

“대변위 및 대회전을 고려한 만곡된  
셸의 기하학적 비선형 해석”

“A geometrically nonlinear analysis of the curved shell  
considering large displacements and large rotation increments”

○ 이재욱 \*

Lee, Jae-Wook

○ 양영태 \*\*

Yang, Young-Tae

Abstract

This paper presents a geometrically nonlinear behaviors of shell problems by using the three-dimensional curved shell element, which includes large displacements and large rotations.

The standard formulation of the geometrically nonlinearity is restricted to the assumption of infinitesimal rotation increments. This standard formulation for the displacement function is numerically improved by considering the second order expansions of Taylor series.

The nonlinear behaviors of the single and double curved shells are compared with the other results.

1. 서 론

구조물의 경량화 및 대형화 추세에 의해 제기 되는 좌굴문제에서 구조물이 하중을 수용할 수 있는 능력을 보다 정확하게 평가하기 위해서는 좌굴 후의 비선형 거동인 기하학적 비선형 및 재료의 비선형 특성을 추적 조사하여야 한다. 구조물의 비선형 좌굴해석 및 좌굴 이후의 거동을 추적 조사하기 위해서는 좌굴 이후의 구조물 형상이 만곡된 형상을 유지하기 때문에 셸 요소의 사용이 요구되며 구조물의 동적 안정성(dynamic stability) 및 접촉문제(contact problem)를 조사하기 위해서도 만곡된 형상을 추적 조사할 수 있는 셸 요소가 요구된다.

셸 구조의 구조해석에서 유한요소 해석방법이 20년 넘게 적용되고 있으며 접근방법에는 세가지 방법이 있다[11].

첫번째 방법에는 판 굽힘요소에 membrane 강성을 증첩시켜 사용하는 평면 사각형 요소와 삼각

형 요소이며 두번째 방법은 Kirchhoff-Love hypothesis 를 사용한 셸 이론에 근거를 두고 유한요소를 정식화한 요소이다. 그리고 세번째 방법은 3차원 고체요소(solid element)에 격하 개념(dgenerated concept)을 도입하여 연속체의 기하학적 운동을 reference surface 운동으로 격하시킨 요소이다. 첫번째 방법은 만곡된 형상 및 처짐을 근사적으로 표현하기 위해서는 요소 수의 증가가 필요하며 두번째 방법은 셸 이론을 유한요소에 적용하기가 복잡하다는 문제가 있으므로 본 논문에서는 셸 이론의 복잡성을 피하고 셸 거동을 근사적으로 나타낼 수 있는 3차 보간 함수를 사용한 격하요소를 사용하였다. 격하개념은 Ahmad[4]에 의해서 처음 소개 되었으며 두꺼운 셸의 선형해석에서 회전과 처짐의 자유도가 독립된 등계수요소(isoparametric element)를 사용하여 셸의 거동을 나타내는데 사용하였다. 그 후 격하개념은 여러종류의 요소를 유도하기 위해 적용되었으며 기하학적 비선형 및 재료의 비선형에 적용되었다[1-15].

격하요소를 이용한 비선형해석에서 Bathe,

\* 정회원 인하 대학교 선박해양 공학과 교수

\*\* 정회원 선박해양 공학과 박사과정

Ramm, Zienkiewicz, Owen, Hinton등은 쉘 및 보 요소의 기하학적 변위증분을 연속적인 하중 증분 단계에서 절점의 회전이 미소하다는 가정에 의해 제한되어 정식화하였다[1-13]. 따라서 이러한 요소의 접선 강성메트릭스는 회전 증분량(rotation increments)을 선형화하여 유도되며 유한 회전증분의 영향은 증분 평형식(incremental equations)의 반복계산 과정에서 고려하게 된다.

앞에서 언급된 격하 요소의 제한조건인 미소 회전증분량(infinitesimal rotation increments)의 가정을 무시하고 유한 회전증분의 영향(the effect of finite rotation increments)을 고려한 격하 요소의 정식화는 Surana, Onate 및 Dvorkin 등에 의해서 개발되었다[14,15].

유한 회전을 고려하는 방법에서 Surana는 비선형 절점 회전함수(nonlinear nodal rotation function)를 가정하여 강성메트릭스를 유도하였으며 Onate와 Dvorkin은 전체좌표에서 회전각에 대한 Argyris[16]의 회전메트릭스(rotation matrix)의 관계식을 이용하여 회전 메트릭스의 2차항까지의 근사치(quadratic approximation)를 고려한 강성메트릭스를 유도하였다.

본 논문에서는 유한요소의 기하학적 위치를 나타내는 변위함수의 방향벡터를 삼각함수로 표현하여 연속적인 하중증분 사이의 방향벡터 증분을 Taylor의 급수로 2차항까지 전개하므로써 비선형 회전 증분을 고려한 쉘 요소를 개발하였다.

기하학적 비선형 해석과정은 연속체 운동의 증분이론을 도입하여 total Lagrange(T.L.)수식과 updated Lagrange(U.L.)수식으로 비선형 거동을 해석하였다.

구조물의 비선형 거동을 추적 조사하는 비선형 수치해석의 반복 계산과정은 Newton-Raphson 방법의 수정보완 방법으로 Riks에 의해 제안된 구속조건식을 사용하여 반복 계산하는 arc-length 방법을 사용하였고[17-20], Y. B. Yang[19]에 의해 제안된 general stiffness parameter를 사용하는 비선형 수치해석법을 사용하였다.

## 2. 격하 쉘 요소

### 2.1 격하 쉘 요소의 기하학적 변위

쉘 요소의 기하학적 형상은 3차원 공간에서 Fig.1과 같이 격하된 중립면(mide surface)의 절점좌표와 절점에서의 방향벡터를 사용하여 직교좌표계에 나타낼 수 있다. 요소의 중립면에 정의

되는 국부곡선좌표계(local curvilinear coordinate)는 중립면의 평면을 나타내는 r, s방향과 수직방향 t방향으로 구성되며 요소의 거동은 중립면의 각 절점에서 전체좌표계(global coordinate system)의 3개 변위( $U_i, i=1,2,3$ )와 중립면의 수직 방향벡터성분  $V_{n1}, V_{n2}, V_{n3}$ 에 대한 회전 자유도  $\alpha, \beta$ 로 나타낸다[1-15].

여기서 격하 쉘 요소의 거동에 대한 time t상태의 기하학적 위치를 나타내면 다음과 같다.

$${}^tX_1 = \sum_{k=1}^N h^k(r,s) {}^tX_1^k + t/2 \sum_{k=1}^N a^k h^k(r,s) {}^tV_{n1}^k \quad (1)$$

${}^tX_1$  : time t상태에서 요소내의 임의 점에 대한 직교좌표

$h^k(r,s)$  : isoparametric 2차, 3차 보간함수

${}^tX_1^k$  : time t상태에서 요소의 k절점좌표

${}^tV_{n1}^k$  : time t상태에서 요소의 k절점에 대한 수직벡터의 단위성분

시간에 따라 변하는 요소형상의 변위를 나타내기 위하여 변위증분을 구하면 식(2), (3)과 같다.

$$U_1 = \sum_{k=1}^N h^k(r,s) U_1^k + t/2 \sum_{k=1}^N a^k h^k(r,s) V_{n1}^k \quad (2)$$

$$V_{n1}^k = {}^{t+dt}V_{n1}^k - {}^tV_{n1}^k \quad (3)$$

### 2.2 방향벡터 - 회전각 관계

time t time와 t+dt에 따라 변하는 수직방향 벡터와 회전각의 관계는 Fig.2에 도시한 바와 같이 좌표축  $X_1, X_2$ 와 수직방향벡터와의 회전각  ${}^t\psi^k, {}^t\phi^k$  와 회전증분  $\alpha^k, \beta^k$  로 나타내며 식(4), (5)로 표현한다.

$${}^{t+dt}\psi^k = {}^t\psi^k + \beta^k \quad (4)$$

$${}^{t+dt}\phi^k = {}^t\phi^k + \alpha^k \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} V_{n1}^k \\ V_{n2}^k \\ V_{n3}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos {}^{t+dt}\psi^k & -\cos {}^t\psi^k \\ \sin {}^{t+dt}\psi^k \cos {}^{t+dt}\phi^k - \sin {}^t\psi^k \cos {}^t\phi^k \\ \sin {}^{t+dt}\psi^k \sin {}^{t+dt}\phi^k - \sin {}^t\psi^k \sin {}^t\phi^k \end{bmatrix}$$

여기서 time t+dt상태의 변위는 증분이론에 의해 time t상태의 변위와 time t와 t+dt사이의 변위증분 U로 표시되며 이것을 Taylor 급수로 2차까지 전개하면 변위증분은 1차 선형항  $a$  ( $U^k, V^k, W^k, \alpha^k, \beta^k, \gamma^k$ ) 와 2차 회전항  $a_R$  ( $1/2(\alpha^k)^2, 1/2(\beta^k)^2, \alpha^k\beta^k$ ) 으로 구분하여 표현된다.

$${}^{t+dt}U = {}^tU + U \quad (6)$$

$$= {}^tU + \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] a + \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] \frac{a^2}{2!}$$

$$U = \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] a + \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] a_R \quad (7)$$

$$= U_L + U_R$$

$$U_{Li} = \sum_{k=1}^N h^k(r,s) U^k_i + t/2 \sum_{k=1}^N a^k h^k(r,s) \begin{bmatrix} {}^tF_{11}^k & {}^tF_{12}^k \\ \alpha^k \\ \beta^k \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$U_{Ri} = t/2 \sum_{k=1}^N a^k h^k(r,s) \begin{bmatrix} {}^tG_{11}^k & {}^tG_{12}^k & {}^tG_{13}^k \\ \frac{1}{2}(\alpha^k)^2 \\ \frac{1}{2}(\beta^k)^2 \\ \alpha^k \beta^k \end{bmatrix} \quad (9)$$

식(8), (9)에서 변형도-변위 관계식을 나타내기 위하여 국부 곡선좌표계( $r_i = r, s, t$ )에 대한 편미분을 1차 선형항과 2차 회전항으로 분리하여 계산하면 다음과 같다.

$$[\partial U_{Li} / \partial r_j] = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} h_{,r} [1 \quad t/2 \quad a [{}^tF_{11} \quad {}^tF_{12}]] \\ h_{,s} [1 \quad t/2 \quad a [{}^tF_{11} \quad {}^tF_{12}]] \\ h [0 \quad t/2 \quad a [{}^tF_{11} \quad {}^tF_{12}]] \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} U_i \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^k \quad (10)$$

$$[\partial U_{Ri} / \partial r_j] = t/2 a^k \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} h_{,r} [{}^tG_{11} \quad {}^tG_{12} \quad {}^tG_{13}] \\ h_{,s} [{}^tG_{11} \quad {}^tG_{12} \quad {}^tG_{13}] \\ h [{}^tG_{11} \quad {}^tG_{12} \quad {}^tG_{13}] \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \alpha^2 \\ \frac{1}{2} \beta^2 \\ \alpha \beta \end{bmatrix}^k \quad (11)$$

여기서 T.L. 수식은 초기형상의 전체좌표계  $\circ X_i$ , U.L. 수식은 변형된 형상의 전체좌표계  ${}^t X_i$ 에 대한 편미분값을 구하기 위하여 Jacobian 행렬을 사용하면 다음과 같이 구분된다.

$$(\partial U / \partial \circ X) = {}^m J^{-1} (\partial U / \partial R) \quad (12)$$

$$\text{T.L. : } m = 0$$

$$\text{U.L. : } m = t$$

$$[\partial U_i / \partial \circ X_j] = \sum_{k=1}^N [{}^m J_{j1}^{-1} \partial U_i / \partial r + {}^m J_{j2}^{-1} \partial U_i / \partial s + {}^m J_{j3}^{-1} \partial U_i / \partial t] \quad (13)$$

$${}^m U_{Li,j} = \sum_{k=1}^N {}^m h_{,j}^k U_i^k + \sum_{k=1}^N {}^m \bar{h}_{,j}^k [{}^t F_{12}^k \quad {}^t F_{12}^k] \begin{bmatrix} \alpha^k \\ \beta^k \end{bmatrix} \quad (14)$$

$${}^m U_{Ri,j} = \sum_{k=1}^N {}^m \bar{h}_{,j}^k [{}^t G_{11}^k \quad {}^t G_{12}^k \quad {}^t G_{13}^k] \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^k)^2 \\ \frac{1}{2}(\beta^k)^2 \\ \alpha^k \beta^k \end{bmatrix} \quad (15)$$

$${}^m \bar{h}_{,j}^k = {}^m J_{j1}^{-1} h_{,r}^k + {}^m J_{j2}^{-1} h_{,s}^k$$

$${}^m \bar{h}_{,j}^k = a^k / 2 [t h_{,j}^k + {}^m J_{j3}^{-1} h^k]$$

### 2.3 변형도 - 변위 관계

전체좌표계에 대한 식(14), (15)를 사용해서 변형도 증분의 선형증분과 비선형증분을 표현하면

다음과 같으며 고차항은 무시한다.

$${}^m e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ {}^m U_{Li,j} + {}^m U_{Lj,i} + \frac{{}^m U_{Lk,i} {}^m U_{Lk,j} + {}^m U_{Lk,i} {}^m U_{Lk,j}}{= 0, \text{ if time } m = t} + {}^m U_{Ri,j} + {}^m U_{Rj,i} \right] \quad (16)$$

$$= {}^m e_{ij}^L + {}^m e_{ij}^R \quad (17)$$

$${}^m \eta_{ij} = \frac{1}{2} [{}^m U_{Lk,i} \times {}^m U_{Lk,j}] \quad (18)$$

식(16), (17)을 행렬형태로 표현하면 식(18), (19), (20)으로 표현된다.

$${}^m e_L = {}^t B_L a_L \quad (18)$$

$${}^m e_R = {}^t B_R a_R \quad (19)$$

$${}^m d = {}^t B_{NL} a_L \quad (20)$$

### 2.4 응력 - 변형도 관계

격하 셀 요소의 가정에 의하여 중립면의 수직 방향 응력에 의한 변형 에너지는 무시되며 2nd Piola-Kirchhoff 응력증분과 Green-Lagrange 변형도 증분의 관계식은 식(21)으로 표시된다.

$${}^m S = {}^m C \epsilon = e$$

$${}^m C \epsilon = {}^m G^T {}^m C_L \epsilon = G \quad (21)$$

$$C_L = E / (1 - \nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2k \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서  ${}^m G$  행렬은 국부 곡선좌표계와 전체 좌표계의 변환 행렬이며  ${}^m C_L$ 은 국부 곡선좌표계에서 정의된 재료특성 행렬이다( $k=6/5$ ).

### 2.5 격하 셀 요소의 증분평형식

가상변위의 원리를 적용하여 time  $t+dt$ 상태의 연속체 평형상태를 time  $m$ 을 기준으로 표시하면 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{mV} [{}^m C_{ijrs} {}^m e_{rs} \delta {}^m e_{ij} + {}^m S_{ij} \delta {}^m e_{ij} + {}^m S_{ij} \delta {}^m \eta_{ij}] {}^m dV = \delta {}^{t+dt} W_m \quad (23)$$

$$\text{time } m = 0 : \text{T.L.}$$

$$m = t : \text{U.L.}$$

식(23)의 변형도 증분의 선형항  $\delta {}^m e_{ij}$  를 식(16)으로 1차 선형항, 2차 회전항으로 분리하여 표시하면 time  $t+dt$ 상태의 연속체 운동의 증분평형식은 식(24)와 같다.

$$\int_{mV} [{}^m C_{ijrs} {}^m e_{rs}^L \delta {}^m e_{ij}^L + {}^m S_{ij} \delta {}^m e_{ij}^L + {}^m S_{ij} \delta {}^m \eta_{ij}] {}^m dV = \delta {}^{t+dt} W_m - \int_{mV} {}^m S_{ij} \delta {}^m e_{ij}^L {}^m dV \quad (24)$$

식(24)를 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\delta {}^m e_L = {}^t B_L \delta a \quad (25)$$

$$\delta_{m e r} = \delta a^T \mathbf{B}_R a \quad (26)$$

$$\delta_{m d} = \mathbf{B}_{NL} \delta a \quad (27)$$

$$\left[ \int_{mV} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{BR}^T \mathbf{S} \right] dV a = \mathbf{t}^d \mathbf{R} - \int_{mV} \mathbf{B}_L^T \mathbf{S} dV \quad (28)$$

$$\left[ \mathbf{K}_{KL} + \mathbf{K}_{KNL} + \mathbf{K}_{KR} \right] a = \mathbf{t}^d \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_T = \left[ \mathbf{K}_{KL} + \mathbf{K}_{KNL} + \mathbf{K}_{KR} \right] \quad (30)$$

여기서 사용된 매트릭스는 다음과 같다.

- $\mathbf{C}$  : 선형 재료 상수
- $\mathbf{B}_L$  : 선형 변형도 - 변위 매트릭스
- $\mathbf{B}_{NL}$  : 비선형 변형도 - 변위 매트릭스
- $\mathbf{B}_R$  : 2차 회전 변형도 - 변위 매트릭스
- $\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}$  : 2nd piola kirchhoff 응력 텐서와 벡터
- $\mathbf{K}_{KL}$  : 선형 강성 매트릭스
- $\mathbf{K}_{KNL}$  : 비선형 강성 매트릭스
- $\mathbf{K}_{KR}$  : 2차 회전 강성 매트릭스
- $\mathbf{K}_T$  : 절선 강성 매트릭스
- $a$  : time  $t$  상태의 변위 증분 벡터
- $\mathbf{t}^d \mathbf{R}$  : time  $t$  상태의 외력 벡터
- $\mathbf{F}$  : time 0을 기준으로 계산된 time  $t$  상태의 내부절점 하중 벡터

#### 4. 수치해석의 결과

##### 4.1 the hinged-end cylindrical shell

격하 셸 요소의 대변위 및 대회전을 고려한 Surana[14]의 기하학적 비선형 해석결과와 비교하였다. snap through 와 snap back이 발생하는 구조인 단순지지 원통형 셸 구조(hinged cylindrical shell structure)의 기하학적 비선형 해석을 수행하여 집중하중을 받는 원통형 셸의 center 및 side의 처짐을 Fig. 3, 4에 도시하였으며 변위와 반복 계산회수를 Table.1, 2에 비교하였다. 셸의 두께가 6.35mm인 경우 Surana는 snap back을 나타내지 못했으나 본 논문의 경우는 Sabir and Lock 의 결과와 같이 snap back을 보여주고 있다. Surana의 경우는 비선형 수치해석 방법에서 displacement control 방법을 사용하였기에 snap back 현상이 나타나지 않았으며 본 논문에서는 arc-length method를 이용한 자동 하중 증분법을 사용하였다[20].

##### 4.2 the spherical shell

집중하중을 받는 사변이 단순지지인 spherical 셸구조의 기하학적 비선형 해석 결과를 Fig.5에서 비교하였으며 변위와 반복계산 회수를 Table 3.에서 비교하였다.

#### 5. 결론

대변위와 대회전을 고려한 만족된 셸 요소의 증분 평형식을 정식화하였으며 기하학적 비선형 수치해석의 결과를 비교하기 위해서 참고문헌 [14]의 예제와 수치해석을 비교하였다.

본 논문의 결과에서 하중 증분단계의 회수는 많지만 전체 반복 계산회수는 적으므로 비선형 경로의 접근성은 빠른 결과를 보여주고 있다.

cylindrical shell문제에서 비선형 거동의 snap through 및 snap back 현상을 보여주며 spherical shell문제에서 변위의 차이는 Surana와 본 논문과의 대회전을 고려하는 방법의 차이라고 사료된다. 이에 대한 해석결과의 정도평가를 위해 지속적인 연구가 요구된다.

#### 참고 문헌

- [1] 이재욱, 정기태, 양영태, "선체구조 부재의 좌굴해석", 인하대학교 산업 기술연구소, 1989
- [2] 이재욱, 정기태, 양영태, "선체구조 부재의 좌굴강도 해석 프로그램 개발", 인하대학교 산업 기술연구소, 1990.6.30
- [3] 정기태, 양영태, "편심 보강평판의 기하학적 비선형해석", 한국선급 기술 연구소, 1991.2
- [4] S.Ahmad, B.M.Irons, and O.C.Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", IJNME, Vol2, pp.419-451, 1970
- [5] K.J.Bathe, Ramm, and E.L.Wilson, "Finite element formulation for large deformation analysis", IJNME, Vol.9, pp351-386, 1975
- [6] E.Ramm, "A plate/shell element for large deflection and rotation", in "Formulation and Computational Algorithms in Finite Element Analysis", MIT Press, Cambridge, Mass, 1977
- [7] K.J.Bathe and S.Bolourchi, "A geometric and material nonlinear plate and shell element", IJCS, Vol.11, pp23-28, 1980
- [8] O.C.Zienkiewicz, "The finite element method", Third Edition, Magraw-hill, 1982
- [9] K.J.Bathe, "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, 1982
- [10] K.J.Bathe and Eduardo Dvorkin, "Our dis-

crete Kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis - an assessment", IJCS, Vol.16, pp89-98, 1983

- [11] J.A.Figueiras and D.R.J.Owen, "Analysis of elastic - plastic and geometrically nonlinear anisotropic plate and shells", in "Finite Element Software for Plates and Shells", pineridge, 1984
- [12] 전승문, "유한요소법을 이용한 원통형 복합 적층 판넬의 비선형 좌굴해석", 한국과학기술원, 박사논문, 1987
- [13] 염철용, "복합적층 원관형 구각의 비선형 강도해석", 인하대학교, 석사논문, 1990
- [14] K.S.Surana, "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", IJNME, Vol.19, pp581-615, 1983
- [15] E.ONATE, E.DVORKIN, M.E.CANGA and J. OLIVER, "On the Optention of the tangent matrix for geometrically nonlinear analysis using continuum based beam/shell finite elements" in "Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells", springer-verlag, 1990
- [16] John.Argyris, "An excursion into large rotations", CMAME, 85-155, 1982
- [17] M.A.Crisfield, "A fast incremental / iterative Solution Procedure that handle snap-through", IJCS, Vol.12, 55-62, 1980
- [18] Ekkehard Ramm, "The Riks/Wempner approach : an extension of the displacement control method in nonlinear analyses", in "Recent Advances in NonLinear Computational Mechanics" Swansea, U.K. 1982
- [19] Yeong-Bin Yang and Ming-Shan Shieh, "Solution method for nonlinear problems with multiple critical points", AIAA, VOL. 28, NO.12, 1990
- [20] 이재욱, 양영태, "Riks Method를 이용한 비선형 수치해석", 대한 조선학회 논문, Vol.28, No.1, 1991

Table 1. Load-deflection characteristics of hinged-end cylindrical shell.

Case : Present approach(1.0KN) ( t = 12.7 mm )

TOTAL LOAD(KN)	DISP. (CENTER)	DISP. (SIDE)	NO. OF ITERATION
0.864700E+00	-0.244346E+01	-0.536344E+00	3
0.156810E+01	-0.511630E+01	-0.134563E+01	3
0.204180E+01	-0.789127E+01	-0.259172E+01	3
0.222680E+01	-0.109945E+02	-0.488005E+01	4
0.218880E+01	-0.119495E+02	-0.591446E+01	2
0.123330E+01	-0.158351E+02	-0.136714E+02	3
0.960300E+00	-0.165523E+02	-0.155911E+02	2
0.549000E+00	-0.184870E+02	-0.193386E+02	3
0.671700E+00	-0.216902E+02	-0.224908E+02	3
0.122820E+01	-0.242779E+02	-0.239280E+02	2
0.205120E+01	-0.266800E+02	-0.248689E+02	2
0.309250E+01	-0.289398E+02	-0.255606E+02	2
0.433940E+01	-0.310998E+02	-0.261159E+02	2
TOTAL ITERATION			32

Case : K.S.Surana [ref.14]

TOTAL LOAD(KN)	DISP. (CENTER)	DISP. (SIDE)	NO. OF ITERATION
0.8859	-2.5	-0.5403	4
1.5186	-5.0	-1.2672	4
1.9619	-7.5	-2.3239	4
2.1848	-10.0	-3.9201	5
2.1207	-12.5	-6.5234	5
1.5584	-15.0	-11.3711	5
0.7071	-17.5	-17.7841	5
0.5500	-20.0	-21.1842	5
0.8613	-22.5	-23.0456	5
1.5118	-25.0	-24.2556	4
2.4757	-27.5	-25.1322	4
3.7578	-30.0	-25.8267	4
TOTAL ITERATION:			54

Table 2. Load-deflection characteristics of hinged-end cylindrical shell.

Case : Present approach(0.3KN) ( t = 6.35 mm )

TOTAL LOAD(KN)	DISP. (CENTER)	DISP. (SIDE)	NO. OF ITERATION
0.2357700E+00	-0.2924230E+01	-0.007650E+01	2
0.4140000E+00	-0.6404240E+01	-0.134409E+00	3
0.5369400E+00	-0.9878180E+01	-0.806975E+00	3
0.5946300E+00	-0.1324260E+02	-0.281430E+01	3
0.5928300E+00	-0.1359760E+02	-0.320965E+01	2
0.5472000E+00	-0.1498140E+02	-0.562800E+01	3
0.3723000E+00	-0.1624300E+02	-0.105458E+02	3
0.2434500E+00	-0.1669730E+02	-0.134363E+02	3
0.7650000E-01	-0.1698010E+02	-0.168564E+02	3
-0.6600000E-01	-0.1671860E+02	-0.198048E+02	3
-0.1824000E+00	-0.1542750E+02	-0.229674E+02	3
-0.3213900E+00	-0.1411550E+02	-0.256981E+02	4
-0.3839100E+00	-0.1663540E+02	-0.262006E+02	6
-0.3399300E+00	-0.1915880E+02	-0.263043E+02	3
-0.2643000E-01	-0.2456810E+02	-0.262272E+02	3
0.2118000E+00	-0.2665180E+02	-0.262351E+02	2
0.6792900E+00	-0.2950020E+02	-0.263369E+02	2
0.1118070E+01	-0.3149320E+02	-0.264720E+02	2
TOTAL ITERATION			52

Case : K.S.Surana [ref.14]

TOTAL LOAD(KN)	DISP. (CENTER)	DISP. (SIDE)	NO. OF ITERATION
0.2101	-2.5	-0.0104	4
0.3479	-5.0	-0.0250	4
0.4528	-7.5	-0.1470	4
0.5319	-10.0	-0.6435	4
0.5817	-12.5	-1.7878	5
0.5555	-15.0	-4.7549	6
0.4694	-16.0	-7.6169	5
0.1264	-17.0	-15.5390	9
-0.3701	-18.0	-26.2121	9
-0.3486	-19.0	-26.2023	4
-0.3168	-20.0	-26.1929	4
-0.2636	-21.0	-26.1715	4
-0.2205	-22.0	-26.1453	4
-0.1542	-23.0	-26.1205	4
-0.0744	-24.0	-26.1019	4
0.0198	-25.0	-26.0932	4
0.1298	-26.0	-26.0971	4
0.2565	-27.0	-26.1153	4
0.4012	-28.0	-26.1489	4
0.5647	-29.0	-26.1984	4
0.7485	-30.0	-26.2637	4
TOTAL ITERATION			95

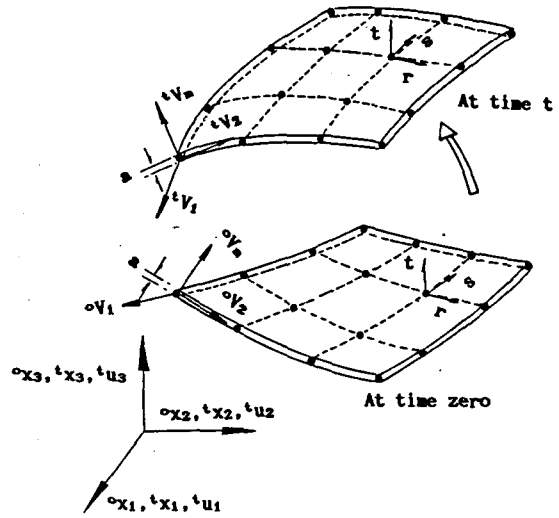


Fig. 1 Curved shell element undergoing large displacements and large rotations.

Table 3. Load-deflection characteristics of the spherical shell.

Case : Present approach(1.0KN) ( t = 99.45 mm )

TOTAL LOAD(KN)	DISP. (CENTER)	NO. OF ITERATION
0.17374E+02	-0.226973E+02	2
0.31592E+02	-0.478844E+02	2
0.41340E+02	-0.749834E+02	2
0.46034E+02	-0.107172E+03	2
0.38380E+02	-0.172138E+03	3
0.35192E+02	-0.192671E+03	2
0.39644E+02	-0.243844E+03	2
0.47690E+02	-0.263381E+03	2
0.65456E+02	-0.290680E+03	2
TOTAL ITERATION		19

Case : K.S.Surana [ref.14]

TOTAL LOAD(KN)	DISP. (CENTER)	NO. OF ITERATION
16.5684	-25	4
28.8113	-50	4
37.4830	-75	4
43.1707	-100	4
46.2597	-125	4
46.9210	-150	4
45.1676	-175	5
41.1574	-200	5
36.2697	-225	5
34.7353	-250	4
41.1698	-275	4
56.5641	-300	4
TOTAL ITERATION		51

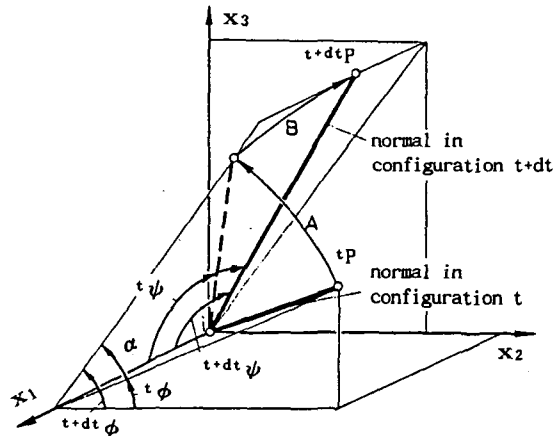


Fig. 2 Rotation of The direction cosines of  $^t\bar{V}_n$  normal to the shell mid-surface.

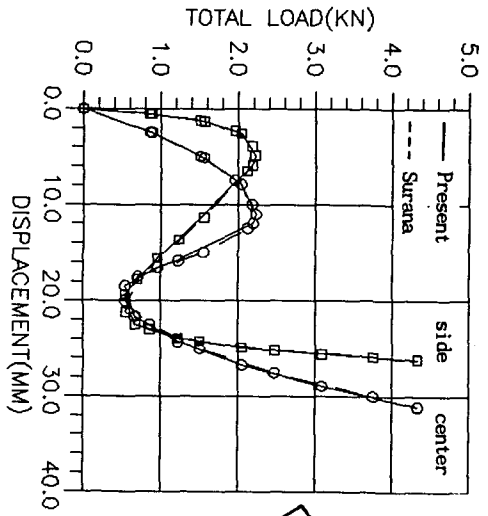


Fig. 3 Load-deflection curves for the cylindrical shell ( $t=12.7\text{mm}$ )

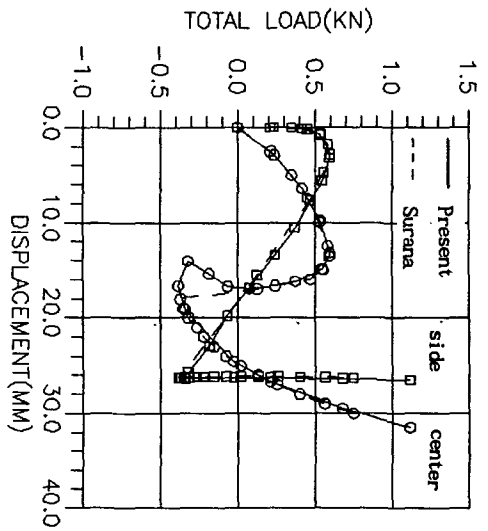
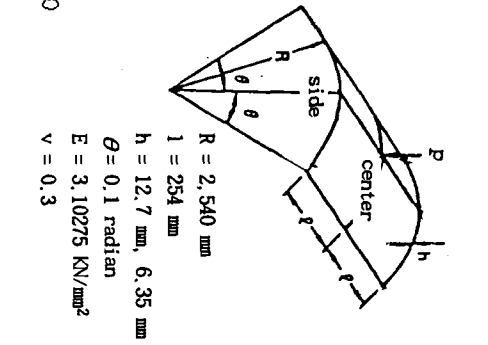


Fig. 4 Load-deflection curves for the cylindrical shell ( $t=6.35\text{mm}$ )

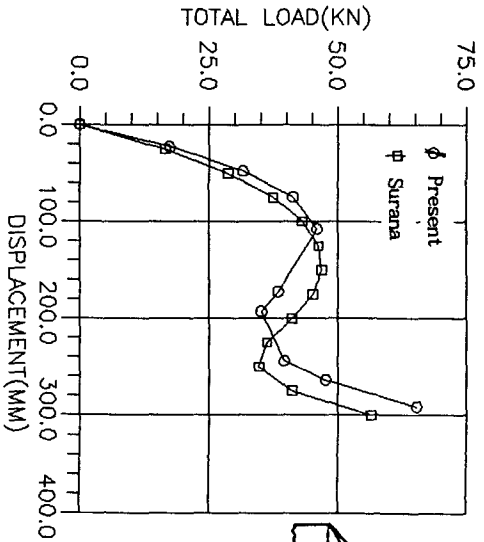


Fig. 5 Load-deflection curves for the spherical shell ( $t=99.45\text{mm}$ )

