\beta \cdot \cos(\alpha + \gamma)}$$

(11-b)

변형형태는 다이의 행정에 따른 기본적인 치수(그림 11의 B, H, L)만 측정되어 지면, 각 변형단계 마다의 4 재료 유동상태를 알 수 있다. 그림 10, 그림 11에서 보 이, B 변형형태의 단조하중식(10-b)는 포함된 모든 변수 값을 기하학적 관계를 이용하여 X_{opt} 만의 함수로, C 변형 형태의 단조하중식(10-b)는 X_{opt} , Y_{opt} 만의 함수로 나타낼 수 있으므로, 수치해법을 통해 단조하중을 최소화시키는 X_{opt} , Y_{opt} 을 구할 수 있다. 이때의 X_{opt} , Y_{opt} 의 위치가 단조하중을 최소화하는 위치이며, 이에 따라 속도불연속면 들을 재구성하면 최적의 재료유동을 알 수 있다.

3. 결론

마름모꼴 다이를 이용한 사각빌렛의 밀폐형단조를 힘평형 법(force balance method)에 의하여 해석한 결과 다음의 결 론을 얻었다.

1. 초기의 변형형태는 초기 압출, 압셋팅형태로 나눌 수 있으며, 다이반각 α 와 다이와 빌렛접촉면상의 마찰에 의해 초기변형형태가 결정된다. 동일한 변형모형을 사 용할 경우 미끄럼선장해와 본 방법에 의한 해가 거의 일치하였다.
2. 후속의 변형과정은 실험에 의해 구해진 변형모형을 인 용하여 해석하였으며, 각 단계마다의 최적 재료유동을 수치해법을 통해 찾을 수 있음을 보였다.
3. 힘평형법을 사용할 경우, 변형모델이 주어지면 힘평형 방정식 만으로 쉽고, 신속하게 근사해를 구할 수 있다.

참 고 문 헌

1. D. Westwood and J.F. Wallace, "Upper - Bound Values for the Loads on a Rigid - Plastic Body in Plane - Strain", J. of Mech. engr. sci., 2(3), 178, 1960.
2. J.W. Green and J.F. Wallace, "Estimation Torque in the Hot Rolling Process", J. of Mech. Engr. Sci., 4 (2), 136, 1962.

3. J.W. Green, L.G.M. Sparling and J.F. Wallace, "Shear Plane Theories of Hot and Cold Flat Rolling", J. of Mech. Engr. Sci., 6(3), 219, 1964.
4. W. Johnson and A.G. Mamalis, "Some Force Plane Diagrams for Plane Strain Slip-Line Fields", Int. J. of Mech. sci., 20, 47, 1978.
5. A.G. Mamalis, K. Isobe and W. Johnson, "Force Polygons for the Plane Strain Forging Rectangular Billets with Diamond - Shaped Dies", Annals of the CIRP Vol. 34(1), 1985.
6. C. Bore and M.C. de Malherbe, "A Note on Force Plane Diagrams for Elastic and Elastic - Plasticity Stressed Thick Walled Cylinders", Int. J. of Mech. Sci., 21, 23, 1979.
7. B. Avitur and J.C. Choi, "Compatibility of the Upper - Bound Approach and Balance of Forces for the Treatment of Metal Forming Process", J. of Mechanical Working Technology, 13, 141, 1986.
8. J.C. Choi and J.M. Kim, "Comparative Analysis of Upper - Bound Approach and Force Balance Method", Trans of KSME, 10(3), 407, 1986.
9. J.C. Choi and B.M. Kim, "Upper Bound Solutions for Several Metal - Forming Processes", Proceeding of NAMRC(XIV), 406, 1986.
10. J.M. Kim, "Study on the Force Balance Method and Its Application", Ph. D. Thesis, Pusan National University, Korea, 1988
11. A.G. Mamalis, K. Isobe and W. Johnson, "Close-Die Forging of Rectangular Billets with Diamond Shaped Dies", Annals of the CIRP, Vol.30(1), 1981.