

교량구조의 체계 신뢰성 해석을 위한 중요도  
표본추출 기법

Importance Sampling Technique for System Reliability Analysis of Bridge Structures

조효남\*      김인섭\*\*  
Cho Hyo Nam      Kim In Sup

ABSTRACT

This study is directed for the development of an efficient system-level Importance Sampling Technique for system reliability analysis of bridge structures

Many methods have been proposed for structural reliability assessment purposes, such as the First-order Second-Moment Method, the Advanced Second-Moment Method, Computer Simulation, etc.

The Importance Sampling Technique can be employed to obtain accurate estimates of the required probability with reasonable computation effort.

Based on the observation and the results of application, it may be concluded that Importance Sampling Method is a very effective tool for the system reliability analysis.

1. 서론

오늘날 추계학적(stochastic) 접근방법을 제외한 구조신뢰성 해석이론은 크게 3가지로 대별될 수 있는데, 첫번째는 가장 고전적이고 이론적인 방법으로서 랜덤벡터의 결합밀도함수에 의해 정의되는 구조파손확률을 직접 수치적분식으로 부터 구하는 소위 Level III 방법이며 두번째는 현재 가장 많이 쓰이고 있는 근사적인 해법인 2차 모멘트(AFOSM, SORM)방법으로 구조물의 한계상태 표면까지의 거리인 신뢰성지수  $\beta$ 를 사용하여 구조물의 파손확률을 간접적으로 구하는 Level II 방법이다. 그리고 세번째는 요즘 관심이 높아지고 있는 시뮬레이션에 의한 방법으로 이것은 시스템의 파손확률을 직접 시뮬레이션에 의해 구하는 방법과 근래에 급속도로 발전되고 있는 중요도 표본 추출기법(Importance Sampling Technique, 이하 IST로 표기)에 의한 방법등이 있다. 그러나 지금까지는 첫번째와 세번째 방법 즉 Level III 엄밀이론과 시뮬레이션 이론은 이론적 고찰 또는 실용적 이론의 가정을 검사하는 목적으로만 사용되었고 주로 Level II 근사이론에만 관심과 연구가 집중되어온 것이 사실이다. 그러나 80년대 이후 4세대 컴퓨터를 이용한 대용량 고속계산과 IST, Directional Sampling[5]등 효율적인 시뮬레이션 기법의 발전으로 시뮬레이션 방법은 이제 실제적인 체계신뢰성의 해석기법의 하나로서 복잡한 구조물의 신뢰성 해석에 광범위하게 응용되기 시작했다.

그러나 지금까지의 이 분야의 연구들은 단편적인 요소신뢰성에 대한 MCS 나 IST의 적용에 불과하거나 체계신뢰성을 다루었다라도 직렬체계 또는 병렬체계등 각각 독립적인 경우만 다루어서 실제적인 구조시스템의 복합체계에 대한 적용기법에 대한 연구는 매우 미비한 상태이다. 따라서 본 연구에서는 교량 상부구조와 같은 실제적인 구조시스템의 체계신뢰성 해석에 효율

적으로 적용시킬수 있는 IST 시뮬레이션 기법을 개발하는데 연구의 중점을 둔다.

2. MCS 에 의한 신뢰성해석의 기본개념

구조시스템의 신뢰성해석은 크게 두 가지의 단계로 나뉘어 진다. 그 첫번째는 개개의 파손 모드에 대한 한계상태함수를 결정하는 것이고, 두번째는 시스템 파손 모델링으로 부터 파손확률을 구하는 것이다. 여기서 각각의 한계상태함수  $g_i(x)$ ,  $i=1, 2, \dots, M$ 의 파괴영역(F)는 다음과 같이 정의된다.

$$g_i(x) \leq 0 \quad (1)$$

여기서  $x$ 는 하중효과, 각 구조부재의 강도 등과 같은 기본 랜덤변량벡터들이다.

시스템의 파손확률  $P_F(\text{sys})$ 은 다음의 적분식에 의해서 구할 수 있다.

$$P_F(\text{sys}) = \int \cdot \int_F f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 x_2 \dots x_n$$

또는

$$P_F(\text{sys}) = \int_F f(x) dx \quad (2)$$

여기서  $x$  : 기본 랜덤변량 벡터

$f(x)$  : 랜덤벡터  $x$ 의 결합확률 밀도함수

$F$  : 파괴영역

윗 식 (2)는 다음과 같이 등가적으로 나타낼 수 있다.

$$P_F(\text{sys}) = \int_F I[x] f(x) dx \quad (3)$$

여기서  $I[x]$ 는 파손 지시함수(Indicator function)로서 아래와 같은 Binary 성질을 갖는다.

$$I[x] = I[G(x)] = \begin{cases} 1 & G(x) \leq 0 \text{ 일 경우(파괴)} \\ 0 & G(x) > 0 \text{ 일 경우(안전)} \end{cases} \quad (4)$$

\* 정회원 한양대학교 토목공학과 교수

\*\* 한양대학교 토목공학과 석사과정

여기서  $G(x)$  는 시스템 성능함수 (Performance function)로서 직, 병렬 조합체에 따라 다음과 같이 정의된다.

$$G(x) = \prod_{i=1}^m g_i(x) \quad : \text{직렬체계의 경우}$$

$$G(x) = \prod_{i=1}^k g_i(x) \quad : \text{병렬체계의 경우}$$

$$G(x) = \prod_{j=1}^m \left[ \prod_{i=1}^k g_{ij}(x) \right] \quad : \text{조합체계의 경우}$$

이때,  
 $m$  = 직렬체계 한계상태함수의 수  
 $k$  = 병렬체계 한계상태함수의 수

일반적으로  $I[x]=1$ 일 경우의 파괴영역의 경계면의 모양이 매우 불규칙하므로 식(3)의 적분식을 해석적으로 구하는 일은 극히 어렵다 따라서 시스템의 파손확률은 시뮬레이션이나 근사해법으로 구하는 것이 바람직하다.

### 2.1 재래적인 MCS 방법

파손확률은 위 식 (3)의 지시함수의 기대치와 같다는 것을 알 수 있고 따라서 MCS 에 의한 시스템의 파손확률  $P_F(\text{sys})$  은 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$P_F(\text{sys}) = P_F^{\text{MC}}(\text{sys}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[x_i] \quad (5)$$

여기서  $x_i$  는 난수  $u_i$  에 대해  $f(x)$  로 부터 취한 표본치

여기서 첨자 MC 는 MCS 방법으로 구한 추정치임을 의미하는 것이며,  $x_i$ 는 원래의 밀도함수에서 추출한 랜덤변량이고  $N$  은 표본의 개수이다.

이상과 같이 재래적인 MCS방법은 기본확률변수의 밀도함수로 부터 직접 표본을 취하여 파손확률을 구하므로 파괴영역에서 표본이 추출될 확률은 거의 계산된 파괴확률과 일치한다. 따라서  $M/P$  개의 표본이 필요하게 된다. 여기서  $P$ 는 파괴확률  $P_F$  의 기대치이다. 따라서 이 방법으로 신뢰도를 추정할 경우 매우 많은 양의 표본이 필요하게 되어 매우 비합리적인 방법임을 알 수 있다.

### 2.2 중요도 표본 추출기법(IST)

표본이 파괴영역에서 추출되는 확률을 높이기 위해서 새로운 표본 밀도함수  $h(x)$ 를 도입한다. 그러면 식 (3)는 다음과 같이 표시된다.

$$P_F(\text{sys}) = \int_x I[x] \left[ \frac{f(x)}{h(x)} \right] h(x) dx \quad (6)$$

그러면 이 식 으로부터 IST의  $P_F$  추정치를 얻을 수 있는데 이것은 다음과 같이 표현된다.

$$P_F(\text{sys}) = P_F^{\text{IS}}(\text{sys}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[x_i] \frac{f(x_i)}{h(x_i)} \quad (7)$$

여기서  $x_i$  는 난수  $u_i$  에 대해 표본밀도함수  $h(x)$  로 부터 취한 표본치

여기서 첨자 IS는 IST 에의한 추정치임을 나타내며  $x_i$ 는  $f(x)$  대신 IST 표본밀도함수  $h(x)$ 에 의해 추출된 변량이다.

## 3. IST-MCS 에 의한 신뢰성해석

### 3.1 요소신뢰성 해석

먼저 한계상태함수가 1개 밖에 없는 경우인 요소신뢰성에 대한 IST 적용방법을 살펴본다. 그림 1 처럼 2개의 변수와 한계상태함수  $g(x)$ 를 가진 경우를 생각해 보자. 그림에서 A 점은 적절한 최적치점으로서 이것이 AFOSM 이나 수치최적화방법으로 구할 수 있는 최적치점  $x^*$ 이라는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 이 경우 IST 밀도함수  $h(x)$ 는 간단히 원래의 밀도함수를  $x^*$ 점으로 이동(Shift) 시켜서 얻을 수 있다. 다시 말하면  $f(x)$ 의 평균점을  $x^*$ 점으로 바꾸어서  $h(x)$ 를 취한다는 뜻이다. 또한 최확파괴점(Most likelihood failure point)을 찾는 방법으로서 기본변수가 비정규분포 이거나 비선형인 경우 본 연구에서는 수치최적화 방법을 사용하였는데 그것을 간략하게 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } f(x) \\ &\text{subject to :} \end{aligned} \quad (8)$$

$$g(x) \leq 0$$

여기서 :

$f(x)$  : 랜덤벡터  $x$  의 결합밀도함수  
 $g(x)$  : 한계상태함수

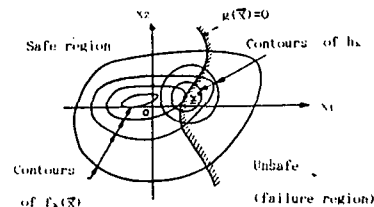


그림 1 요소신뢰성의 IST 표본밀도함수

즉, 이것은 시스템의 결합밀도함수를 한계상태함수  $g(x)=0$ 라는 제약조건 하에서 최대화 시킨다는 의미인데 이것은 근사해법의 AFOSM의 해법에서 기본변수가 Gaussian 분포를 갖는 경우 최단거리점을 구하는 것과 같게 된다. 따라서, 근사적으로는 요소신뢰성 해석에서 표본밀도함수의 평균점인 최확파괴점은 AFOSM 에 의해 구하거나 최적화기법에 의해 구할 수 있다.

### 3.2 체계 신뢰성해석

체계 신뢰성해석에서의 IST-MCS의 적용은 요소 신뢰성해석을 위한 적용처럼 그리 간단하지는 않다. 그 이유는 체계신뢰성해석에서는 여러개의 한계상태함수가 존재하게 되며 따라서 각각의 한계상태함수별 최확치가 구해지므로 이 각각의 최확치를 취합하여 그 시스템에 가장 적절한 한 개의 표본밀도함수를 선정해야 하기 때문이다.

직렬체계, 병렬체계와 이 두 형태가 복합적으로 이루어진 체계신뢰성 문제에 IST 기법을 적용시키는 방법은 다음과 같다.

#### 1) 직렬체계

그림 2와 같은 직렬체계모델링에 대한 파손 확률과 모델링은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_F = P[E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m] \quad (9)$$

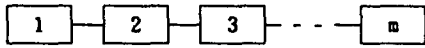


그림 2 직렬체계의 모델링

여기서  $E_i$ 는 각각의 한계상태함수가  $g_i(X) \leq 0$  ( $i=1, \dots, m$ )로 되는 사상을 나타낸다. 여기서 식 (3)과 (4)에서 지시함수를 이용한 직렬체계에 대한 파손확률을 다시 구체적으로 표시하면 다음과 같다.

$$P_F = \int I[G(x)]f(x)dx$$

여기서

$$G(x) = \bigcup_{i=1}^m g_i(x) \quad (10)$$

$m$ 개의 상이한 한계상태함수를 갖는 경우의 직렬체계에 대해 IST-MCS에 의해 파손확률을 구하는 경우 적절한 표본밀도함수는 각 한계상태함수의 표본밀도함수  $h_i(x)$ 에 가중치  $w_i$ 를 적용하여 다음과 같이 정의할 수 있다. [8]

$$h(x) = w_1 h_1(x) + w_2 h_2(x) + \dots + w_m h_m(x) \quad (11)$$

이때  $\sum w_i = 1$

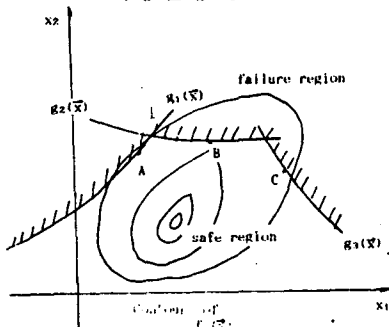


그림 3 직렬체계의 경우

여기서 각  $h_i(x)$ 는 앞의 요소신뢰성에서 구한 것처럼  $g_i(x)$ 의 최확과외점에 대한 에 대한 표본밀도함수이다. 그림 3에서는 3개의 한계상태함수가 직렬체계로 연결되어 있으므로 각각의 한계상태에 따른 최확치 A, B, C를 구할 수 있다. 따라서 결국 이 최확치점에 대해 각각 3개의 표본밀도함수를 구할 수 있다.

그림에서 명백하게 알 수 있는 것처럼 모든 한계상태함수가 똑같이 신뢰성해석에 있어서 중요성을 가지고 있지는 않다. 따라서 위 식 (11)에서와 같이 각 한계상태함수로 부터 구한 표본밀도함수에 어떤 가중치를 곱한 것에 비례하여 표본추출을 하는 것이 합리적임을 알 수 있다.

그간 많은 연구자들에 의해 가중치를 구하는 여러 방법이 제안되었는데, 이중에 중요한 몇가지를 소개하면 다음과 같다.

$M$ 개의 한계상태함수가 존재할 경우, Melchers[7]는 그중에 파손확률에 기여하는 정도가 미약한 한계상태함수는 무시하고 중요한 한계상태함만을 고려하여 근사적으로  $h(x) = \sum w_i h_i(x)$ 를 표본밀도함수로 사용하였다. 즉, 모든 한계상태함수에 대해 동일한 가중치를 사용한 것이다.

반면에 Schuler/Stix[9]는 각 한계상태함수에 대해 AFOSM에 의한  $\beta_i$ 를 구한 다음 가중치를 다음과 같이 구하도록 하였다.

$$w_n = \phi(\beta_m) / \sum_k \phi(\beta_k) \quad (12)$$

여기서  $\beta_m$ 은 모드  $m$ 에 대한 신뢰성지수,  $\phi(\cdot)$ 는 표준정규분포함수

그러나 이와 같은 방법으로 가중치를 구할 경우 거의 같은 크기의 가중치를 가지게 되어 별 의미를 갖지 못하거나 실제적으로

$h(x) = \sum w_i h_i(x)$ 에서 각각의 밀도함수의 합으로 된 표본밀도함수에 대응하는 무작위표본을 구하기 어려운 경우가 많다. 따라서 직렬체계의 표본밀도함수를 구하는 방법으로 최근에 Fu/Moses[3]는 WGNSD(Weighted General Normal Sampling Density) 방법을 제안하였는데 기본개념은 다음과 같다.

#### (1) WGNSD 방법

다음과 같이 각 최확치에 대한 함수값의 비율로 가중치를 구한다.

$$\frac{f(x_1^*)}{f(x_m^*)} = \frac{h(x_1^*)}{h(x_m^*)} = \frac{\sum_m w_m h_m(x_1^*)}{\sum_k w_k h_k(x_m^*)} \quad m=1..M \quad (13)$$

$\sum_m w_m = 1$

이 방법은 표본밀도함수  $h(x)$ 가 최확치점에서 결합밀도함수  $f(x)$ 에 비례한다고 가정된 것이며, 위 식(13)으로부터 간단히  $M$ 개의 연립방정식을 풀어서 가중치를 구한다.

이 가중치들을 이용하여  $M$ 개의 파손모드가 있을 경우 다음과 같이 체계 파손확률을 구할 수 있다.

$$P_F(\text{sys}) \approx P^*f(\text{sys}) = \sum_{m=1}^M \frac{w_m}{N_m} \left\{ \sum_{i=1}^{N_m} \frac{I[x_{im}] f(x_{im})}{\sum_j w_j h_j(x_{im})} \right\} \quad (14)$$

여기서  $w_m$  : 각 모드에 대한 가중치  
 $N_m$  : 각 모드에 대한 표본 수  
 $h$  : 표본밀도함수

(2) 합성방법(Composition Method)

이 방법은 본 연구자가 제안하는 방법으로 표본밀도함수  $h(x)$  를 여러개의 한계상태함수에 대응하는 밀도함수  $h_i(x)$  의 합성형으로 이루어져 있다고 보고 합성형 밀도함수에 의해 표본치를 추출하는 방법 즉, 합성방법(composition method) [1]에 의해 시뮬레이션하는 방법이다. 합성표본밀도함수는 다음과 같이 정의한다

$$h(x) = \sum p_i h_i(x)$$

여기서  $h_i(x)$  는  $i$  번째 한계상태함수의 표본밀도함수이며,

$$p_i = w_i = \frac{f_i(x)}{\sum f_i(x)}$$

로서  $f_i(x)$  에 관련되는 가중치 또는 발생 확률이다.

따라서 이 방법으로서 IST 표본추출을 수행하기 위해서는 2단계가 필요하다

i) 먼저 첫번째 난수를 발생시켜  $p_i$  에 대한 이산형 랜덤포본을 추출하므로써 그에 해당하는 PDF  $h_i(x)$  를 선택한다.

ii) 또하나의 난수군에 의해 i) 단계에서 선택한  $h_i(x)$  에 대응하는 랜덤포본을 발생시킨다.

위와 같은 시뮬레이션에 의한 파손확률은 다음과 같다.

$$P_F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{I[G(x_i)]}{h(x_i)} \right] f(x_i) \quad (15)$$

2) 병렬체계

그림 4 와 같은 병렬체계의 모델링에 대한 파손확률은 다음과 같다.

$$P_F = P[E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_m] \quad (16)$$

또한 식 (3)과 (4)와 같이 지시함수를 이용하여 병렬체계의 파손확률을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_F = \int I[G(x)] f(x) dx$$

여기서  $(17)$

$$G(x) = \prod_{i=1}^k g_i(x)$$

이때  $k$  는 병렬체계 한계상태함수의 수

병렬체계에서는 2개나 그 이상의 한계상태함수의 교차영역이, 파괴영역을 형성한다. 따라서 통상적으로 이 경우의 최확파괴치는 그림 5 에서 보여주는 바와 같이 각 한계상태함수의 교차

역에서의 최대밀도점이 되고 이는 최소거리점과 일치하는 것이 보통이다. 따라서 2 차 모멘트 방법에서는 기본확률변수들이 Gaussian 일 경우 표준화된 공간에서의 최단거리로서 쉽게 구하거나 좀더 정확한 해를 얻기 위해서는 수치 최적화를 사용하여 최확치를 쉽게 구할 수 있다. 그러나 문제는 만약 다차원 영역의 체계신뢰성 문제로써 랜덤 변수가 3 개 이상이거나 또는 극심한 비선형 함수일 경우에는 그리 간단하지 않다. 이 경우에는 반드시 한계상태함수가 하나의 점이나, 하나의 선, 또는 평면을 형성하지 않을 경우도 있으며, 공통의 교차선이나 면이 형성되더라도 최확파괴점은 파괴영역을 형성하는 다른 한계상태 경계면에서 생길 수 있다. 그러므로 이러한 경우에도 2 차 모멘트 방법의 해석에서는 역시 쉽게 최확파괴점을 구할 수 없게 된다. 따라서 일반적으로는 수치적인 최적화 방법에 의존하는 것이 가장 타당하다고 여겨지기 때문에 본 연구에서는 병렬체계의 표본밀도함수를 구하는 방법으로서 다음과 같은 최적화 방법을 제안한다.

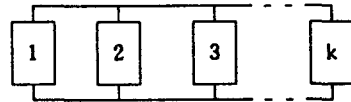


그림 4 병렬체계의 모델링

Maximize  $f(x)$

subject to :

$$g_i(x) \leq 0 \quad (i=1,2,\dots,k) \quad (18)$$

여기서 :

$f(x)$  : 랜덤벡터  $x$  의 결합밀도함수

$g_i(x)$  :  $i$  번째 한계상태함수

$k$  : 한계상태함수의 수

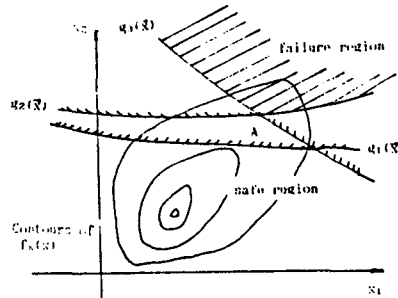


그림 5 병렬체계의 경우

그림 5 에서는 3 개의 한계상태함수를 동시에 만족시키는 점으로서 A 점이 선정되어 이 점에서 표본밀도함수를 발생시킨다. 따라서 병렬체계의 파손확률은 이상과 같은 절차에 의해서 구한 최확치점을 표본밀도함수의 기대치로 취하여 앞장에서 사용한 방법에 의해서 시뮬레이션을 시행하여 시스템의 파손확률을 구한다.

3) 조합체계 (Combined System)

지금까지는 각각 시스템이 병렬체계 또는 직렬체계만으로 이루어진 경우만을 다루어 보았다. 그러나 실제적인 모든 구조물이나 특히 본 연구에서 다루는 교량구조물의 경우는 체계파손 모델링이 대개 병렬체계와 직렬체계의 조합으로 구성된 조합체계로 이루어진다. 따라서 실제적인 구조물의 체계신뢰성을 해석하기 위해서는 앞의 개별적인 방법만으로는 적용이 불가능하며 따라서 IST를 이용하는 시뮬레이션에 의한 체계신뢰성해석은 본 연구에서 제안하는 조합체계의 체계신뢰성 해석방법으로서 수행되어야 할 것으로 생각된다.

식 (3)과 (4)에 따르면 병렬체계의 파손확률을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_F = \int I[G(x)]f(x)dx \quad (19)$$

여기서

$$G(x) = \bigcup_{j=1}^m \left[ \prod_{i=1}^k g_{ij}(x) \right]$$

: FMA 즉, 병-직렬 모델링의 경우

$$G(x) = \bigcup_{i=1}^k \left[ \prod_{j=1}^m g_{ij}(x) \right]$$

: SCA 즉, 직-병렬 모델링의 경우

먼저 설명의 편의상 아래 그림과 같이 3개의 병렬체계가 직렬체제로 연결된 조합체계의 파손확률을 생각해 보자

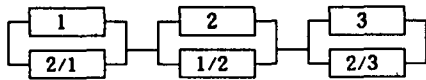


그림 6 조합체계의 모델링

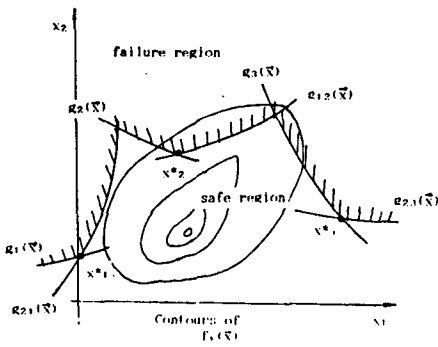


그림 7 조합체계의 경우

이 문제의 파손확률을 구하기 위한 첫 단계는 각 병렬체계의 최확치를 구하는 것이다. 이것은 앞절에서 제시한 병렬체계의 최확치를 찾는 최적화의 절차로 구할 수 있다. 그림 7에 보인 바와 같이 각각의 최확치가  $x^*_1, x^*_2, x^*_3$

로서 3개의 점이 선정되면, 그 다음 단계로는 병렬체계에서 구한 이 세개의 최확치로서 각각의 표본밀도함수를 만들고 이것들을 앞절에서 설명한 직렬체계의 IST 절차에 따라 각각의 표본밀도함수에 가중치를 구한다는 앞절에서 설명한 합성형 방법에 의해서 시뮬레이션을 행하여 이 시스템의 파손확률을 구할 수 있다. 이것을 좀더 단계적으로 설명하면 다음과 같다.

- ① 각각의 병렬체계에 대한 최확치를 수치 최적화 방법으로 구한다.
- ② 각각의 최확치점으로부터 전술한 3.2의 1)에서 설명한 방법으로 각각의 가중치  $w_i$  를 구한다. ( $\sum w_i = 1$ )
- ③ 이 가중치를 이용하여 그림 7과 같이 계단형 CDF를 생성시킨다.
- ④ 첫번째 난수를 발생시켜 이들 가중치에 대한 이산형 CDF의 확률값을 취하고 그림 7의 이산형 CDF와 비교하여 그에 해당되는 가중치에 관련되는  $f_x(x)$  를 선정한다.
- ⑤ 두 번째 난수군을 발생시키고 이로부터 선정된  $f_x(x)$  에 대응하는 표본치를 추출하여 시뮬레이션을 행한다.
- ⑥ 단계 ④ 를 반복한다.

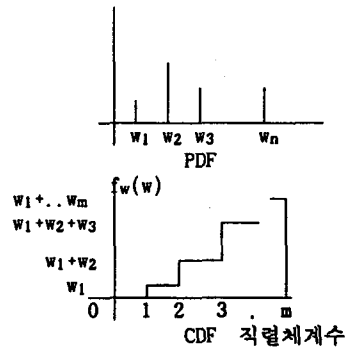


그림 7 w의 PDF와 CDF

4. 비선형 수치 최적화 방법

앞에서 IST-MCS에 의한 구조물의 신뢰성 해석에서 요소 한계상태의 최확파괴점이나 병렬체계의 파괴역에 대해 최확파괴점을 구하는 문제는 간단한 최적화 문제로서 해를 구할 수 있음을 보여주었다. 이러한 최적화 문제에서 목적함수는 기본랜덤변수의 결합밀도함수가 되고 제약조건은 선형 또는 비선형 한계상태함수가 되므로 식 (20)와 같은 비선형계획 문제로 됨을 알 수 있다. 제약조건식은 요소신뢰성의 경우와 같이 단일 한계상태함수인 경우에 최확파괴점은 한계상태경계면에 위치하게 되므로 동식제약조건이 되고, 체계신뢰성 해석에서와 같이 여러 한계상태 함수로 된 파괴역의 최확 파괴점을 찾는 경우에는 부등식 제약조건이 된다. 따라서 일반적으로 이와같은 비선형 최적화 문제의 특

장은 목적함수가 고차의 비선형 함수가 되므로 이러한 고차 비선형문제의 해를 효율적으로 구할 수 있는 최적화 알고리즘에 의해 해를 구해야 하는데 종래에 많이 사용되 오던 Feasible Direction 이나 Gradient Projection Method 과 같은 직접적인 알고리즘이나 SUMT(Sequential Unconstrained Minimization Technique), QP(Quadratic Programming), 또는 ALMM(Augmented Lagrange Multiplier Method)[2] 등에 의해 해를 구할 수 있지만 여기서는 이와같은 형태의 최적화 문제에 매우 효율적인 FTM(Flexible Tolerance Method)[2] 을 사용하여 최적해를 구하도록 하였다. FTM 은 등식 및 부등식형, 선형 또는 비선형 제약조건을 갖는 어떤 형태의 문제라도 포괄적으로 취급할 수 있는 매우 위력적인 알고리즘으로서 문헌[2] 에 상술되어 있으므로 여기서는 기본개념만 요약 소개한다.

일반적인 비선형 수치 최적화 문제는 다음과 같이 간단히 나타낼 수가 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} & : f(x) \quad x \in E^n \\ \text{subject to} & : y_i(x) = 0 \quad i=1, \dots, m \quad (20) \\ & g_i(x) \geq 0 \quad i=m+1, \dots, p \end{aligned}$$

여기서  $f(x)$ ,  $y(x)$ , 와  $g_i(x)$  는 선형 혹은 비선형 함수이다. 일반적으로 대부분의 비선형 수치최적화 방법은 최적화를 수행함에 있어서 엄격한 가능역(feasible region)에 대한 조건 때문에 이를 만족시키는데 쓰이는 계산시간이 굉장히 많이 소요된다. 반면에 FTM 알고리즘은 가능점(feasible points)에 의해 주어지는 정보 뿐만 아니라 일종의 비가능점(nonfeasible points)인 근접가능점(near-feasible points)에서 주어지는 정보도 함께 이용하여 목적함수의 값을 개선시키기 때문에 계산시간이 대폭 줄어 든다. 이 근접가능역의 한계는 식 (20)의 가능역에 대한 한계를 만족시킬때 까지는 문제의 탐색 작업이 계속되면서 점진적으로 제한된다. 문제에 대한 이런 기본적인 방법에 기초하여 식 (20)는 같은 해를 주는 다음과 같은 간단한 형태로 대체할 수가 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} & : f(x) \quad x \in E^n \\ \text{subject to} & : \Phi(k) - T(x) \geq 0 \quad (21) \end{aligned}$$

여기서  $\Phi(k)$  는 k 번째 탐색단계의 가능성에 대한 FTM허용 기준치의 값이며,  $T(x)$ 는 제약 조건의 위반정도를 측정하는 양의 범함수로서 이들은 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \min \left\{ \Phi(k), \right. \\ & \left. \frac{m+1}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} \|x_i(k) - x^{(k)}_{r+1}\| \right\} \Phi(0) \\ &= 2(m+1)t \quad (22) \end{aligned}$$

여기서  $t$  = 초기 탐색다면체의 크기  
 $m$  = 등식 제약조건의 수

$x^{(k)}_i = E^n$ 공간의 탐색다면체의 i 번째 정점  
 $r=(n-m)$  = 식 20 의  $f(x)$  에 대한 자유도의 수  
 $x^{(k)}_{r+2} = n=r$ 일 경우에 정의된 도심에 대응하는 정점  
 $k = 0, 1, \dots$  완료된 탐색단계를 나타내는 수  
 $\Phi^{(k-1)}$  = (k-1) 번째 탐색단계의 허용기준값

$$T(x) = + \left[ \sum_{i=1}^m y_i^2(x) + \sum_{i=m+1}^p |g_i(x)|^2 \right] \quad (23)$$

여기서  $U_i$  는  $g_i(x) \geq 0$  일때는  $U_i = 0$  그리고  $g_i(x) \leq 0$  일때는  $U_i = 1$  인 연산자이다.

또한 근접가능역은 다음과 같이 정의할 수가 있다.

$$\Phi(k) - T(x) \geq 0 \quad (24)$$

이 FTM 의 기본개념은 식(24)의 근접가능역의 조건을 만족시키는 동시에  $T(x)$ 를 최소화하는 방향으로  $x$  값을 변화시키면서 목적함수를 개선해 나가는 것이다.

### 5. IST 기법의 적용 및 고찰

본 연구에서 제안한 교량구조의 체계신뢰성 해석을 위한 효율적인 시뮬레이션 기법인 IST-MCS 의 효율성을 검증하기 위하여 종래의 AFOSM에 의한 점추정 방법과 재래적인 단순 MCS 방법과 IST-MCS 기법에 의한 해석결과를 비교 분석하여 표 1~2 와 그림 8 에 나타내었으며, 또한, IST 방법에 의한 해석에서 표본밀도함수의 형태에 대한 예민도 분석을 하여 표 3 와 그림 10 에 나타내었다.

먼저 그림 8 과 표 1 은 IST-MCS 방법의 검증을 위하여 기본랜덤변량들을 NORMAL 분포로 가정하고 요소신뢰성 해석을 수행한 결과를 보여주고 있다. 이 경우 기본랜덤변량들을 모두 GAUSSIAN 분포로 가정하였으므로 AFOSM 으로 구한 신뢰성지수는 엄밀해가 된다. 따라서 본 연구에서 사용한 IST-MCS 기법은 이 AFOSM의 수치결과와 같은 값을 준다는 것을 알 수 있으며, 그림에서 보는 것과 같이 단순 MCS 방법은 10<sup>5</sup>의 시뮬레이션 수행 후 수렴된 값을 주었으나 IST-MCS 방법은 10<sup>3</sup> 회에서 부터 수렴된 값을 주고 있다. 결과적으로 IST-MCS 방법은 단순 MCS 방법에 비해 10<sup>2</sup> 배 이상 시뮬레이션 횟수를 줄일 수 있을 뿐 아니라 그 값도 정확한 값을 주는 아주 효과적인 기법임을 알 수 있다.

그림 9 는 본 연구에서 IST-MCS 기법으로 분석한 교량들 중 각 교량형식별로 1 개씩을 선택해 IST-MCS 방법과 AFOSM 그리고 단순 MCS 기법에 의한 결과를 보인 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 비교적 신뢰성 지수가 낮은 용포교의 경우 단순 MCS 방법은 10<sup>5</sup> 정도의 시뮬레이션을 행하여야 값이 수렴하기 시작하지만 비교적 신뢰성 지수가 높은 도화교는 10<sup>6</sup> 회 이상의 시뮬레이션을 행하여야 한다. 반면에 IST-MCS 방법은 신뢰성 지수의 크기에 관계없이 10<sup>3</sup> 회 ~

10<sup>4</sup>회 정도의 시뮬레이션으로도 거의 정확한 값을 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. 따라서 IST-MCS 기법은 단순 MCS 기법에 비해 10<sup>2</sup> 배 이상으로 빨리 수렴하는 효과적인 기법임을 알 수 있다.

표 2 에서는 AFOSM 에 의한 체계신뢰도를 함께 비교하였는데 이를 보면 AFOSM 방법은 근사적인 절 추정 방법으로서 IST-MCS 에 의해 구한 신뢰성지수보다 0.2~0.3 정도의 낮은 값을 주는 방법이며 파괴확률의 측면에서 상한치의 근사 값을 주는 방법임을 알 수 있다.

또 표 4 와 그림 11 는 IST-MCS 의 표본 밀도함수의 분산을 변화시키면서 신뢰도에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 이 분석결과 분산은 2 배 정도의 값이 좋은 결과를 주는 것으로 나타났다.

결론적으로 단순 MCS 기법은 파괴확률에 따라서 시뮬레이션의 횟수도 적게는 10<sup>5</sup>회, 많게는 10<sup>10</sup>회 까지 증가해야 하는 단점으로 인하여 매우 비 경제적인 방법으로 사료된다. 반면에, IST 기법은 신뢰성지수의 크기에 관계없이 거의 일정한 시뮬레이션 횟수(1000~10000 회)에서 수렴하므로 단순 MCS 기법에 비해 10<sup>2</sup>~10<sup>8</sup> 배 정도로 적은 시뮬레이션 횟수에서 값을 얻을 수 있는 교량의 안전도평가에 매우 효율적인 기법으로 사용가능하다.

### 5 결론

본 연구에서 제안된 실용적인 교량상부 구조 시스템의 체계신뢰성모형에 대한 수치해석에서 본 연구에서 제안하는 알고리즘에 따른 중요도 표본추출 기법(IST)을 사용한 Monte Carlo 시뮬레이션(MCS)에 의한 수치해석방법은 종래의 AFOSM에 비하여 정확도가 높으며, 10<sup>5</sup>~10<sup>8</sup>회의 시뮬레이션이 필요한 단순 MCS에 비하여 1000~5000회 정도에서 수렴을 하는 매우 유효적이고 효율적인 수치해석의 기법임을 알 수 있었다.

### 참고 문헌

- (1) Ang, A.H-S and Tang, W.H., "Probability Concepts in Engineering Planning and Design", Vol. I, John Wiley, 1984.
- (2) David, M. H., "Applied Nonlinear Programming", McGAW-Hill, Inc., 1972
- (3) Fu, G. and Moses, F., "Importance Sampling in Structural System Reliability"
- (4) Fu Gonkang, "Error Analysis for Importance Sampling Method", International Workshop on Structural System Reliability, Colorado,
- (5) Ibrahim, Y. and Cornell, c., "Experiences with Applications of Importance Sampling in Structural Reliability Computations"
- (6) Melchers, R. E., "Importance Sampling in Structural System", Structural Safety, Vol 6, 1989.

- (7) Melchers, R.E., "Reliability of Parallel Structural Systems," Jour. of Structural Eng., ASCE, Vol. 109, No. 11, Nov. 1983, pp. 2651-2665.
- (8) Melchers, R.E., "Structural Reliability Analysis and Prediction, Eleis Horwood Limited, 1987.
- (9) Schueller, G.I. and Stix, R., " A Critical Appraisal of Method to Determine Failure Probabilities", Structural Safety, 4(1987), 293-309
- (10) 조효남, "R.C. 도로교 상부구조의 신뢰성 설계기준에 관한 연구," 대한토목학회 논문집 2(3) : 87-99 (1982).
- (11) 조효남, "체계신뢰성 방법에 기초한 도로교 설계기준 개발 및 기설 교량의 신뢰성 평가", 한양대학교 공과대학 토목공학과 구조연구실 1989. 5.

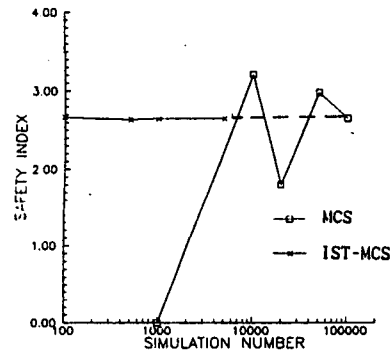
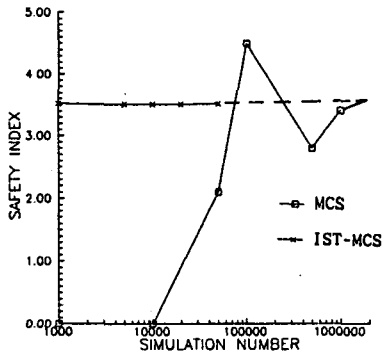


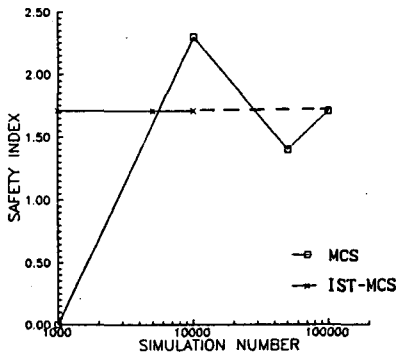
그림 8 요소 신뢰도

표 1 요소신뢰도 비교 (진부교 1번 거더)

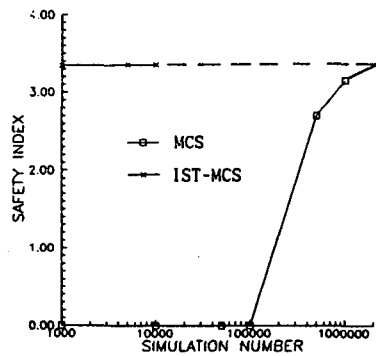
| MCS TYPE  | SIMULATION | $\beta$ | $P_f$                   |
|-----------|------------|---------|-------------------------|
| CRUDE MCS | 100300     | 2.65    | $0.4036 \times 10^{-2}$ |
| IST-MCS   | 1000       | 2.65    | $0.4077 \times 10^{-2}$ |
| AFOSM     |            | 2.65    | $0.4089 \times 10^{-2}$ |



(a) 악양교(R.C.교)



(b) 용포교(강교)



(c) 도화대교(P.C.교)

표 2 각 교량의 체계신뢰도

| 교량명             | SIMULATION |        | $\beta$ |
|-----------------|------------|--------|---------|
|                 | 형식         | 횟수     |         |
| 악양교<br>(R.C 교)  | CRUDE MCS  | $10^6$ | 3.41    |
|                 | IST-MCS    | $10^3$ | 3.52    |
|                 |            | 7300   | 3.51    |
|                 | AFOSM      |        | 3.30    |
| 용포교<br>(강 교)    | CRUDE MCS  | $10^5$ | 1.71    |
|                 | IST-MCS    | $10^3$ | 1.71    |
|                 |            | 1000   | 1.71    |
|                 | AFOSM      |        | 1.53    |
| 도화대교<br>(P.C 교) | CRUDE MCS  | $10^6$ | 3.15    |
|                 | IST-MCS    | $10^3$ | 3.35    |
|                 |            | 17900  | 3.36    |
|                 | AFOSM      |        | 3.17    |

표 3 밀도함수의 분포형태에 따른 체계신뢰도

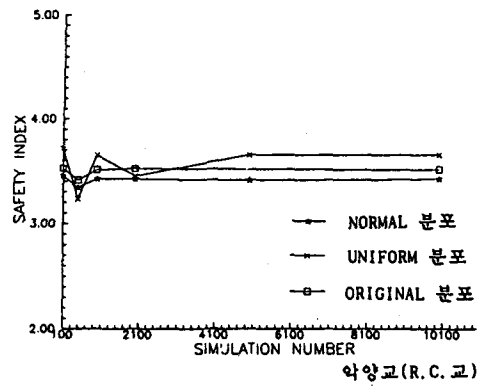
| 교량명             | 분포형태     | 수렴횟수simulation | $\beta$ |
|-----------------|----------|----------------|---------|
| 악양교<br>(R.C 교)  | ORIGINAL | 1000           | 3.52    |
|                 | NORMAL   | 1000           | 3.42    |
|                 | UNIFORM  | 5000           | 3.65    |
| 용포교<br>(강 교)    | ORIGINAL | 1000           | 1.71    |
|                 | NORMAL   | 1000           | 1.63    |
|                 | UNIFORM  | 5000           | 1.85    |
| 도화대교<br>(P.C 교) | ORIGINAL | 1000           | 3.35    |
|                 | NORMAL   | 1000           | 3.24    |
|                 | UNIFORM  | 5000           | 3.48    |

표 4 각 교량의 분산변화에 따른 체계신뢰도 (저렴한 횟수 : 3000 회)

| 교량명  | $1.0\sigma$ | $2.0\sigma$ | $3.0\sigma$ | $4.0\sigma$ | 단순MCS( $10^7$ )회 |
|------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------|
| 악양교  | 3.46        | 3.50        | 3.54        | 3.49        | 3.51             |
| 용포교  | 1.69        | 1.72        | 1.72        | 1.71        | 1.71             |
| 도화대교 | 3.31        | 3.37        | 3.38        | 3.30        | 3.36             |

그림 9 각 교량의 체계신뢰도





악양교(R.C.교)  
그림 10 표본 밀도함수 변화에 따른 체계실패도

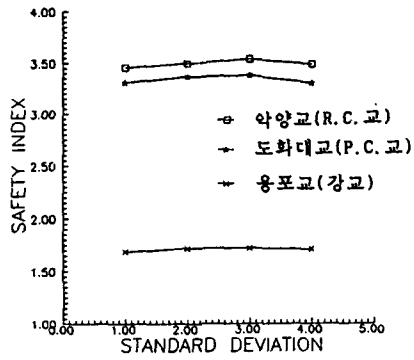


그림 11 분산변화에 따른 체계실패도